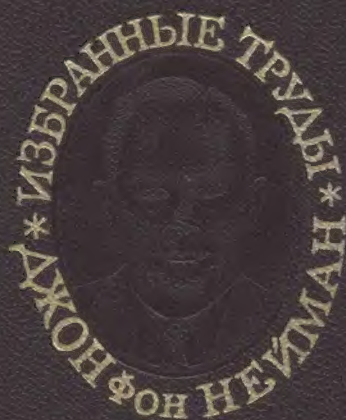
VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
ДЖОН фон НЕЙМАН

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

# КЛАССИКИ НАУКИ



# ДЖОН ФОН НЕЙМАН

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

## В ДВУХ ТОМАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1987

# ДЖОН ФОН НЕЙМАН

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

## I

Издание подготовил
Я. Г. СИНАЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1987

УДК 517.5+517.9

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»
Основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ:

*А. А. Баев* (председатель), *И. Е. Дзялошинский, А. Ю. Ишлинский, С. П. Капица, И. Л. Кнунянц, А. Н. Колмогоров, С. Р. Микулинский, Д. В. Ознобишин* (ученый секретарь), *Л. С. Полак, Я. А. Смородинский, А. С. Спирин, И. Т. Фролов* (заместитель председателя), *А. Н. Шамин, А. Л. Яншин*

Ответственный редактор
*А. Н. Колмогоров*

Переводчики:
*П. М. Блехер, Л. А. Бунимович, А. М. Вершик, А. В. Марченко*

**Нейман Дж. фон. Избранные труды по функциональному анализу.**— М.: Наука, 1987. Т. I.

В книгу вошли впервые публикуемые на русском языке основные работы Дж. фон Неймана по эргодической теории, почти периодическим функциям на группах, большой мемуар о бесконечных тензорных произведениях и др. В книге помещена также статья о математическом творчестве Неймана и библиография его трудов.

Книга рассчитана на математиков и физиков-теоретиков.

---

**Джон фон Нейман**

Избранные труды по функциональному анализу. I

*Утверждено к печати редакционной коллегией серии «Классики науки»*

Редакторы *Е. К. Паламарчук, Т. С. Смирнова.* Художественный редактор *М. В. Версоцкая.* Технический редактор *О. М. Гуськова.* Корректоры *Н. Б. Габасова, Н. И. Казарина, И. А. Талалай.*

ИБ № 31691

Сдано в набор 21.05.85. Подписано к печати 7.02.87. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 27,62. Усл. кр.-отт. 28,79. Уч.-изд. л. 27,9. Тираж 3900 экз. Тип. зак. 5-369. Цена 3 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука». 117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90. Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4, ул. Репина, 4.
Отпечатано с привозных матриц во 2-й типографии издательства «Наука».
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6. Зак. 2983.

---

Н $\frac{1702050000\text{-}129}{042(02)\text{-}87}$ 128-86-II

© Издательство «Наука», 1987 г.


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ * ДЖОН фон НЕЙМАН *

# ОБ ОПЕРАТОРНЫХ МЕТОДАХ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ*

## ВВЕДЕНИЕ**

1. Предложенная Б. О. Купманом операторная трактовка классической механики[1] за короткое время приобрела широкую известность благодаря достигнутому с ее помощью заметному продвижению в решении таких проблем в этой науке, к которым ранее не удавалось найти никаких подходов. В этой связи представляется оправданной надежда на то, что и в будущем она будет способствовать прогрессу в этом направлении. Поэтому в высшей степени желательным является ее дальнейшее развитие, которое в первую очередь требует более глубокого анализа свойств введенных операторов. Один из возможных подходов к выполнению всей программы предлагается в настоящей статье, где указываются важнейшие связи между вопросами механики и проблемами теории операторов, причем некоторые из последних решены, а для остальных предложены правдоподобные гипотезы.

Мы употребляем обозначения Купмана[2]: $\varphi$ — фазовое пространство некоторой механической системы; $P$ — его произвольная точка; $S_t : P \rightarrow P_t = S_t P$ — «поток» в $\varphi$, описывающий с помощью системы дифференциальных уравнений механики соответствующий сдвиг в момент времени $t$. Согласно теореме Лиувилля $S_t$ сохраняет меру: каждое (в смысле Лебега) измеримое подмножество фазового пространства $\varphi$ отображается под действием преобразования $S_t$ на множество той же меры[3], и обратное тоже имеет место[4]. Пусть $\Omega$ — инвариантное относительно всех $S_t$ подмножество фазового пространства $\varphi$, т. е. интегральная поверхность механического движения. На поверхности $\Omega$ можно известным способом определить элемент объема $d\omega$ и плотность $\rho = \rho(P) > 0$ так, что мера $\rho d\omega$ инвариантна относительно $S_t$, т. е. если для подмножества $\Lambda \subset \Omega$ определить лебегову меру как $\mu(\Lambda) = \int_\Lambda \rho d\omega$, то поток $S_t$ оказывается сохраняющим меру также и в $\Omega$[5].

---

* Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 587—642.

** В книге приняты следующие обозначения: * и [1]— примечания редактора; [1]— примечания автора; [1] — библиография, помещенная в конце статьи

[1] См. [1, с. 315].

[2] См. [1; 2, с. 70, доказательство эргодической теоремы], а также [3, с. 255, доказательство теоремы о перемешивании].

[3] В механике это свойство доказывается только для параллелепипедов. Его можно распространить на конечные суммы параллелепипедов, затем на пределы возрастающих последовательностей подобных множеств и далее на все открытые множества. Пусть множества $O_1, O_2, \ldots$ открыты, тогда открытыми являются их пересечения $O_1$, $O_1O_2$ $O_1O_2O_3, \ldots$ и предел этой последовательности $O_1O_2O_3 \ldots$ Так как любое множество меры 0 есть подмножество некоторого множества вида $O_1O_2O_3 \ldots$ меры 0, то рассматриваемое свойство имеет место и для таких множеств. А поскольку любое измеримое множество представимо в виде разности множества вида $O_1O_2O_3\ldots$ и некоторого множества меры 0, то оно имеет место для всех измеримых множеств.

[4] Обратное утверждение вытекает из соответствующего свойства обратного отображения $S_{-t}$ или непосредственно из теоремы 2 предыдущей работы автора [1].

[5] Обычно здесь ограничиваются рассмотрением параллелепипедов, которое согласно примеч. 3 и 4 может быть обобщено.

Преобразования $S_t$ образуют в $\varphi$ (и в $\Omega$) однопараметрическую группу, т. е. выполняется равенство $S_t\,(S_s P) = S_{t+s}\,P$, или символически: $S_t S_s = S_{t+s}$. Они являются, как мы видели, взаимно однозначными и сохраняющими меру отображениями $\varphi$ (и $\Omega$) на себя. Кроме того, они в области определения непрерывны по совокупности переменных $P$, $t$ и даже непрерывно дифференцируемы. Последнее свойство не будет в дальнейшем использоваться, так как оно несущественно при операторном подходе Купмана. Теперь мы сформулируем основную проблему, относящуюся к «потокам», возникающим в механике. Понятие фазового пространства $\varphi$, или аналогично интегральной поверхности $\Omega$, обобщим следующим образом.

$D_1$. Пусть $\Omega$ — произвольное $m$-пространство, т. е. метрическое, сепарабельное и полное[6], для его подмножеств $\Lambda$ определена $l$-мера $\mu^*(\Lambda)$ (обладающая свойствами лебеговой внешней меры)[7].

Множество действительных чисел $t$ образует аналогично $m$-пространство $T$ с обычной лебеговой внешней мерой, играющей роль $l$-меры $\tilde{\mu}^*(\tilde{\Lambda})$.

Произведение пространств $\Omega \times T$, состоящее из всевозможных пар $[P, t]$[8], также является $m$-пространством, $l$-мера в котором может быть определена следующим образом

α) Пусть $O$ и $\tilde{O}$ — открытые множества соответственно в $\Omega$ и в $T$; $O \times \tilde{O}$ — множество пар $[P, t]$, где $P \in O$, $t \in \tilde{O}$. Тогда мы полагаем $\mathfrak{J}(O \times \tilde{O}) = \mu(O)\tilde{\mu}(\tilde{O})$.

β) Пусть $\bar{\Lambda}$ — некоторое множество из $\Omega \times T$. Рассмотрим последовательность открытых множеств $O_1, \tilde{O}_1, O_2, \tilde{O}_2, \ldots$, такую, что $\bar{\Lambda} \subseteq O_1 \times \tilde{O}_1 + O_2 \times \tilde{O}_2 + \ldots$ Нижнюю границу (по всем таким последовательностям) сумм $\mathfrak{J}(O_1 \times \tilde{O}_1) + \mathfrak{J}(O_2 \times \tilde{O}_2) + \ldots$ обозначим через $\bar{\mu}^*(\bar{\Lambda})$.

Эта величина является аналогом внешней меры Лебега в многомерном пространстве, и доказано, что она также обладает свойствами $l$-меры[9]. После введения этого определения становится ясным смысл таких понятий, как «измеримая функция», «интеграл» и т. п., в пространствах $\Omega$, $T$, $\Omega \times T$.

Аналог «потока» $S_t$ при этом определяется следующим образом.

$D_2$. Пусть задано для любого $t$ взаимно однозначное, сохраняющее меру отображение $S_t: P \to P_t = S_t P$ пространства $\Omega$ на себя. $S_t$ является однопараметрической группой, т. е. выполняется равенство $S_t\,(S_s P) = S_{t+s}P$, или символически $S_t S_s = S_{t+s}$. При этом $S_t P$ — измеримая функция по совокупности переменных $P, t$[10].

---

[6] См. определение 1 в предыдущей статье автора[1].

[7] См. определение 2 в предыдущей статье автора [2].

[8] См., например, [4, с. 102][3]. Если $\overline{P, Q}$ — расстояние в $\Omega$, то в $\Omega \times T$ метрика определяется, например, как $\overline{[P, t], [Q, s]} = \sqrt{(\overline{P, Q})^2 + (t - s)^2}$

[9] См., например, [5, с. 229—237, 274]. Другие свойства мер в многомерных пространствах переносятся на наш случай точно так же, в частности теорема Фубини [5, с. 621—625].

[10] То есть если $O$ — открытое множество в $\Omega$, то определенное при помощи $S_t P$ в $O$ $[P, t]$-множество измеримо в $\Omega \times T$.

Представляется целесообразным несколько ослабить требования, изложенные в $D_2$.

$D_2'$. Множества меры нуль (обозначим их через $N_t'$, $N_t''$, $N_{t,s}$) нужно рассматривать в $D_2$ как исключительные, т. е. $S_t$ должно быть взаимно однозначным и сохраняющим меру отображением (только) из $\Omega - N_t'$ на $\Omega - N_t''$ (в $N_t'$ будем считать, что $S_t$ не определено); равенство $S_t(S_sP) = S_{t+s}P$ должно выполняться везде, кроме множества $N_{t,s}$ [11]. Последнее символически записывается как $S_tS_s \simeq S_{t+s}$.

Множество отображений $S_t$, определенное согласно $D_2$, будем называть «потоком общего вида». Если выполняется $D_2$ и функция $S_tP$ непрерывна или непрерывно дифференцируемая и т. д., то мы будем называть $S_t$ соответственно непрерывным потоком, непрерывно дифференцируемым потоком и т. д. Если наше рассмотрение касается какой-то задачи механики, то мы будем использовать термин «механический поток» [4]. Два потока общего вида считаются эквивалентными, если соответствующие отображения $S_t$ (из этих потоков) для любого фиксированного $t$ отличаются только на $P$-множестве меры 0.

Введем теперь определение следующего важного понятия.

$D_3$. Пусть $\Omega'$, $\Omega''$ — $m$-пространства с $l$-мерами соответственно $\mu_1'$ и $\mu_2''$ определены согласно $D_1$ и $\Sigma : P' \to P'' = \Sigma P'$ — взаимно однозначное и сохраняющее меру отображение из $\Omega'$ (за вычетом некоторого множества меры 0) на $\Omega''$, из которого также, вообще говоря, исключено некоторое множество меры 0. Каждый поток общего вида $S_t'$ в $\Omega'$ отображение $\Sigma$ переводит в поток общего вида $S_t'' = \Sigma S_t' \Sigma^{-1}$ и обратно.

Два потока общего вида $S_t$, $S_t'$, действующие соответственно в пространствах $\Omega'$ и $\Omega''$, называются изоморфными, когда существует такое, сохраняющее меру, отображение $\Sigma$, которое переводит эти потоки друг в друга (с точностью до множества меры 0), т. е. $S_t'' \simeq \Sigma\, S_t' \Sigma^{-1}$.

Изоморфные потоки должны рассматриваться как не различающиеся существенно, так как единственное имеющееся между ними различие состоит в том, что точка $P'$ из $\Omega'$ должна быть заменена соответствующей точкой $P'' = \Sigma P'$ из $\Omega''$. Однако для проблемы, в которой рассматриваются только объемы введенных множеств (мы поясним ниже, какая проблема имеется в виду) благодаря тому, что $\Sigma$ сохраняет меру, эта замена оказывается несущественной.

Непрерывность или (даже) непрерывная дифференцируемость потока могут быть утрачены при замене его изоморфным потоком: они не являются свойствами, инвариантными относительно изоморфизма. Не исключено, что для каждого потока общего вида существует изоморфный ему непрерывный поток[12], возможно даже непрерывно дифференцируемый или механический. В свете этой гипотезы в настоящей работе вместо интересующих нас более всего механических потоков рассматриваются потоки общего вида.

---

[11] Так как $N_t$, $N_t''$, $N_{t,s}$ зависят от $t$, $s$, которые пробегают несчетное множество действительных чисел, то данные исключительные множества мы не можем объединить в одно общее множество меры 0.

[12] Автор надеется в скором времени дать доказательство этого факта[5].

2. Проблема механики, которая будет исследоваться с помощью метода Купмана, формулируется следующим образом: какие вероятности геометрического характера в фазовом пространстве сохраняются под действием механического движения описанного типа, т. е. какая мера сохраняется под действием $S_t$ для определенных подмножеств из $\Omega$? Рассмотрим некоторые примеры[13].

a) Пусть $\Lambda$ задано; $Z(\Lambda, P, t, s) = \mu$ ($\tau$-множество тех моментов времени, для которых $S_\tau P \in \Lambda$, $t \leqslant \tau < s$). Верно ли, что $Z(\Lambda, P, t, s)/(s-t) \to \mu(\Lambda)/\mu(\Omega)$ при $s - t \to +\infty$ для любой точки $P$, за исключением некоторого множества меры 0?

b) Верно ли, что $Z(\Lambda, P, t, s)/(s-t) \to \mu(\Lambda)/\mu(\Omega)$ при $s-t \to +\infty$ хотя бы в смысле сходимости в среднем функций на $\Omega$[14] ?

c) Пусть $\Lambda$, $M$ даны: $Z'(\Lambda, M, t, s) = \int_t^s \mu(S_\tau\Lambda \cdot M)\,d\tau$. Верно ли, что $Z'(\Lambda, M, t, s)/(s-t) \to \mu(\Lambda)\,\mu(M)/\mu(\Omega)$ при $s-t \to +\infty$ ?

d) Верно ли, что даже $\mu(S_t\Lambda \cdot M) \to \mu(\Lambda)\,\mu(M)/\mu(\Omega)$ при $t \to \pm\infty$?

e) Верно ли хотя бы, что $\mu(S_t\Lambda \cdot M) \to \mu(\Lambda)\,\mu(M)/\mu(\Omega)$ при $t \to \pm\infty$, если исключить фиксированное подмножество оси $t$ плотности 0[15] ?

Предложения a)—c) являются различными вариантами так называемой квазиэргодической гипотезы[16], следующими в порядке ослабления: из a) очевидно следует b), из b), как мы увидим, вытекает c). Для физических приложений квазиэргодической гипотезы [17], как показывает ближайшее рассмотрение, b) является необходимым и достаточным, d), e) являются следствиями c) и также следствиями квазиэргодической гипотезы (для вариантов a), b), очевидно, это не так). Кроме того, e) следует из d). Смысл квазиэргодической гипотезы состоит в следующем: каждое подмножество $\Lambda \subset \Omega$ под действием потока $S_t$ равномерно «растекается» по всему $\Omega$, так что проникает при больших $t$ в каждое $M$. Точнее, $\mu(S_t\Lambda \cdot M)/\mu(\Lambda) \to \mu(M)/\mu(\Omega)$, т. е. относительная доля $M$, занимаемая образом $\Lambda$, стремится к относительной доле $M$ в $\Omega$, или вероятность того, что точка $P$, находившаяся в момент времени $\tau = 0$ в $\Lambda$, попадает в момент $\tau = t$ в $M$ ($\mu(S_t\Lambda \cdot M)/\mu(\Omega)$, $P$ движется под действием потока $S_\tau$!), стремится к вероятности того, что две независимые точки $P$, $Q$ лежат одна в $\Lambda$, а другая в $M$ ($\mu(\Lambda)\,\mu(M)/\mu(\Omega)^2$), т. е. положение точки $S_tP$ становится при больших $t$ почти независимым от $P$.

---

[13] Под $\Lambda$, $M$ будем понимать измеримые подмножества $\Omega$, имеющие конечную меру; $S_t\Lambda$ — образ $\Lambda$ под действием $S_t$; $\Lambda \cdot M$ — пересечение $\Lambda$ и $M$.

[14] То есть $\int_\Omega (Z(\Lambda, P, t, s)/(s-t) - \mu(\Lambda)/\mu(\Omega))^2\,dv_P \to 0$ при $s-t \to +\infty$. Под $\int_\Omega \ldots dv_P$ мы понимаем интеграл, построенный по нашей мере $\mu$. Естественно, что это предположение касается и меры.

[15] Плотность 0 означает $\frac{1}{2t}\,|\tilde{\mu}$ ($\tau$-множества $\tau$, лежащих в $I$, $-t \leqq \tau \leqq t$)$| \to 0$ при $t \to +\infty$. В интересующих нас случаях в качестве $I$ можно взять объединение бесконечной последовательности интервалов.

[16] Та же самая гипотеза в физической литературе, несмотря на ее важность, сформулирована математически неточно. См. по этому поводу [2, с. 70; 3, с. 263].

[17] Это есть сведение кинетической теории газов к статистической механике Максвелла—Больцмана и соответственно к гиббсовскому «микроканоническому ансамблю» (см. примеч. 16).

С помощью метода Купмана можно найти необходимые и достаточные условия для выполнения b), c) (они аналогичны), а также для e) и d)[18].

Естественно поставить вопрос, почему мы в a)—e) рассматривали все измеримые множества $\Lambda$, $M$, а не только такие, которые возникают при попытке ответить на вопросы, имеющие конкретный физический смысл, т. е. те множества, которым рассматриваемая точка $P$, учитывая ограниченную точность измерений, принадлежит с большой вероятностью. Или, может быть, имеет смысл рассматривать замкнутые или открытые $\Lambda$ или вообще только параллелепипеды? Для этого существуют две причины.

$\alpha$) Вопреки общему мнению для каждого измеримого множества $\Lambda$ вопрос о принадлежности к нему точки $P$ в указанном выше «физическом» смысле может быть решен.

$\beta$) Если какое-либо из свойств a)—e) выполняется для всех параллелепипедов, то оно выполняется и для всех измеримых множеств $\Lambda$, имеющих конечную меру. К доказательству этих утверждений мы еще вернемся.

Указанные причины являются дальнейшим подтверждением того, что важнейшие физические свойства инвариантны относительно изоморфизма (не принимая во внимание вопросы непрерывности!).

3. Основная идея метода Купмана такова: измеримые (комплекснозначные) функции $f(P)$ на $\Omega$, для которых $\int_\Omega |f(P)|^2 dv_P$ конечен, образуют гильбертово пространство $\mathfrak{B}$, если скалярное произведение $(f, g)$ определить как $\int_\Omega f(P)\overline{g(P)}dv_P$ (таким образом, норма функции $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ равна $\sqrt{\int_\Omega |f(P)|^2 dv_P}$)[19]. Оператор $U_t: f(P) \to f(S_tP) = U_t f(P)$ является линейным и из-за $D_2'$ (сохранения меры под действием $S_t$) унитарным[20]. Из равенства $S_tS_s \cong S_{t+s}$ вытекает, что $U_tU_s = U_{t+s}$. А из последнего требования в $D_2$ (присутствующего и в $D_2'$) следует (см. § III, п. 2), что $(U_tf, g) = \int_\Omega f(S_tP)\overline{g(P)}\, dv_P$ является измеримой функцией от $t$. Таким образом, имеем:

$D_4$. Операторы $U_t$ являются унитарными и образуют однопараметрическую группу: $U_tU_s = U_{t+s}$. Оператор $U_t$ измеримо зависит от $t$, т. е. для любых измеримых $f$ и $g$ $(U_tf, g)$ является измеримой функцией $t$[21].

Если $U_t$ непрерывно зависит от $t$, то применима теорема Стоуна[22], согласно которой существуют[23] инфинитезимальный оператор $A$ и разложение единицы

---

[18] См. примеч. 2. Сразу после этой работы Дж. Биркгоф [6] другим методом доказал, что при тех же условиях имеет место даже a).

[19] См. [7, 8]. К упомянутому выше см. [7, с. 108—111, раздел I], где используется теорема Риса—Фишера.

[20] Имеем $\int_\Omega |f(P)|^2 dv_P = \int_\Omega |f(S_tP)|^2 dv_P$, т. е. $\|f\| = \|U_tf\|$.

[21] См. [9].

[22] См. [10].

[23] См. [7, с. 72, 91, 92].

$E(\lambda)$, такие, что

$$(U_t f, g) = \int e^{it\lambda} d(E(\lambda) f, g)$$

(интеграл Стилтьеса!), или символически

$$U_t = e^{it\lambda} dE(\lambda) = e^{itA}.$$

Как показал автор, непрерывность не является необходимой, достаточно потребовать в $D_4$ измеримость по $t$: отсюда вытекает непрерывность и тем самым применимость теоремы Стоуна (см. теоремы 1, 2).

Предложения b)—e) могут быть сформулированы с помощью $U_t$, и их дальнейшее обсуждение будет проводиться на основе представления Стоуна $U_t : U_t = e^{itA}$ (см. примеч. 2 и 3, а также последующий текст настоящей статьи). В предшествующих исследованиях использовались исключительно те свойства $U_t$, которые сформулированы в $D_4$, и только в d) привлекалось еще одно тонкое свойство $E(\lambda)$-спектра[24]. Однако можно ожидать, что для более глубоких проблем должно сыграть роль специфическое представление $U_t$ (а именно $U_t f(P) = f(S_t P)$). Имеется в виду следующее, не упоминавшееся в $D_4$ свойство $U_t$, которое было указано Купманом (см. примеч. 1):

$D_5$. $$U_t f \cdot U_t g = U_t (f \cdot g),$$

где функции $f$, $g$, $f \cdot g$ принадлежат гильбертову пространству (доказательство очевидно). Из этого свойства вытекает, что не любое семейство $E(\lambda)$ и не произвольный оператор $A$ могут возникать в задаче изучаемого нами типа. В частности, это налагает ограничение на структуру спектра $E(\lambda)$.

Следующее обстоятельство, заслуживающее внимания, таково. Пусть $\Omega'$, $\Omega''$ в смысле $D_4$ допускают изоморфизм $\Sigma$ и $S_t$, $S_t'' = \Sigma S_t' \Sigma^{-1}$ — изоморфные потоки. Тогда для соответствующих семейств операторов $U_t$, $U_t''$ возникает аналогичное соотношение $U_t'' = V U_t' V^{-1}$, где унитарный оператор $V$ определяется при помощи равенства $f(P') \to f(\Sigma^{-1} P'') = V f(P'')$. Отсюда вытекает ($V$ является изоморфизмом между рассматриваемыми гильбертовыми пространствами), что $E'(\lambda) = V E''(\lambda) V^{-1}$, $A' = V A'' V^{-1}$. Поэтому все спектральные свойства этих потоков совпадают, так как они инвариантны относительно изоморфизма. Для инвариантности спектральных свойств достаточно, чтобы существовало только соотношение $U_t'' = V U_t' V^{-1}$ с унитарным оператором $V$, и не требуется существования отображения $\Sigma$, порождающего указанным выше способом оператор $V$.

Все свойства, которые могут быть сформулированы в терминах $U_t$, мы будем называть унитарно-инвариантными. Таким образом, b)—e) унитарно-инвариантны, а a), напротив, инвариантно только относительно изоморфизма. Для того, чтобы утверждать, что метод Купмана действительно охватывает все вероятностные вопросы классической механики, мы должны знать, что все свойства, инвариантные относительно изоморфизма, являются также и унитарно-инвариантными [6]. Это означает, что всякий раз, когда заданы два пространства $\Omega'$, $\Omega''$, в ко-

---

[24] А именно так называемые типы Хеллингера непрерывного спектра. См. [3]. О типах Хеллингера см. [11; 12, с. 161].

торых действуют $S_t$, $S''_t$ (согласно $D_1$, $D'_2$), и для соответствующих $U'_t$, $U''_t$ выполняется равенство $U''_t = VU'_tV^{-1}$, где $V$ — унитарный оператор, существует взаимно однозначное сохраняющее меру отображение $\Sigma$ из $\Omega'$ на $\Omega''$, для которого $S''_t = \Sigma S'_t \Sigma^{-1}$ [25].

4. Построение настоящей статьи следующее. В § I мы обсуждаем, каким образом принадлежность к некоторому измеримому подмножеству $\Lambda$ из $\Omega$ физически определима. В § II мы обсудим оправданностьусловий квазиэргодической гипотезы и покажем, как любой общий поток может быть представлен в виде семейства таких потоков, каждый из которых удовлетворяет квазиэргодической гипотезе, или, короче говоря, эргодичен[26]. В последующих параграфах вследствие этого будем рассматривать только эргодические потоки. Параграф III посвящен рассмотрению характеристических свойств $U_t$-семейств Купмана, и, в частности, будет показано, что свойство $D_5$ является характеристическим. В § IV для случая, когда $U_t$ имеет «чисто точечный спектр», будут указаны те спектры, которые могут иметь купмановские семейства $U_t$[27]. Далее будет показано, что в этом случае спектр определяет $U_t$ с точностью до изоморфизма ($\Sigma$, см. п. 3), так что в этом случае выполняется предположение, высказанное в конце п. 3.

Параграф V посвящен исследованию случая непрерывного спектра. Здесь сформулированы аналогичные теоремы, однако доказаны пока что более слабые утверждения. Подчеркнем, что как раз случай чисто непрерывного спектра является наиболее интересным. Так как, с одной стороны, эргодичность имеет место тогда и только тогда (как сказано в п. 3, эта теорема доказана в [3]), когда соответствующие потоки не обладают свойствами, сохраняющимися в течение длительного времени (см. по этому поводу § V), и, с другой стороны, предполагается, что потоки, не имеющие чисто непрерывного спектра, являются редко встречающимися исключениями. Последнее предположение будет подтверждено в § VI при рассмотрении одного широкого класса двумерных потоков, почти все представители которого имеют чисто непрерывный спектр.

В заключение укажем еще на одну интересную аналогию, существующую между операторами Купмана $U_t = e^{itA}$ и операторами, рассматривающимися в квантовой механике. Шредингеровская волновая функция $\varphi$ (определенная на пространстве состояний механической системы, а не как наша $f$ — на фазовом пространстве!) удовлетворяет, как известно, как функция временного параметра $t$ дифференциальному уравнению $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = H\varphi$. Здесь $h$—квант действия Планка; $H$ — оператор энергии. Отсюда вытекает равенство[28] $\varphi = \exp(it2\pi H/h)\varphi$, $t = 0$, так что унитарный оператор $\hat{U}_t = \exp(it2\pi H/h)$ играет здесь фундаментальную роль. Аналогия, возникающая при сопоставлении $A$ и $2\pi H/h$, порази-

---

[25] То есть для $W: f(P') \to f(\Sigma^{-1}P'') = Wf(P'')$ должно выполняться $U''_t = WU'_tW^{-1}$. При этом, конечно, не требуется, чтобы $W = V$.

[26] § I и основная часть § II уже опубликованы в [2][7].

[27] При этих же предположениях необходимость была доказана Купманом, см. примеч. 2. Новым является трудное доказательство их достаточности.

[28] Это, как известно, есть решение дифференциального уравнения Шредингера $\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \frac{2\pi i}{h}H\varphi$.

тельна [29], и нетрудно в качестве ее подтверждения построить непрерывный переход квантовой механики в классическую (при $h \to 0$). Несмотря на это, с математической точки зрения между данными семействами операторов имеет место существенное различие. Так, механическая система, заключенная в конечном объеме, обладает в квантовой механике чисто точечным спектром [30], в то время как в задачах классической механики, по-видимому, в типичных случаях имеет место чисто непрерывный спектр (см. § VI).

## I. ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА И ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Пусть $\Omega$ — пространство, удовлетворяющее $D_1$ и имеющее конечную меру: $\mu(\Omega) > 0, < +\infty$. Его точка $P$ соответствует состоянию некоторой механической системы ($\Omega$ является в этом случае фазовым пространством или чем-то подобным). Каждое свойство этой системы описывается при помощи подходящего подмножества $\Lambda$ пространства $\Omega$, а каждое состояние системы описывается при помощи изображающих точек $P$. Мы вводим $l$-меру $\mu(\Lambda)$ в $\Omega$ таким образом, что выполняется следующее свойство: произвольная точка $P$ принадлежит $\Lambda$ с априорной вероятностью $\mu(\Lambda)/\mu(\Omega)$. В том случае, когда мы знаем, что $P$ принадлежит данному множеству $M$, причем $\Lambda \subseteqq M \subseteqq \Omega$, соответствующая вероятность равна $\mu(\Lambda)/\mu(M)$. (Все рассматриваемые множества $\Lambda$, $M$, $N$, ... должны быть измеримыми.)

Физическое измерение всегда отвечает на вопрос: принадлежит $P$ заданному множеству $\Lambda$ или нет? Тот факт, что возможно проводить измерения только ограниченной точности и при этом точность можно как угодно повышать, лучше всего описать следующим образом.

Для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\Omega$ может быть представлено в виде конечного или счетного объединения измеримых множеств $N_1^{(n)}, N_2^{(n)}, \ldots$, все попарные пересечения которых являются множествами меры 0. При этом пусть $(n+1)$-е разбиение является подразбиением $n$-го, т. е. каждое множество $N_\nu^{(n)}$ является объединением некоторых $N_{\nu'}^{(n+1)}, N_{\nu''}^{(n+1)}, \ldots$ Далее, пусть $\delta_n$, равное максимальному диаметру $N_\nu^{(n)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) [31], при $n \to \infty$ стремится к нулю. При измерении $n$-й степени точности мы определяем, какому из множеств $N_1^{(n)}, N_2^{(n)}, \ldots$ принадлежит точка $P$ [32].

Таким образом, возможны измерения любой точности.

Пусть мы хотим определить, принадлежит ли $P$ некоторому заданному множеству $\Lambda$, и для этой цели провели измерение с $n$-й степенью точности. Тогда мы узнаем, какому из множеств $N_1^{(n)}, N_2^{(n)}, \ldots$ принадлежит $P$ и точна ли

[29] Точное рассуждение показывает, что она становится полной, если дифференциальное уравнение для волновой функции заменить на так называемый статистический оператор (см., например, [13]). Он строится аналогичным образом, и сказанное ниже выполняется также и для него.

[30] См., например, [14], где это ясно сформулировано.

[31] Диаметр $\Lambda$ есть максимум из всех $\overline{x, y}$, где $x$ и $y$ принадлежат $\Lambda$.

[32] Чтобы учесть хорошо известные свойства реальных измерений, мы можем эти решения принимать с определенными вероятностями (которые стремятся к 1 и соответственно к 0). Однако это не меняет конечного результата.

априорная вероятность того, что $P \in N_\nu^{(n)}$, равная $\mu(N_\nu^{(n)})/\mu(\Omega)$. Если в результате окажется, что $P \in N_\nu^{(n)}$, то это означает, что из принадлежности $\Lambda$ вытекает также и принадлежность $\Lambda \cdot N_\nu^{(n)}$, так как $\Lambda \cdot N_\nu^{(n)} \subseteqq N_\nu^{(n)} \subseteqq \Omega$. Вероятность принадлежности $\Lambda$ становится при этом равной $\mu(\Lambda \cdot N_\nu^{(n)})/\mu(N_\nu^{(n)})$. Пусть теперь задано некоторое $\varepsilon > 0$.

Если $\mu(\Lambda \cdot N_\nu^{(n)})/\mu(N_\nu^{(n)}) > 1-\varepsilon$ или $< \varepsilon$, то мы можем на вопрос, принадлежит ли $P$ множеству $\Lambda$, ответить «да» (соответственно «нет») с вероятностью того, что ответ является правильным, превосходящей $1-\varepsilon$. Однако остается упомянутая выше возможность, когда вероятность $\Lambda$ заключена между $\varepsilon$ и $1-\varepsilon$, т. е. ответ с такой точностью дать нельзя. Обозначим множество тех $\nu$, для которых наша дробь или больше $1-\varepsilon$, или меньше $\varepsilon$, через $z(n, \varepsilon)$. Тогда априорная вероятность того, что мы можем дать ответ на основании результата измерения, вероятность правильности которого больше $1-\varepsilon$, равна

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \sum_{\nu \in z(n,\varepsilon)} \mu(N_\nu^{(n)}) = w(n, \varepsilon).$$

Если теперь задано $\delta > 0$ и для достаточно большого $n$ справедливо неравенство $w(n, \varepsilon) > 1-\delta$, то мы можем сказать, что измерение является достаточно точным, если при условии того, что априорная вероятность больше $1-\delta$, можно на вопрос о принадлежности $P$ к $\Lambda$ правильно ответить на основании результата измерения с вероятностью, превышающей $1-\varepsilon$.

Если при этом для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$, такое, что указанное выше свойство выполняется для всех $n \geqq n_0$, то можно сказать, что на вопрос о принадлежности $P$ к $\Lambda$ путем измерения можно правильно ответить с произвольной степенью достоверности. Мы покажем, что это математическое требование на самом деле выполняется

2. Предположим, что это не так. Тогда если заданы два числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, то для бесконечно многих $n$ выполняется неравенство $w(n, \varepsilon) \leqq 1-\delta$, например для $n = n_1, n_2, \ldots (n_1 < n_2 < \ldots)$. Обозначим множество $\Omega - \sum_{\nu \in z(n_\rho, \varepsilon)} N_\nu^{(n_\rho)}$ через $M_\rho$. Согласно предположению $\mu(M_\rho) \geqq \delta\mu(\Omega)$, при этом все $M_\rho \subseteqq \Omega$, $\mu(\Omega)$ конечна. По известной теореме Арцела [33] для множества $\overline{M}$ всех таких точек $P$, которые принадлежат конечному числу множеств $M_\rho$, также имеет место неравенство $\mu(\overline{M}) \geqq \delta\mu(\Omega)$. Некоторая точка $P \in \overline{M}$ принадлежит множествам $M_\rho$ при бесконечно многих $\rho$. При этом $P$ принадлежит некоторому $N_\nu^{(n_\rho)}$, но $P \notin N_\nu^{(n_\rho)}$, где $\nu$ — элемент множества $z(n_\rho, \varepsilon)$. Таким образом, существует $P \in N_\nu^{(n_\rho)}$, где $\nu \notin z(n_\rho, \varepsilon)$. Следовательно, $P \in N_\nu^{(n)}$ для бесконечно многих $n$, $\nu$ не принадлежит множеству $z(n, \varepsilon)$ и при этом имеет место неравенство

$$\varepsilon \leqslant \mu(\Lambda \cdot N_\nu^{(n)})/\mu(N_\nu^{(n)}) \leqslant 1-\varepsilon.$$

Если мы обозначим то единственное значение $\nu$, при котором $P \in N_\nu^{(n)}$, через

[33] См., например, [15][8].

$\nu(n, P)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu(\Lambda\cdot N^{(n)}_{\nu(n,P)})}{\mu(N^{(n)}_{\nu(n,P)})}$ не может иметь другого значения, кроме 0 или 1. Кроме того, этот предел может существовать не всюду, а вне некоторого множества меры нуль.

Однако по теореме Лебега он существует всюду в $\Lambda$ с точностью до множества меры 0 и равен 1[34]. Если же мы применим ту же самую теорему к $\Omega - A$, то получим, что предел существует всюду в $\Omega - A$ с точностью до множества меры 0 и равен 0. Это доказывается при помощи приведения к противоречию с предыдущим утверждением.

3. В известном смысле, мы можем судить о нашей точке зрения — введении меры в $\Omega$ и рассмотрении всех вероятностей, которые действительно возникают при физических измерениях с ее помощью.

Следует отметить, что основным является вопрос о том, принадлежит или не принадлежит точка, изображающая состояние системы, некоторому измеримому множеству. Особенно важно, что множества меры 0 не принимаются во внимание, так что свойства, которые определяются такими множествами, должны рассматриваться как ненаблюдаемые.

То, что непрерывность не играет при этом никакой роли, можно усмотреть из того, что при нашей точке зрения вовсе не бывает не непрерывных функций: согласно одной теореме Лузина для каждой измеримой функции и любого $\delta > 0$ существует множество меры, не превосходящей $\delta$, вне которого функция равномерно непрерывна[35].

## II. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПОТОКИ

1. Пусть $\Omega$ — пространство, удовлетворяющее $D_1$; $S_t$ — поток общего вида на нем ($D_2$); $U_t$ — семейство операторов Купмана $U_t = e^{itA}$; $A$ — инфинитезимальный оператор; $E(\lambda)$ — его разложение единицы (см. введение, п. 3).

Так как $U_t$ — унитарный оператор, имеем согласно неравенству Шварца

$$|(U_t f, g)| \leqq \|U_t f\|\,\|g\| = \|f\|\,\|g\|$$

---

[34] Доказательство, дающее требуемый результат, фактически при столь же общих условиях было найдено Каратеодори [5, с. 492—497, теорема 3]. Там использовалась следующая функция [9]:

$$f(P) = \begin{cases} 1 & \text{при } P \in \Lambda, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство основано на «теореме о покрытии Витали» (см. [5, с. 299 — 307]). Вместо использующегося там $\sigma_n(P)$ надо подставить $N^{(n)}_{\nu(n,P)}$. Так как в $\Omega$ параллелепипеды не определены, то предположения этой работы, касающиеся связи $\sigma_n(P)$ с параллелепипедами, в нашем случае не нужны. Доказательство применимо также, если два множества $N^{(n)}_{\nu(n,P)}$ ($n$, $P$ — переменные) не пересекаются или одно содержит другое. Ситуация оказывается в нашем случае даже более приятной, так как рассмотрение трех возможностей для $\sigma_n(P)$, которое проводится в [5, с. 301 и далее], оказывается излишним.

[35] См. [16, 17]. Приведенное там доказательство для обычной меры Лебега годится для любой $l$-меры.



John von Neumann.

и также

$$\left| \frac{1}{s-t} \int_t^s (U_\tau f, g)\, d\tau \right| \leqslant \| f \| \| g \|.$$

Поэтому можно определить оператор $X_{t,s}$ следующим образом[36]:

$$(X_{t,s}f, g) = \frac{1}{s-t} \int_t^s (U_\tau f, g)\, d\tau, \qquad t < s.$$

Для каждого измеримого множества конечной меры мы можем рассмотреть функцию

$$\chi_\Lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \in \Lambda, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

принадлежащую гильбертову пространству. Затем имеем, с одной стороны,

$$(X_{t,s}\chi_\Lambda, \chi_M) = \int_M X_{t,s}\chi_\Lambda\,(P)\, dv_P$$

и, с другой —

$$(X_{t,s}\chi_\Lambda, \chi_M) = \frac{1}{s-t} \int_t^s (U_\tau \chi_\Lambda, \chi_M)\, d\tau = \frac{1}{s-t} \int_t^s \left( \int_M \chi_{S_{-\tau}\Lambda}\,(P)\, dv_P \right) d\tau.$$

Далее по теореме Фубини (см. примеч. 9) последнее выражение равно

$$\frac{1}{s-t} \int_M \left( \int_t^s \chi_{S_{-\tau}\Lambda}\,(P)\, d\tau \right) dv_P = \frac{1}{s-t} \int_M \Xi\,(\Lambda, P, t, s)\, dv_P.$$

Так как это выполняется для всех $M$, то

$$X_{t,s}\chi_\Lambda\,(P) = \frac{1}{s-t}\, \Xi\,(\Lambda, P, t, s)\text{[37]}.$$

Мы вычислим только $\| X_{t,s}f \|$. Имеем

$$\| X_{t,s}f \|^2 = \| (X_{t,s}f, X_{t,s}f) \| = \frac{1}{s-t} \int_t^s (U_\tau f, X_{t,s}f)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(s-t)^2} \int_t^s \int_t^s (U_\tau f, U_\sigma f)\, d\tau d\sigma = \text{[38]}$$

---

[36] См. [2, с. 72] или аналогичное доказательство в [7, с. 112 наверху]. Используемые нами обозначения также следуют [7].

[37] Собственно говоря, это равенство должно выполняться с точностью до $P$-множества меры 0, но $X_{t,s}\chi_\Lambda$, как элемент гильбертова пространства, и без того так определяется.

[38] Из-за $U_\sigma^* U_\tau = U_\sigma^{-1} U_\tau = U_{\tau-\sigma}$.

$$= \frac{1}{(s-t)^2} \int_t^s \int_t^s (U_{\tau-\sigma} f, f)\, d\tau d\sigma =$$ [39]

$$= \frac{1}{(s-t)^2} \int_{-(s-t)}^{(s-t)} \int_{t-|x|}^{s+|x|} (U_x f, f) \frac{dxdy}{2} =$$

$$= \frac{1}{(s-t)^2} \int_{-(s-t)}^{(s-t)} (s-t-|x|)(U_x f, f)\, dx.$$

Теперь мы согласно п. 3 введения подставим $E(\lambda)$ вместо $U_x$. Отметим, что из-за абсолютной сходимости всех рассматриваемых интегралов допустимо изменение порядка интегрирования. Получаем

$$\frac{1}{(s-t)^2} \int_{-(s-t)}^{(s-t)} (s-t-|x|)(U_x f, f)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(s-t)^2} \int_{-(s-t)}^{(s-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (s-t-|x|)\, e^{i\lambda x} dx d(E(\lambda) f, f) =$$

$$= \frac{1}{(s-t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-(s-t)}^{(s-t)} (s-t-|x|)\, e^{i\lambda x} dx \right) d(E(\lambda), f, f) =$$

$$= \frac{2}{(s-t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{s-t} (s-t-x) \cos(\lambda x)\, dx \right) d(E(\lambda) f, f) =$$

$$= \frac{2}{(s-t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(s-t)\lambda}{\lambda^2}\, d(E(\lambda) f, f) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin[\lambda(s-t)/2]}{\lambda(s-t)/2} \right)^2 d(E(\lambda) f, f).$$

Подынтегральная функция неотрицательна, а выражение, стоящее под знаком дифференциала, является монотонно неубывающей функцией. Мы можем оценить полученный интеграл сверху, представив его в виде $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$. Оценим сверху подынтегральные функции выражениями соответственно $[\varepsilon(s-t)/2]^{-2}$ и 1 и заменим первую область интегрирования через $\int_{-\infty}^{\infty}$,

[39] Делается подстановка $\sigma - \tau = x$, $\sigma + \tau = y$.

$$\| X_{t,s}f \|^2 \leqslant \frac{4}{(s-t)^2 \varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\varepsilon} d(E(\lambda) f, f) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d(E(\lambda) f, f) =$$

$$= \frac{4}{(s-t)^2 \varepsilon^2} (f, f) + ((E(+\varepsilon) - E(-\varepsilon)) f, f).$$

Таким образом, $\limsup_{s-t\to\infty} \| X_{t,s}f \|^2 \leqslant ((E(+\varepsilon) - E(-\varepsilon)) f, f)$. Если при $\varepsilon \to 0$ и $(E(+\varepsilon) - E(-\varepsilon)) f \to 0$, то $\lim_{s-t\to\infty} \| X_{t,s}f \|^2 = 0$, т. е. $X_{t,s}f \to 0$ при $s-t \to +\infty$[40].

Так как проектор является неубывающей функцией $\varepsilon$, то при $\varepsilon \to 0$ оператор $E(+\varepsilon) - E(-\varepsilon)$ имеет предел $E_0$[41]. Легко видеть также, что из $E_0 f = f$ при $s-t \to +\infty$ вытекает $X_{t,s}f \to 0$. Если, наоборот, $E_0 f = f$, то из $E(+\varepsilon) - E(-\varepsilon) \geqslant E_0$ следует $E(+\varepsilon) f = f$, $E(-\varepsilon) f = 0$, т. е.

$$E(\lambda) f = \begin{cases} f & \text{при } \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

Далее, для всех $g$ имеем

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (E(\lambda) f, g) = (f, g),$$

т. е. $U_t f = f$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие собственных векторов проектора $E_0$. Тогда при $f \in \mathfrak{M}$ имеем $E_0 f = f$, $U_t f = f$ и $X_{t,s}f = f$. Для $f$, ортогональных $\mathfrak{M}$, имеем $E_0 f = 0$ и $X_{t,s}f \to 0$ $(s-t \to +\infty)$. Таким образом, в обоих случаях получаем $X_{t,s}f \to E_0 f$ $(s-t \to +\infty)$. Это верно для всех $f$, так как для любой $f$ имеет место равенство $f = f_1 + f_2$, где $f_1$ принадлежит $\mathfrak{M}$, а $f_2$ ортогональна $\mathfrak{M}$. Далее, $X_{t,s} \to E_0$ при $s-t \to +\infty$ в смысле сильной сходимости операторов[42].

Из равенства $E_0 f = f$ вытекает, что $U_t f = f$ при всех $t$, и в силу $U_t f = f$, $X_{t,s}f = f$ и $E_0 f = f$ мы можем $\mathfrak{M}$ определить таким образом: это есть множество всех $f$, для которых $U_t f = f$.

2. Условия b), c) из п. 2 введения могут быть теперь сформулированы следующим образом: $X_{t,s}\chi_\Lambda \to (\chi_\Lambda, \varphi_0)\varphi_0$ и соответственно $(X_{t,s}\chi_\Lambda, \chi_M) \to (\chi_\Lambda, \varphi_0)(\varphi_0, \chi_M)$ $(s-t \to +\infty)$, где $\varphi_0 = \varphi_0(P) = \mathrm{const}$, а именно равна $[\mu(\Omega)]^{-1/2}$, когда $\mu(\Omega)$ конечна, и равна 0, когда эта мера бесконечна (т. е. $\| \varphi_0 \| = 1$, соответственно $\varphi_0 = 0$). Можно также сказать, что $X_{t,s}f \to P_{[\varphi_0]}f$ и соответственно $(X_{t,s}f, g) \to (P_{[\varphi_0]}f, g)$, если $f, g$ представимы в виде $\chi_\Lambda$. Далее, это равенство выполняется для линейных комбинаций характеристических функций $\chi_\Lambda$, для их предельных точек[43] и тем самым для всех $f$[44]. Поэтому условия b) и c) могут

[40] Под $\to 0$ понимается сильная сходимость в гильбертовом пространстве, т. е. $\| \ldots \| \to 0$ (см. [8, с. 378]).

[41] См. здесь и далее [7, с. 74—78, где развита теория проекторов; в особенности теорему 19 и с. 91].

[42] См. [8, с. 381—384].

[43] В силу $|(X_{t,s}f, g)| \leqq \| f \| \| g \|$ все $X_{t,s}$ равномерно ограничены (см. [7, с. 73, теорема 12]).

[44] См. [7, с. 109—111].

быть сформулированы так, что данное равенство выполняется для всех $f$, $g$, т. е. $X_{t,s}$ в смысле сильной (соответственно слабой) сходимости операторов (см. примеч. 42) стремится к $P_{[\varphi_0]}$. Впрочем, это выполняется и в том случае, когда b) (соответственно c)) имеет место не для всех измеримых множеств $\Lambda$, $M$, имеющих конечную меру, а для таких (например, для конечных сумм шаров или параллелепипедов), которыми подобные множества могут быть аппроксимированы (см. примеч. 44). В силу аддитивности достаточно, чтобы это свойство выполнялось только для самих параллелепипедов.

С другой стороны, имеет место сильная сходимость $X_{t,s} \to E_0$. Поэтому b), c) можно сформулировать так: $E_0 = P_{[\varphi_0]}$, или если $\mathfrak{M}$ относится к $E_0$, то $\mathfrak{M} = [\varphi_0]$. Или: общее решение уравнения $U_t f = f$ имеет вид $c\varphi_0$, т. е. является константой[45].

Утверждение о том, что $f(P)$ является решением одновременно всех уравнений $U_t f = f$, означает следующее: для всех $t$ с точностью до множества меры нуль выполняется равенство $f(S_t P) = f(P)$. Эта функция $f$ является «интегралом» потока. Интегралы с суммируемым квадратом, т. е. принадлежащие гильбертову пространству, мы будем называть $H$-интегралами. Покажем, что имеет место

Теорема 1. *Условия b) и c) из п. 2 введения эквивалентны и не зависят от того, сформулированы ли они для всех измеримых $\Lambda$, $M$, имеющих конечную меру, или только для параллелепипедов, или для конечных сумм шаров и т. д. Для того чтобы эти условия были справедливы, т. е. для эргодичности потока, необходимо и достаточно, чтобы его $H$-интегралами были только константы.*

Тем самым эргодическая гипотеза для классической механики доказана (ср. примеч. 3 и 18). Для эргодических $\Omega$ полезно различать случаи, когда $\mu(\Omega)$ конечна и бесконечна, т. е. предел $z(\Lambda, P, t, s)$ не равен нулю или тождественно равен нулю. Мы будем называть при этом $\Omega$ собственно эргодическим или соответственно нуль-эргодическим.

3. Для произвольных, в том числе неэргодических, потоков мы можем так написать последнюю формулу из п. 1, чтобы предел $\lim\limits_{s-t\to\infty} \frac{1}{s-t} z(\Lambda, P, t, s)$ непосредственно мог быть вычислен. Это делается так же, как в работе [2, с. 75—77]. Мы предпочтем избрать не совсем прямой способ, который использует рассмотренное в п. 4 введения представление эргодических потоков.

Измеримое множество $\Lambda$ конечной меры, которое совпадает с каждым $S_t\Lambda$ с точностью до множества меры 0 (которое, разумеется, зависит от $t$), назовем $\Lambda$-множеством. Оно может быть также охарактеризовано следующим образом:

$$\chi_\Lambda(P) = \begin{cases} 1 & \text{при } P \in \Lambda, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

причем $\chi_\Lambda$ является $H$-интегралом, т. е. принадлежит $\mathfrak{M}$. Обратно, пусть $f$ —

---

[45] Для того чтобы константа $a$ принадлежала гильбертову пространству, должен быть конечен интеграл $\int\limits_\Omega |a|^2 dv_P = |a|^2 \mu(\Omega)$; если $\mu(\Omega) = \infty$, то $a = 0$.

произвольный $H$-интеграл. Найдутся предельная функция (в смысле сильной сходимости) $g(P) = G(f(P))$, которая принимает только конечное число значений, и конечные линейные комбинации таких функций $h(P) = H(f(P))$, которые также принимают только значения 0 и 1 (ср. примеч. 44). Последние являются $\chi_\Lambda(P)$-функциями и $H$-интегралами, т. е. соответствующие $\Lambda$ являются $\Lambda$-множествами. Поэтому замкнутое многообразие, порожденное функциями $\chi_\Lambda$ всех $\Lambda$-множеств, совпадает с $\mathfrak{M}$. Аналогичное утверждение справедливо, если мы ограничимся рассмотрением всюду плотного подмножества в совокупности всех $\Lambda$-множеств, т. е. если существует последовательность $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, ..., являющаяся всюду плотной (ср. примеч. 44). Любое множество $\Lambda_n$ из этой последовательности мы можем сделать борелевским, изменив его на множестве меры нуль.

Операции $\Lambda + M$, $\Lambda \cdot M$, $\Lambda - M$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots$, где $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$, не выводят из кольца борелевских $\Lambda$-множеств. Далее можно дословно перенести на рассматриваемый случай утверждение, использованное автором в другой работе [46]. Тогда получим.

*Пусть $A$ — интервал $0 \leqq x < 1$, $A' = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$ — всюду плотное в нем счетное множество. Каждому $x$ из $A'$ сопоставляется борелевское $\Lambda$-множество $\Lambda(x)$ так, что:*

*$\alpha$) каждое $A_n$ получается при помощи теоретико-множественных операций $\Lambda + M$, $\Lambda \cdot M$, $\Lambda - M$ из некоторых $\Lambda(x)$;*

*$\beta$) из $x \leqq y$ (в $A'$) вытекает $\Lambda(x) \subseteq \Lambda(y)$* [47];

*$\gamma$) из $x_1 > x_2 > \ldots > x$, $x_n \to x$ при $n \to \infty$ (все рассматривается в $A'$) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda(x_n) = \Lambda(x_1)\Lambda(x_2) \ldots = \Lambda(x)$* (см. примеч. 47).

Пусть, далее, $K_1$, $K_2$, ... — определяющая система окрестностей (см. примеч. 44). Построим таким образом шар. Каждому $\xi$ из $A'$ сопоставляется борелевское множество $K_\xi$, так что одновременно выполняются условия $\alpha$) — $\gamma$) и в $\alpha$) при помощи соответствующих операций получаются множества $\Omega$, $K_1$, $K_2$, ...

Мы будем суммы и пересечения множеств обозначать соответственно через $\Sigma$ и $\Pi$. Пусть

$$\sum_{x \in A} \Lambda(x) = \Omega_1, \qquad \Omega - \Omega_1 = \Omega_2.$$

Тогда каждое $\Lambda(x) \subseteq \Omega_1$. Это справедливо также для всех $\Lambda_n$ и, значит, для любого $\Lambda$-множества с точностью до множества меры 0. Каждое $\Lambda(x)$ инвариантно относительно всех $S_t$ с точностью до множества меры 0, следовательно, это верно для $\Omega_1$, $\Omega_2$. Если $\Omega_2$ имеет конечную меру, то оно имеет меру нуль, так как не пересекается с $\Omega_1$. Таким образом, $\mu(\Omega) = 0$ или $\infty$. В первом случае мы не прини

[46] См. [8, с. 401—403]. Вместо использующихся там операторов проектирования надо подставить $\Lambda$-множества. Аналогичным образом определяются операции «+», «·», «—». В частности, $E_1$, $E_2$, ... должны быть заменены на $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, ...; $G(\lambda)$ — на $\Lambda(x)$, $x = \lambda + 1$; $A'$ — какая-нибудь всюду плотная в $0 \leqq x < 1$ последовательность, которая содержит рассматриваемую там $\rho$ как рациональные числа.

[47] Следует отметить, что конструкция, указанная в примеч. 46, в точности соответствует отношениям между множествами $\subseteq$ и $=$, рассматриваемыми с точностью до множеств меры 0.

маем во внимание множество $\Omega_2$. Во втором случае $S_t$ является потоком общего вида на $\Omega_2$ и каждое $\Lambda$-множество на нем имеет меру 0 (так как оно не пересекается с $\Omega_1$). Если $f$ — некоторый $H$-интеграл на $\Omega_2$, то существует множество $\Lambda$, состоящее из всех таких точек $P$, что $|f(P)| > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и являющееся $\Lambda$-множеством, имеющим согласно предыдущему меру 0. Возьмем $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ Тогда получим, что $f(P) = 0$ с точностью до множества меры 0. Таким образом, $\Omega_2$ нуль-эргодично.

Определим теперь для каждой $P$ из $\Omega_1$ точку $[x, \xi]$ на квадрате $A \times A = \bar{A} = \{(x, \xi) : 0 \leqq x,\ \xi > 1\}$, $x = \underset{y \in \Lambda'}{\text{finis inf}}\,(P \in \Lambda(y))$, $\xi = \underset{\eta \in A}{\text{finis inf}}\,(P \in K(\eta))$.

Если $P$, $P'$ соответствуют $[x, \xi]$ и $[x', \xi']$, то из $\xi = \xi'$ вытекает $P = P'$. Тогда при помощи операций $\Lambda + M$, $\Lambda \cdot M$, $\Lambda - M$ из $K(\eta)$ получаются только множества вида $(K(\eta_2) - K(\eta_1)) + \ldots + (K(\eta_{2\nu}) - K(\eta_{2\nu-1}))$, $\eta_1 < \eta_2 < \ldots$ $\ldots < \eta_{2\nu-1} < \eta_{2\nu}$, и согласно условию $\beta$) критерием принадлежности $P$ к какому-то из этих множеств является принадлежность $\xi$ к некоторому множеству $K(\eta_{2\mu}) - K(\eta_{2\mu-1})$, $\mu = 1, \ldots, \nu$, т. е. $\eta_{2\nu-1} < \xi \leqq \eta_{2\nu}$. Так как $\xi = \xi'$, то $P, P'$ принадлежит одному и тому же множеству из рассматриваемой совокупности и тем самым одному и тому же $K_n$. Если $P \neq P'$, то найдется $K_n$, содержащее $P$ и не содержащее $P'$. Наше отображение $P \to [x, \xi]$ является взаимно однозначным, таким же свойством обладает его проекция на ось $\xi$. Образ $\Omega_1$ при этом есть $B$.

В пространстве-произведении $\Omega_1 \times \bar{A}$ множество точек $[P, x, \xi]$, для которых $[x, \xi]$ является образом $P$ и совпадает с

$$\prod_{k=2}^{\infty} \sum_{m,n=1}^{k-1} \bar{M}\,(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}, x_{m+1}^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}),$$

где $x_1^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ совпадают с упорядоченным набором чисел $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ (с $k$-первыми элементами из $\Lambda'$), а $\bar{M}(y, \eta; z\xi)$ — множество таких $[P, x, \xi]$, для которых либо $y < x \leqq z$, $\eta \leqslant \xi \leqq \zeta$ и $P$ принадлежит $(\Lambda(z) - \Lambda(y))(K(\zeta) - K(\eta))$, либо неравенства $y < x \leqq z$, $\eta < \xi \leqq \zeta$ не выполняются. Так как все $\bar{M}(y, \eta; z, \zeta)$ являются открытыми и борелевскими, то этими же свойствами обладает определенное выше множество. Если $M \subseteqq \Omega_1$ — борелевское то борелевским является множество всех $[P, x, \xi]$ с $P \in M$ и также сечение этого множества, т. е. множество таких $[P, x, \xi]$, $P \in M$, что $[x, \xi]$ является образом $P$. Его проекция на $[x, \xi]$-пространство $A \times A = \bar{A}$ является суслинским множеством [48], это есть образ $M$. Мы можем, в частности, положить $M = \Omega_1$, и тогда определенный при помощи соответствия $P \to [x, \xi]$ образ $\bar{B}$ множества $\Omega_1$, а также образ любого борелевского подмножества $\Omega_1$ являются суслинскими множествами.

Пусть $\bar{A}(y, \eta; z, \zeta)$ есть квадрат $y < x \leqq z$, $\eta < \xi \leqq \zeta$. Его прообраз (т. е. его часть, лежащая в $\bar{B}$) — измеримое множество

$$(\Lambda(z) - \Lambda(y))(K(\zeta) - K(\eta)),$$

мера которого

$$\mu[(\Lambda(z) - \Lambda(y))(K(\zeta) - K(\eta))] = \bar{\mu}(y, \eta; z, \zeta).$$

[48] См., например, [4, с. 212, теорема 4; 18].

Вследствие этого из

$$\bar{A}(y, \eta; z, \zeta)\cdot\bar{B} \subseteqq \sum_{1}^{\infty} n\bar{A}(y^{(n)}, \eta^{(n)}; z^{(n)}, \zeta^{(n)})\cdot\bar{B}$$

вытекает

$$\bar{\mu}(y, \eta; z, \zeta) \leqq \sum_{1}^{\infty} n\bar{\mu}(y^{(n)}, \eta^{(n)}; z^{(n)}, \zeta^{(n)}).$$

Аналогично из

$$\bar{A}(y, \eta; z, \zeta)\cdot\bar{B} \subseteqq \bar{A}(y', \eta'; z', \zeta')\cdot\bar{B}$$

следует

$$\bar{\mu}(y, \eta; z, \zeta) \leqq \mu(y', \eta'; z', \zeta'),$$

и при замене знака $=$ на $\subseteqq$ вытекает, что при подстановке в обе части $=$ заменяется на $\leqq$.

Далее, из

$$\bar{A}(y, \eta; z, \zeta) \subseteqq \sum_{1}^{\infty} n\bar{A}(y^{(n)}, \eta^{(n)}; z^{(n)}, \zeta^{(n)})$$

имеем

$$\bar{\mu}(y, \eta; z, \zeta) \leqq \sum_{1}^{\infty} n\bar{\mu}(y^{(n)}, \eta'^{(n)}; z^{(n)}, \zeta^{(n)}).$$

Окончательно $\bar{\mu}(y, \eta; z, \zeta)$ является полунепрерывной справа по всем четырем аргументам, так как этим свойством обладают $\Lambda(x)$ и $K(\xi)$.

Мы можем теперь для подмножеств $\bar{C}$ множества $\bar{A}$ ввести $\bar{\mu}^*(\bar{C})$, равное нижней границе всех $\sum_{1}^{\infty} n\bar{\mu}(y^{(n)}, \eta^{(n)}; z^{(n)}, \zeta^{(n)})$, для которых

$$\bar{C} \subseteqq \sum_{1}^{\infty} n\bar{A}(y^{(n)}, \eta^{(n)}; z^{(n)}, \zeta^{(n)}).$$

Из только что доказанного сразу же вытекает, что это есть $l$-мера на квадрате $\bar{A}$ (по отношению к обычной топологии на $\bar{A}$). Далее мы видим, что $\bar{C}$ и $\bar{C}\cdot\bar{B}$ имеют одну и ту же меру. Поскольку $\bar{B}$ является суслинским, оно также и измеримо[49], а из конечности $\mu^*(\bar{C})$ вытекает

$$\mu^*(\bar{C}\cdot(\bar{A}-\bar{B})) = \mu^*(\bar{C}-\bar{C}\cdot\bar{B}) = \mu^*(\bar{C}) - \mu^*(\bar{C}\cdot\bar{B}) = 0, \qquad \mu(\bar{C}\cdot(\bar{A}-\bar{B})) = 0.$$

Аналогично и само $\bar{A}-\bar{B}$ имеет меру 0.

При отображении $[x, \xi] \to P$ множество $\bar{B}$ взаимно однозначно отображается на $\Omega_1$. Если $\bar{C} = \bar{A}(y, \eta; z, \zeta)$, то прообраз $\bar{C}\cdot\bar{B}$ $(\Lambda(z) - \Lambda(y))\cdot(K(\zeta) - K(\eta))$ измерим и его $\mu$-мера равна $\bar{\mu}(y, \eta; z, \zeta)$, т. е. $\bar{\mu}(\bar{C}\cdot\bar{B})$. Аналогичное равенство

[49] Ср. [18]. Доказательство Лузина, проведенное для обычной меры Лебега, годится и для любой $l$-меры.

справедливо и в том случае, когда $\bar{C}$ является конечной суммой непересекающихся $A$ $(y, \eta; z, \zeta)$ или пределом последовательности расширяющихся множеств подобного типа, т. е. для любого открытого $\bar{C}$. Отсюда это утверждение с использованием предельного перехода для последовательности расширяющихся или сжимающихся множеств переносится на все борелевские множества $\bar{C}$. Если $\bar{C}$ имеет $\bar{\mu}$-меру 0, то оно является частью такого, тоже борелевского, множества $\bar{C}'$, что прообраз $\bar{C}'$, так же как и $\bar{C}$, имеет $\mu$-меру 0. Окончательно $\bar{C}$ является $\bar{\mu}$-измеримым, следовательно, оно есть сумма борелевского множества и множества $\bar{\mu}$-меры 0, и, так как предыдущее утверждение выполняется для обоих этих множеств, оно справедливо и для $\bar{C}$.

Для $\bar{C} \subseteqq \bar{B}$ мы, в частности, получаем: если $\bar{C}$ является $\bar{\mu}$-измеримым, то его образ при отображении $[x, \xi] \to P$ $\mu$-измерим и имеет ту же меру. Из теоремы 2 предыдущей статьи автора[1] вытекает, что отображения $[x, \xi] \to P$ и $P \to [x, \xi]$ являются сохраняющими меру

4. Мы хотим показать, что $\bar{\mu}$-мера на $\bar{A}$ (или $\bar{B}$) допускает интегральное представление.

Для всех $x$, $\xi$ из $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \xi \leqq 1$ (только не принадлежащих $\bar{A}$!) определим

$$\bar{\mu}(x, \xi) = \bar{\mu}(\bar{A}(0, 0; x, \xi)).$$

Если $x$, $\xi$ принадлежат $A'$, то имеем также

$$\bar{\mu}(x, \xi) = \bar{\mu}(0, 0; x, \xi) = \mu(\Lambda(x) \cdot K(\xi)).$$

Очевидно, что $\bar{\mu}(x, \xi)$ и $\bar{\mu}(x, \xi'') - \mu(x, \xi')$, $\xi' < \xi''$, монотонно не убывают и полунепрерывны справа по $x$. Если мы зафиксируем $\xi$, меняя при этом $x$ от 0 до 1, и будем рассматривать $u = \bar{\mu}(x, 1)$ как независимую переменную, то разности $\bar{\mu}(x, \xi)$ всегда лежат в интервале 0, 1. В частности, в «интервалах постоянства» $u = \bar{\mu}(x, 1)$ и $\bar{\mu}(x, \xi)$ является постоянной. Изменяющаяся от $\bar{\mu}(0, 1) = 0$ до $\bar{\mu}(1, 1) = \mu(\Omega_1)$ переменная $u$ проходит через точки $x$ разрыва $\bar{\mu}(x, 1)$, соответствующие «интервалам скачков» $\bar{\mu}(x - 0, 1) \leqq u < \bar{\mu}(x + 0, 1) = \bar{\mu}(x, 1)$, но в каждом таком интервале мы можем определить $\bar{\mu}(x, \xi)$ как линейную функцию и непрерывную по $u$ на его концах. Более того, применима теорема Лебега [50]: отношение

$$\rho(x, \xi) = \lim_{\substack{\varepsilon > 0, \delta > 0 \\ \varepsilon, \delta \to 0}} \frac{\bar{\mu}(x + \varepsilon, \xi) - \bar{\mu}(x - \delta, \xi)}{\bar{\mu}(x + \varepsilon, 1) - \bar{\mu}(x - \delta, 1)}$$

существует всюду, помимо такого $x$-множества, что соответствующее $u$-множество имеет нулевую обычную меру Лебега. Определенные выше «интервалы скачков» для $u$ мы можем не принимать во внимание, так как в соответствующих точках разрыва по $x$ существует указанный выше предел в силу того, что знаменатель

---

[50] См., например, [5, с. 545, 551].

не стремится к 0 и в $u$-интервале отношение имеет из-за линейности ту же самую величину. Если мы также для подмножества $X$ $x$-множества, $0 \leqq x \leqq 1$, введем меру [51]

$$\tilde{\mu}^{(0)}(X) = \int_X d\bar{\mu}(x.\ 1),$$

которая, очевидно, является $l$-мерой, то можно утверждать, что $\rho(x, \xi)$ существует для всех $x$, кроме множества $\tilde{\mu}^{(0)}$-меры 0.

Далее, положим $\bar{w}(x, \xi)$ равной интегралу от ее производной:

$$\bar{w}(x, \xi) = \int_0^x \rho(y, \xi)\, d_y\bar{w}(y, 1).$$

Пусть теперь $\xi$ меняется только в $A'$. При этом все $\rho(x, \xi)$ существуют одновременно с точностью до $x$-множества $Y_0$ меры 0. Дополнительное к $Y_0$ множество в $0 \leqq x \leqq 1$ мы обозначим $X_0$. Тогда при $\xi' \leqq \xi''$ $\rho(x, \xi'') - \rho(x, \xi')$, являющаяся производной от $\bar{w}(x, \xi'') - \bar{w}(x, \xi')$, неотрицательна и $\rho(x, \xi)$ по $\xi$ монотонно не убывает. Теперь мы определим для всех $\xi$

$$\rho_1(x, \xi) = \lim_{\substack{\eta \in A', \eta > \xi \\ \eta \to \xi}} \rho(x, \eta).$$

Функция $\rho_1(x, \xi)$ по $\xi$ — монотонно неубывающая и непрерывная справа. В таком случае $\bar{w}(x, \xi)$ полунепрерывна справа по $\xi$ и согласно приведенному выше интегральному представлению при помощи такого же предельного процесса получаем

$$\bar{w}(x, \xi) = \int_0^x \rho_1(y, \xi)\, d_y\bar{w}(y, 1).$$

Мы определим теперь для каждого значения параметра $x$ из $X_0$ и для каждого подмножества $\Xi$ множества $0 \leqq \xi \leqq 1$ меру $\tilde{\mu}_X(\Xi) = \int_\Xi d\xi \rho_1(x, \xi)$ (ср. с последней фразой примеч. 51), которая, очевидно, является $l$-мерой. При этом за основу взята обычная топология отрезка $0 \leqq \xi \leqq 1$. Если множество $\bar{C} \subseteqq \bar{A}$, то пусть $(\bar{C})_{(x)}$ есть множество всех $\xi$, таких, что $[x, \xi]$ принадлежит $\bar{C}$. Если $\bar{C}$ есть множество $\bar{A}(0, 0; x, \xi)$, то

$$\bar{\mu}(\bar{C}) = \bar{w}(x, \xi) = \int_0^x \rho_1(y, \xi)\, d_y\bar{w}(y, 1) = \int_0^x \left[\int_0^\xi d\eta \rho_1(y, \eta)\right] d_y\bar{w}(y, 1) =$$

---

[51] То есть внешнюю меру соответствующего $u$-множества. Если оно неизмеримо, $\int_X$ представляет собой «верхний интеграл Лебега».

$$= \int_0^1 \left[ \int\limits_{(\bar{C})_{(y)}} d\eta \rho_1 (y, \eta) \right] d_y \bar{\omega} (y, 1) = \int_0^1 \tilde{\mu} (y) ((\bar{C})_{(y)}) \, d_y \, \bar{\omega} (y, 1).$$

Нас интересует вопрос: для каких $\bar{C} \subseteq \bar{A}$ имеет место формула

$$\bar{\mu} (\bar{C}) = \int_0^1 \hat{\mu}_{(y)} ((\bar{C})_{(y)}) d_y \bar{\omega} (y, 1),$$

если при этом требовать, чтобы подынтегральное выражение всюду, кроме $y$-множества $\tilde{\mu}^{(0)}$-меры 0, имело смысл (не по мере $\tilde{\mu}^*_{(y)}$, а по $\hat{\mu}_{(y)}$, т. е. $(\bar{C})_{(y)}$ должно быть $\tilde{\mu}_{(y)}$-измеримым) и являлось $\tilde{\mu}^{(0)}$-измеримой функцией (т. е. интеграл имел смысл)? Это выполняется для множеств $\bar{C} = \bar{A} (0, 0; x, \xi)$, а также для их разностей $\bar{C} = \bar{A} (x, \xi; y, \eta)$ и для конечных сумм этих множеств и пределов последовательностей расширяющихся множеств этого типа, т. е. для всех открытых $\bar{C}$. Точно такое же рассмотрение, как в конце п. 3, позволяет перенести нашу формулу на борелевские $\bar{C}$, на $\bar{C}$ $\bar{\mu}$-меры 0 и, наконец, на все $\bar{\mu}$-измеримые $\bar{C}$.

В заключение установим еще следующее. Пусть $X$ — некоторое множество в $A$, $\bar{X}$ — множество всех $x, \xi]$, $x$ лежит в $X, 0 \leqq \xi < 1$ (в $\bar{A}$). Если $\bar{X}$ $\bar{\mu}$-измеримо, то наша формула дает следующее: $X$ $\tilde{\mu}^{(0)}$-измеримо, $\tilde{\mu}^{(0)} (X) = \bar{\mu} (\bar{X})$. Если, обратно, $X$ $\tilde{\mu}^{(0)}$-измеримо, то существуют два борелевских множества $X', X''$, $X' \subseteq X \subseteq X''$, $\tilde{\mu}^{(0)} (X'' - X') = 0$. Поэтому $\bar{X}', \bar{X}''$ также борелевские, измеримы и $\bar{\mu} (\bar{X}'' - \bar{X}') = 0$. В силу $\bar{X}' \subseteq \bar{X} \subseteq \bar{X}''$ $\bar{X}$ тоже измеримо и имеет такую же $\bar{\mu}$-меру, как $\bar{X}', \bar{X}''$, т. е. как $X', X''$, а следовательно, как $X$. Итак, $X, \bar{X}$ являются всегда одновременно измеримыми и имеют одинаковые меры $\hat{\mu}^{(0)}$ и $\hat{\mu}$. То, что $\bar{A} - \bar{B}$ имеет меру 0, доказывается так же, как в случае, когда мы ограничивали $\bar{X}$ на $\bar{B}$.

5. Перенесем теперь $\bar{B}$ при помощи сохраняющего меру отображения $[x, \xi] \to P$ обратно в $\Omega_1$. Из множества тех $[y, \eta]$, для которых $y \leqq x$, $0 \leqq \eta \leqq 1$, образуем $\Lambda (x)$, а из тех, где $y = x$, $0 \leqq \eta \leqq 1$:

$$M (x) = \prod_{\substack{y \in A' \\ y > x}} \Lambda (y) - \sum_{\substack{y \in A \\ y < x}} \Lambda (y).$$

При этом мы перенесем также определенные на $\bar{A}$ и его подмножествах $l$-меры: из $\bar{\mu}$ в $\bar{B}$ получится, как мы знаем, $\mu$ в $\Omega_1$; $\tilde{\mu}_{(x)}$ мы перенесем на $M (x)$, где она должна обозначаться $\mu_{(x)}$, — все эти меры являются $l$-мерами. Все же относительно $\mu_{(x)}$ нужно отметить следующее: ей соответствует топология, которая индуцируется отображением $\xi \to P$ ($P$ принадлежит $[x, \xi]$) при условии, что на $0 \leqq \xi \leqq 1$ задана обычная топология. Другая допустимая топология на $M (x)$ получается, если в качестве открытых рассматривать относительно открытые (в смысле топологии на $\Omega$, т. е. множества вида $O \cdot M (x)$, где $O$ открыто в $\Omega$) в $M (x)$ мно-

жества. Тогда борелевские множества первой топологии получаются при отображениях $\xi$-множеств $\xi \leqslant \eta$, $\eta \in A'$, т. е. из множеств $M(x) \cdot K(\eta)$ или, исходя из конструкции $K(\eta)$, из $M(x) \cdot K_n$. Борелевские множества второй топологии получаются из $M(x) \cdot O$ и аналогично из $M(x) \cdot K_n$. Поэтому обе топологии имеют одни и те же открытые множества, и так как для $l$-мер вся мера сосредоточена только на борелевских множествах (ср. примеч. 9 в предыдущей статье автора[1,10]), то $\mu_{(x)}$ и в смысле второй топологии, т. е. перенесенной на $M(x)$ топологии $\Omega$, является $l$-мерой.

Если $M[X] = \sum_{x \in X} M(x)$, то $M[X]$ есть образ $\overline{X}$, а $X$ и $M[X]$ одновременно измеримы и имеют одинаковую (соответственно $\tilde{\mu}^{(0)}$ и $\mu$) меру. Из нашей $\overline{\mu}(\overline{C})$-формулы имеем

$$\mu(N) = \int_0^1 \mu_{(x)}(M(x) \cdot N)\, dw(x).$$

При этом $w(x) = w(x, 1) = \tilde{\mu}^{(0)}$ (множество всех таких $y$, что $0 < y \leqq x$). При некоторых значениях $x$ подынтегральная функция может не иметь смысла ($\mu^*_{(x)}$ не определена или $M(x) \cdot N$ неизмеримо), но множество таких $x$ имеет $\tilde{\mu}^{(0)}$-меру 0; в частности, $\mu^*_{(x)}$ определена только для $x$, принадлежащих $X_0$, но $Y_0$ — дополнение $X_0$ — в $0 \leqq x \leqq 1$ имеет $\tilde{\mu}^{(0)}$-меру 0.

Исследуем теперь связь $S_t$ с $M(x)$. Пусть $T$ — $m$-пространство, точки которого обозначаются через $t$; $\tilde{\mu}$ — обычная мера Лебега на нем, $\Omega \times T$ — пространство-произведение; $\overline{\mu}$ — определенная на $\Omega \times T$ согласно $D_1$ $l$-мера (путаницы с $\overline{\mu}$ из п. 4 не произойдет, так как последняя больше не появится).

Пусть $M \subseteqq \Omega$. Если оно открыто, то его $[P, t] \to S_t P$ - прообраз в $\Omega \times T$ измерим (т. е. функция $S_t P$ измерима, ср. примеч. 10), а с открытых $M$ мера легко переносится на борелевские. Если $M$, кроме того, имеет меру 0, то для любого постоянного $t$ множество тех $P$, для которых $S_t P \in M$, имеет меру 0 ($S_t$ измеримо). Из теоремы Фубини (см. примеч 9), где мы должны рассматривать прообраз, так как он измерим, вытекает, что и сам прообраз имеет меру 0. Если $M$ имеет меру 0, то существует борелевское $M'$ меры 0, такое, что $M \subseteqq M'$ и прообраз $M \subseteqq$ прообразу $M'$, который имеет меру 0, и тем самым прообраз $M$ также имеет меру 0. Если $M$ — борелевское или имеет меру 0, то прообраз $M$ измерим, аналогично для сумм двух таких множеств, т. е. для всех измеримых $M$.

Пусть $x$ принадлежит $A'$. Множество $\Lambda(x)$ измеримо, измеримы и множество пар $[P, t]$, где $P \in \Lambda(x)$, и его $S_t P$-прообраз, т. е. множество тех $[P, t]$, для которых $S_t P$ принадлежит $\Lambda(x)$. Следовательно, измерима также симметрическая разность этих двух множеств, т. е множество таких $[P, t]$, что $P$ принадлежит $\Lambda(x)$, а $S_t P$ нет или наоборот. Кроме того, сумма этих множеств по всем $x$ из $A'$ измерима. Ее мы обозначим через $\overline{Y}_1$. Пусть $t$ фиксировано. Множество тех $P$, для которых $[P, t]$ принадлежит $\overline{Y}_1$, есть

$$\sum_{x \in A'} (\Lambda(x) + S_t^{-1}\Lambda(x)) - (\Lambda(x) \cdot S_t^{-1}\Lambda(x)),$$

с точностью до множества меры 0. Применима теорема Фубини: $\bar{Y}_1$ имеет меру 0. Если $[P, t]$ не принадлежит $\bar{Y}_1$, то это означает, что $P$ принадлежит тому же $\Lambda(x)$, $x \in A'$, что и $S_tP$, и, кроме того, тому же $M(x)$, $0 \leqq x < 1$, или $P$ принадлежит $M(x)$ тогда и только тогда, когда это выполняется для $S_tP$ и аналогично для всех $0 \leqq x < 1$.

Теперь мы переопределим $S_tP$ иначе, с тем чтобы она была определена, если она принадлежит $\bar{Y}_1$; однако при этом ничто не изменится. Так как $\bar{Y}_1$ имеет меру 0, то множество точек $S_tP$ останется измеримым; в таком случае при постоянном $t$ множество тех $P$, для которых $[P, t] \in \bar{Y}_1$, имеет меру 0 и тем самым новые $S_t$ эквивалентны старым. При этом все $M(x)$ строго инвариантны относительно новых $S_t$. Так как поток можно заменить эквивалентным, мы получаем, что множества $M(x)$ действительно инвариантны.

Если каждое $M(x)$ строго $S_t$- инвариантно, то тем же свойством обладает каждое $M[X]$. Если $X$ измеримо, $\tilde{\mu}^{(0)}(X)$ конечна, то $M[X]$ измеримо и $\mu(M[X])$ конечна, т. е. $M[X]$ — $\Lambda$-множество. Обратно, каждое $\Lambda(\eta)$ есть $M[X]$ ($X$ — множество $0 \leqq \xi \leqq \eta$), где $X$ измеримо. Это же верно для множеств, представимых в виде $\Lambda + M$, $\Lambda \cdot M$, $\Lambda - M$, т. е. для всех $\Lambda_n$, и аналогично для пределов последовательностей расширяющихся или вложенных множеств, т. е. для всех $\Lambda$-множеств (с точностью до множества меры 0, ср. п. 3 и примеч. 44). При этом мера $\Lambda$-множества $\tilde{\mu}^{(0)}(X) = \mu(M[X])$ конечна. Итак, любое $M[X]$ с измеримым $X$ и конечной $\tilde{\mu}^{(0)}(X) = \mu(M[X])$ с точностью до множества меры 0 может быть отождествлено с $\Lambda$-множеством.

**6.** Рассмотрим отображение $[P, t] \to [S_tP, t]$. Его область определения такая же, как для $S_tP$, и оно измеримо. Для любого фиксированного $t$ те $P$, для которых $[P, t]$ не лежит в этом множестве, образуют множество меры 0. Дополнение к рассматриваемому множеству, как $[P, t]$-множество, имеет согласно теореме Фубини меру 0. Рассмотрим прообраз некоторого множества $\bar{N}$ (это есть множество тех $[P, t]$, для которых $[S_tP, t] \in \bar{N}$ не обязано состоять сплошь из элементов вида $[S_tP, t]$!). Если $N = O \times \tilde{O}$, где $O, \tilde{O}$ — борелевские, то этот прообраз есть пересечение $[P, t] \to [S_tP]$-прообраза $O$, который измерим в силу измеримости $S_tP$, и открытого измеримого множества тех $[P, t]$, где $t \in \tilde{O}$, т. е. тоже измерим. При данном $t$ множество тех $P$, для которых $[P, t]$ принадлежит прообразу, пусто, если $t$ не принадлежит $\tilde{O}$, и есть $S_t^{-1}O$, если $t$ принадлежит $O$. По теореме Фубини мера прообраза равна

$$\int_{\tilde{O}} \mu(S_t^{-1}O)\, dt = \int_{\tilde{O}} \mu(O)\, dt = \mu(O) \cdot \tilde{\mu}(\tilde{O}) = \bar{\mu}(O \times \tilde{O}) = \bar{\mu}(\bar{N}) \quad (\text{ср. } D_1).$$

Утверждение: прообраз $\bar{N}$ измерим и имеет ту же меру, что и $\bar{N}$, для $\bar{N} = O \times \tilde{O}$, где $O, \tilde{O}$ — борелевские. Следовательно, оно имеет место для всех конечных $O \times \tilde{O}$-сумм (где сомножители могут быть выбраны независимо), аналогично для пределов последовательностей расширяющихся множеств и тем самым для всех открытых множеств. Далее это утверждение при помощи предель-

ного перехода по последовательностям расширяющихся или вложенных множеств переносится на все борелевские $\overline{N}$. Так как каждое множество $\overline{N}$ меры 0 является подмножеством некоторого борелевского множества $N'$ меры 0, то наше утверждение справедливо и для таких множеств, аналогично для суммы борелевского множества и множества меры 0, т. е. для всех измеримых $\overline{N}$.

Отметим, что $[P, t] \to [S_t P, t]$ отображает $\Omega \times T$ минус множество меры 0 взаимно однозначно на некоторое подмножество $\overline{N}^{(0)}$ произведения $\Omega \times T$, причем прообраз каждого измеримого $\overline{N}$ измерим и имеет ту же меру, что и $\overline{N}$ (от которого вовсе не требуется $\subseteq \overline{N}^{(0)}$). Рассмотрим утверждение теоремы 2 из предыдущей работы автора[1.11]. Оказывается, что она применима к рассматриваемому случаю и дает равенство $\overline{N}^{(0)} = \Omega \times T$ минус некоторое множество меры 0. Если это уже установлено, то снова применив упоминавшуюся теорему 2, получим, что $[P, t] \to [S_t P, t]$ сохраняет меру. Обратное отображение $[P, t] \to [S_t^{-1} P, t]$ тоже сохраняет меру.

Пусть $N$ измеримо. Множество $\overline{N}$ всех $[P, t]$, где $P \in N$, тоже измеримо. При этом измеримы его $[S_t P, t]$- и $[S_t^{-1} P, t]$-прообразы, т. е. $[P, t] \to S_t P$- и $[P, t] \to S_t^{-1} P$-прообразы $N$ (из измеримости $S_t P$ вытекает справедливость лишь первого утверждения, причем только для открытых множеств или пределов последовательностей расширяющихся борелевских множеств). Аналогично $S_t^{-1} P$ измерима как функция от $[P, t]$.

Мы можем теперь дать расширенное определение $S_t P$: для $t > 0$ оно совпадает со старым, для $t = 0$ является тождественным отображением, для $t < 0$ совпадает с $S_t^{-1} P$. Новое $S_t P$ также является измеримым (по $[P, t]$) и согласно $D_2$ эквивалентно старому, однако теперь мы имеем точное (а не только с точностью до множества меры 0) равенство

$$S_t S_{-t} = S_{-t} S_t = S_0 = \text{тождественное отображение.}$$

Будем в дальнейшем считать это равенство выполненным (инвариантность $M(x)$ при этом не используется).

Рассмотрим далее $S_t S_s P$-прообраз некоторого измеримого $N$. Прежде всего, при фиксированном $t$ это есть $S_s P$-прообраз множества $S_t^{-1} N$, которое измеримо, и тем самым $S_s P$-прообраз тоже измерим. При этом $S_t S_s P$ как функция $[P, s]$ измерим. Пусть теперь все переменные меняются. Тогда мы рассматриваем сначала $[P, t] \to S_t P$-прообраз $\overline{N'}$ множества $N$, который измерим, а затем $[P, t, s] \to [S_s P, t]$-прообраз $\overline{N}''$ множества $\overline{N}'$, который также является измеримым. Последнее можно доказать точно так же, как это было сделано выше для $[P, t] \to [S_t P]$-прообраза, только вместо измеримого отображения $P \to S_t P$ ($t$ фиксировано) в качестве исходного надо рассматривать измеримое отображение $[P, t] \to [S_s P, t]$ ($s$ фиксировано). Измеримое множество $\overline{N}''$ является $[P, t, s] \to S_t S_s P$-прообразом $N$. Кроме того, $S_t S_s P$ измерима как функция $[P, t, s]$.

В заключение мы хотим перенести формулу

$$\mu(N) = \int_0^1 \mu_{(x)}(M(x, \cdot N)\, dw(x), \qquad N \subseteq \Omega_1,$$

на $\Omega_1 \times T$ и $\Omega_1 \times T \times T$. Если задано некоторое $\bar{N} \subseteqq \Omega_1 \times T$ или $\bar{\bar{N}} \subseteqq \Omega_1 \times \times T \times T$, то под $(\bar{N})_{(t)}$ и $(\bar{\bar{N}})_{(t,s)}$ мы понимаем множество всех таких $P$, что $[P, t] \in \bar{N}$ и соответственно $[P, t, s] \in \bar{\bar{N}}$ (и также $\subseteqq \Omega_1$). Новые формулы имеют вид

$$\bar{\mu}(\bar{N}) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{(x)} (M(x) \cdot (\bar{N})_{(t)})\, dw(x)\, dt,$$

$$\bar{\bar{\mu}}(\bar{\bar{N}}) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{(x)} (M(x) \cdot (\bar{\bar{N}})_{(t,s)})\, dw(x)\, dt ds$$

($\bar{N} \subseteqq \Omega_1 \times T$, $\bar{\bar{N}} \subseteqq \Omega_1 \times T \times T$, подынтегральное выражение должно иметь смысл всюду вне $[x, t]$- и $[x, t, s]$-множеств меры 0 соответственно и быть измеримой функцией соответственно от $[x, t]$ и $[x, t, s]$). Для $\bar{N} = O \times \tilde{O}$ и соответственно $\bar{\bar{N}} = O \times \tilde{O} \times \tilde{\tilde{O}}$ (ср. $D_1$) это вытекает непосредственно из предыдущих формул, и тем самым данное утверждение можно перенести, так же как при доказательстве измеримости, последовательно на все открытые борелевские множества меры 0 и на все измеримые множества $\bar{N}$ и соответственно $\bar{\bar{N}}$.

7. Множество $\bar{N}_2$ тех $[P, t, s]$, для которых $S_t S_s P \neq S_{t+s} P$, измеримо, если измеримы функции, стоящие в обеих частях этого неравенства. При фиксированных $t, s$ $P$-множество, для которого $[P, t, s] \in \bar{N}_2$ имеет меру 0 ($D_2$), само $\bar{N}_2$ имеет ту же меру 0. При этом

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{(x)} (M(x) \cdot (\bar{\bar{N}}_2)_{(t,s)})\, dw(x)\, dt ds = 0,$$

т. е. $\mu_{(x)} (M(x) \cdot (\bar{\bar{N}}_2)_{(t,s)}) = 0$ всюду, кроме некоторого $[x, t, s]$-множества $\bar{\bar{Y}}_2$ меры 0. Условие на $\mu_{(x)}$ означает: $S_t S_s P = S_{t+s} P$ для всех $P$ из $M(x)$ с точностью до множества, имеющего $\mu_{(x)}$-меру 0, или $S_t S_s \cong S_{t+s}$ в $M(x)$ ($D_2'$). Если мы с самого начала зафиксируем $t$ и будем исходить из измеримости $[P, s]$-множества, для которого $S_t S_s \cong S_{t+s}$ в $M(x)$, то получим таким же образом: за исключением $[x, s]$-множества меры 0, имеет место равенство $S_t S_s \cong S_{t+s}$ в $M(x)$, т. е. $[x, t, s]$ принадлежит $\bar{\bar{Y}}_2$. Применим теперь к $\bar{\bar{Y}}_2$ теорему Фубини: за исключением некоторого $[x, t]$-множества $\bar{Y}_2$ меры 0, все $[x, t, s]$, кроме множества $s$ меры 0, принадлежат $\bar{\bar{Y}}_2$. То же самое утверждение имеет место и при фиксированном $t$ для всех $x$ с точностью до множества меры 0. Таким образом, $\bar{Y}_2$ имеет меру 0 и при фиксированном $t$ множество $x$, таких, что $[x, t] \in \bar{Y}_2$, тоже имеет меру 0.

Пусть $N$ измеримо, $\bar{N}$ — его $[P, t] \to S_t P$-прообраз, тоже являющийся измеримым. Тогда

$$\mu_{(x)} (M(x) \cdot (\bar{N})_{(t)}) = \mu_{(x)} (M(x) \cdot S_t^{-1} N)$$

— измеримая функция от $[x, t]$ и то же самое имеет место для $\mu_{(x)} (M(x) \cdot N)$.

Множество $\overline{Y}_3(N)$, состоящее из тех $[x, t]$, для которых $\mu_{(x)}(M(x)\cdot S_t^{-1}N) \neq \neq \mu_{(x)}(M(x)\cdot N)$, также является измеримым. Мы применим теперь наши $\mu$- и $\mu_{(x)}$-формулы к $M[X]\cdot N$ и $M[X]\cdot S_t^{-1}N$. Имеем

$$\mu(M[X]\cdot N) = \int_0^1 \mu_{(x)}(M(x)\cdot M[X]\cdot N)\,d\omega(x) = \int_X \mu_{(x)}(M(x)\cdot N)\,d\omega(x),$$

$$\mu(M[X]\cdot S_t^{-1}N) = \int_0^1 \mu_{(x)}(M(x)\cdot M[X]\cdot S_t^{-1}N)\,d\omega(x) = \int_X \mu_{(x)}(M(x)\cdot S_t^{-1}N)\,d\omega(x).$$

Из свойства сохранения меры под действием $S_t$ и инвариантности $M(x)$ и $M[X]$ следует, что левые и правые части этих формул равны между собой. Это справедливо для всех $X$, отсюда с точностью до $x$-множества меры 0

$$\mu_{(x)}(M(x)\cdot S_t^{-1}N) = \mu_{(x)}(M(x)\cdot N).$$

Таким образом, для любого фиксированного $t$ $x$-множество, для которого $[x, t] \in \overline{Y}_3(N)$, имеет меру 0. По теореме Фубини получаем, что $\overline{Y}_3(N)$ тоже имеет меру 0.

Пусть теперь $\overline{Y}_3 = \sum_{\xi \in A'} \overline{Y}_3(K(\xi))$. Для $\overline{Y}_3$ имеем: его мера равна 0 и при фиксированном $t$ $x$-множество, для которого $[x, t] \in \overline{Y}_3$, тоже имеет меру 0. Если $[y, t]$ не лежит в $\overline{Y}_3$, то

$$\mu_{(y)}(S_t^{-1}\cdot M) = \mu_{(y)}(M) \quad (M, S_t^{-1}M \text{ измеримы!})$$

для всех $M = M(y)\cdot K(\eta)$, т. е. для таких прообразов $M \subseteq M(y)$, которые при отображении $P \to [x, \xi]$ из п. 3 соответствуют отрезку из таких точек $[x, \xi]$, для которых $x = y$, $0 \leqq \xi \leqq \eta$. Отсюда вытекает, что это выполняется и для разностей таких отрезков, для конечных сумм таких разностей и для пределов возрастающих последовательностей таких сумм. Таким образом, и для прообразов множеств, от которых можно обычным образом перейти к прообразам борелевских множеств меры 0 ($\mu_{(y)}$-мера!, эти множества сами имеют $\mu_{(x)}$-меру 0 из-за сохранения меры при переходе к $\mu_{(y)}$) и к измеримым множествам. Последние прообразы есть просто все $\mu_{(y)}$-измеримые $M \subseteq M(y)$. Следовательно, наши формулы имеют место и для них. В частности, для $M = M(y)$ имеем вследствие

$$\mu_{(y)}(S_t^{-1}M(y)) = \mu_{(y)}(M(y)),$$

где $S_t^{-1}M(y) \subseteq M(y)$ и $\mu_{(y)}(M(y))$ конечны (они не превосходят единицы, так как $M(y)$ есть предел прообразов $\xi < \zeta \leqq \eta$, $\xi \to 0$, $\zeta \to 1$ (ср. п. 3), а это множество имеет меру $\rho(y, \eta) - \rho(y, \zeta) \leqq 1$), что $M(y) - S_t^{-1}M(y)$ имеет меру 0. Таким образом, $S_{-t} = S_t^{-1}$ определено всюду на $M(y)$, за исключением множества ($\mu_{(x)}$-) меры 0.

Если при этом $[x, t]$ и $[x, -t]$ не лежат в $\overline{Y}_3$, то $S_t$ отображает $M(x)$ ми-

нус некоторое множество ($\mu_{(x)}$-) меры 0 на $M(x)$ минус множество ($\mu_{(x)}$-) меры 0 и сохраняет $\mu_{(x)}$-меру.

8. Обозначим через $\overline{Y}_4$ множество тех $[x, t]$, которые лежат в $\overline{Y}_2$ или $\overline{Y}_3$ или для которых $[x, -t]$ принадлежит $\overline{Y}_3$. Множество $\overline{Y}_4$ имеет меру 0 и при фиксированном $t$ множество тех $x$, для которых $[x, t] \in \overline{Y}_4$, т. е. $(Y_4)_{(t)}$ имеет меру 0. Если $[x, t]$ не принадлежит $\overline{Y}_4$, то $S_t$ отображает $M(x)$ с точностью до множества меры 0 (ср. конец п.7) взаимно однозначно и с сохранением меры на себя. При этом для всех $s$ (с точностью до множества меры 0) в $M(x)$ выполняется равенство $S_t S_s \cong S_{t+s}$.

Если $\overline{X} \subseteqq A \times T$, то обозначим через $\overline{M}[\overline{X}]$ множество всех $[P, t]$, для которых $P$ принадлежит $M(x)$, где $[x, t] \in \overline{X}$. Тогда аналогично тому, как мы показали в конце п. 4, $M[X]$ измеримо, если $X$ измеримо и имеет ту же меру (соответственно $\mu$ и $\tilde{\mu}^{(0)}$). Также имеет место: $M[\overline{X}]$ измеримо, если $\overline{X}$ измеримо и их меры равны ($\bar{\mu}$ и $\bar{\tilde{\mu}}^{(0)}$ соответственно). Далее, для $\overline{X} = X \times \tilde{O}$ (ср. $D_1$) это следует из утверждения об $X$ и $M[X]$ и из возможности перенести его обычным образом последовательно на открытые, борелевские, меры 0 и на все измеримые множества.

Таким образом, $\overline{M}[\overline{Y}_4]$ имеет $\bar{\mu}$-меру 0 и при фиксированном $t$ также и множество $M[(\overline{Y}_4)_{(t)}]$, очевидно совпадающее с множеством тех $P$, для которых $[P, t] \in \overline{M}[Y_4]$, имеет $\mu$-меру 0. Если мы произвольным образом изменим определение $S_t P$ на $\overline{M}[Y_4]$, то новое $S_t P$ будет во всяком случае измеримой функцией $P, t]$ и остается эквивалентной старой (ср. $D_2'$), и мы также получим эквивалентный поток. Допустимую область изменения можно охарактеризовать следующим образом: если $[x, t]$ принадлежит $\overline{Y}_4$, то $S_t$ принадлежит $M(x)$.

Если $\overline{N} \subseteqq \Omega_1 \times T$ измеримо, то

$$\bar{\mu}(\overline{N}) = \int_0^1 \bar{\mu}_{(x)}((M(x) \cdot T)\overline{N})\, d\varpi(x)$$

($\bar{\mu}_{(x)}$ есть продолжение $\mu_{(x)}$ с $M(x)$ на $M(x) \times T$ согласно $D_1$, подынтегральное выражение определено всюду с точностью до множества меры 0, т. е. $(M(x) \times \times T) \cdot \overline{N}$ $\bar{\mu}_{(x)}$-измеримо). В силу наших предшествующих $\mu$-, $\mu_{(x)}$-формул это верно для $\overline{N} = O \times \tilde{O}$ (ср. $D_1$) и распространяется на остальные $\overline{N}$ так же, как это было сделано для аналогичных формул в конце п. 6.

Пусть теперь $N \subseteqq \Omega_1$ измеримо и $\overline{N}$ — его $[P, t] \to [S_t P]$-прообраз. Множество $(M(x) \cdot T) \cdot \overline{N}$, являющееся $[P, t] \to [S_t P]$-прообразом $M(x) \cdot N$, ($\bar{\mu}_{(x)}$)- измеримо с точностью до $x$-множества $Y_5(N)$ меры 0. Пусть $Y_5 = \Sigma_{\xi \in A'} Y_5(K(\xi))$. Оно также имеет меру 0. Если $y$ не принадлежит $Y_5$, то $[P, t] \to S_t P$-прообразы всех $M(y) \cdot K(\eta)$ измеримы, т. е. прообразы всех $M \subseteqq M(y)$ вследствие $P \to \to [x, \xi]$-преобразования из п. 3 соответствуют интервалам $x = y$, $0 \leqq \xi \leqq \eta$. То же самое имеет место для множеств $M$, которые соответствуют разностям

таких интервалов или конечным суммам таких разностей, или пределам возрастающих последовательностей таких сумм, т. е. всем открытым множествам на $x=y$. При этом $S_tP$, как функция $[P, t]$, является $(\bar{\mu}_{(x)})$-измеримой в $M(x)\times T$.

Для любого $x$ множество тех $t$, для которых $[x, t]\in\bar{Y}_4$, обозначим через $T(x)$. По теореме Фубини $T(x)$ всегда есть $t$-множество меры 0, если оно построено по $x$-множеству $Y_4$ меры 0.

Обозначим сумму $Y_0$, $Y_4$, $Y_5$ через $Y_6$. Оно также есть множество меры 0. Его дополнение (в $0\leqq x\leqq 1$) обозначим $X_6$. Для $x\in X_6$ имеет место следующее: $\mu_{(x)}$ определена и является $l$-мерой в $M(x)$. Множество $T(x)$ имеет меру 0; если $t$ не принадлежит $T(x)$, то $S_t$ отображает $M(x)$ минус множество меры 0 взаимно однозначно и с сохранением меры на $M(x)$ минус множество меры 0. Для всех $s$ с точностью до множества меры 0 выполняется $S_tS_s\cong\cong S_{t+s}$ в $M(x)$ (мы можем, ничего не изменяя, взять $s$ и $t+s$ не лежащими в $T(t)$), $S_tP$ есть измеримая функция $[P, t]$ (имеется в виду, что в $M(x)$ и в $M(x)\times T$ введены меры $\mu_{(x)}$ и $\bar{\mu}_{(x)}$ соответственно). В следующем пункте покажем, что в такой ситуации $S_t$ при $t\in T(x)$ может быть так переопределено или определено по-новому, что эти $S_t$ согласно $D_2'$ заполняют $M(x)$ (с $\mu_{(x)}$), т. е. являются там потоком. Если для $t\in T(x)$ $[x, t]$ принадлежит $\bar{Y}_4$, то согласно сказанному выше новый $S_t$-поток эквивалентен старому. Мы должны отметить также, что только что полученное утверждение с самого начала было нашей целью: для любого $x$ из $X_6$ $S$ является потоком в $M(x)$ (с $\mu_{(x)}$).

9. В п. 3 мы определили: $\tilde{\mu}^{(0)}(X)=\int_X d\bar{\mu}(x, 1)=\int_X dw(x)$, а в п. 4 было показано: $\tilde{\mu}^{(0)}(X)=\mu(M[X])$, что согласно $\mu$-, $\mu_{(x)}$-формулам соответствует равенству

$$\int_0^1 \mu_{(x)}(M(x)\cdot M[X])\,dw(x)=\int_X \mu_{(x)}(M(x))\,dw(x).$$

При этом имеет место равенство

$$\int_X dw(x)=\int_X \mu_{(x)}(M(x))\,dw(x)$$

и также с точностью до множества $Y_7$ меры 0 должно выполняться $\mu_{(x)}(M(x))=1$.

Мы сопоставляем каждому $M(x)$ гильбертово пространство $\mathfrak{T}_{(x)}$ определенных на $M(x)$ функций $f_{(x)}(P)$ с конечным $\int_{M(x)}|f_{(x)}(P)|^2dv(x, P)$ (интеграл строится исходя из $l$-меры $\mu_{(x)}$; $v(x, P)$ есть соответствующий элемент объема). Так как $P\to S_tP$ сохраняет меру в $M(x)$, то мы можем построить унитарный оператор Купмана $U_{(x,t}$ и соответствующее $E_{(x,0)}$ (см. п. 1). Далее, пусть

$$\chi_{(x,\xi)}(P)=\begin{cases}1 & \text{в } M(x)\cdot K(\xi),\\ 0 & \text{в остальных точках } M(x).\end{cases}$$

Если $f_{(x)}(P)$ ортогональна всем $\chi_{(x,\xi)}(P)\,(\xi\in A')$, то мы используем отображение $P\to[y, \eta]$ из п. 3. При этом $y=x$, $0\leqq\eta\leqq 1$. Вместо $f_{(x)}(P)$ получим

$f'_{(x)}(\eta)$, а вместо $\chi_{(x,\xi)}(P)$

$$\chi_{(x,\xi)}(\eta)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqq\eta\leqq\xi,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Функции $f'_{(x)}$, $\chi_{(x,\xi)}$ также будут ортогональны, т. е. $\int_0^\xi f'_{(x)}(\eta)\,d_{(x)}\eta=0$ ($d_{(x)}$ означает, что интеграл построен на основе $\mu_{(x)}$-меры) для всех $\xi$. Далее, $f'_{(x)}(\eta)=0$ с точностью до $\eta$-множества $(\tilde{\mu}_{(0)})$-меры 0, т. е. $f_{(x)}(P)=0$ с точностью до $P$-множества $(\mu_{(x)})$-меры 0. При этом так как только 0 ортогонален всем $\chi_{(x,\xi)}$, $\xi\in A'$, то натянутое на них замкнутое линейное многообразие есть $\mathfrak{H}(x)$. Мы выбираем какую-нибудь последовательность элементов $\xi_0=1$, $\xi_1$, $\xi_2$, ... из $A'$ и ортогонализуем $\chi_{(x,\xi_n)}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, в том же порядке[52]. В результате получаются функции $\varphi_{(x,m)}=\sum_{n=0}^\infty c_{(x,m,n)}\chi_{(x,\xi_n)}$, $m=0, 1, 2, \ldots$, которые согласно предыдущему замечанию образуют полную ортонормированную систему. При этом $\chi_{(x,\xi_0)}=1$ (для всех $x$ из $M(x)$) является нормированной, и на первом шаге процесса полагаем $\varphi(x, 0)=\chi_{(x,\xi_0)}=1$. Функции $c_{(x,m,n)}$ определяются при помощи элементарных вычислительных операций из равенств

$$(\chi_{(x,\xi_m)}, \chi_{(x,\xi_n)})=\mu_{(x)}(M(x)\cdot\Lambda(\xi_m)\cdot\Lambda(\xi_n)),$$

и так как в них входят только измеримые функции $x$, то $c_{(x,m,n)}$ также являются измеримыми.

Если при фиксированном $t$

$$(S_t\chi_{(x,\xi_m)}, \chi_{(x,\xi_n)})=\mu_{(x)}(M(x)\cdot S_t^{-1}\Lambda(\xi_m)\cdot\Lambda(\xi_n))$$

являются измеримыми функциями $x$, то $c_{(x,m,n)}$ и $\varphi_{(x,m)}$ — матричные элементы $S_t$, $s_{(t,x,m,n)}=(S_t\varphi_{(x,m)}, \varphi_{(x,n)})$ тоже измеримы. Тогда согласно п. 1

$$E_0=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{s-t}\int_t^s S_\tau d\tau=\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{q\to\infty}\frac{1}{2pq}\sum_{\nu=-pq}^{+pq}S_{\nu/q}\right),$$

$$p,\ q=1, 2, \ldots,\ \nu=0, \pm1, \pm2, \ldots,$$[53]

и $\varphi_{(x,m)}$ — матричные элементы $E_0$, $e_{(0,x,m,n)}=(E_0\varphi_{(x,m)}, \varphi_{(x,n)})$ также являются измеримыми функциями $x$.

При этом $\varphi_{(x,0)}$ — константа, $E_0\varphi_{(x,0)}=\varphi_{(x,0)}$, т. е. $E_0$ — проектор и

$$e_{(0,x,m,n)}=\begin{cases}1 & \text{при } m=n=0,\\ 0 & \text{при } m=0,\ n\neq0,\\ 0 & \text{при } m\neq0,\ n=0.\end{cases}$$

[52] Согласно методу Е. Шмидта; см. также [7, с. 69].

[53] Предел существует в смысле сильной сходимости операторов, а нам требуется только сходимость матричных элементов, т.е. слабая (ср. примеч. 42).

Поток $S_t$ эргодичен в $M(x)$, если уравнение $E_0 f_{(x)} = f_{(x)}$ не имеет решений, кроме $f_{(x)} = c\varphi_{(x,0)}$, т. е. $e_{(0,x,m,n)} = 0$ при $m, n \neq 0$. Множество $Y_s$, состоящее из тех $x$, для которых это условие не выполняется, измеримо. Если задано $m$, то множество $Y_{s,n}$, состоящее из тех $x$, для которых при этом $m$ и хотя бы одном $n$ рассматриваемое условие не выполнено, также является измеримым и $Y_s = \sum_{m=1}^{\infty} Y_{s,m}$. Мы покажем, что все $Y_{s,m}$ и тем самым $Y_s$ имеют меру 0. Предположим, что мера некоторого $Y_{s,m}$ не равна 0.

Пусть $x$ принадлежит $Y_{s,m}$. Так как $E_0$ — проектор, то $f_{(x)} = \sum_0^{\infty} n e_{(0,x,m,n)} \varphi_{(x,n)}$ есть решение уравнений $E_0 f_{(x)} = f_{(x)}$ и $S_t f_{(x)} = f_{(x)}$ и согласно тому, что мы уже знаем, $f_{(x)}$ ортогональна $\varphi_{(x,0)} = \text{const}$ и $\neq 0$ (даже всюду, а не с точностью до множества меры 0!). Функция $f_{(x)}(P)$ построена по $e_{(0,x,m,n)}$, $c_{(x,m,n)}$, $\chi_{(x,\xi_m)}(P)$. Если $P$ пробегает $\Omega_1$, а $x$ таково, что $P$ принадлежит $M(x)$, то

$$\chi_{(x,\xi_m)}(P) = \begin{cases} 1 \text{ при } P \in K(\xi_m), \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

также является $(\mu)$-измеримой функцией $P$. Функции $e_{(0,x,m,n)}$, $c_{(x,m,n)}$ являются $(\tilde{\mu}^{(0)})$-измеримыми по $x$ и $(\mu)$-измеримыми по $P$ (так как каждое измеримое $x$-множество $X$ имеет $P$-прообраз $M[X]$, который также является измеримым). Аналогично $f_{(x)}(P)$ как функция $P$ является $(\mu)$-измеримой. Пусть $C$ есть множество всех комплексных чисел $u+iv$ с $u>0$ или $u=0$, $v>0$, а $D$ — множество всех тех чисел, для которых $u<0$ или $u=0$, $v<0$. При этом $P$-множества $f_{(x)}(P)$ в $C$ и $f_{(x)}(P)$ в $D$ также являются $(\mu)$-измеримыми и как функции от $x$ $\mu_{(x)}$ ($P$-множество в $M(x)$, $f_{(x)}(P)$ в $C$), $\mu_{(x)}$ ($P$-множество в $M(x)$, $f_{(x)}(P)$ в $D$) обе $(\tilde{\mu}^{(0)})$-измеримы. При фиксированном $x$ $f_{(x)}(P)$ $(P \in M(x))$ не только с точностью до множества меры 0 равна 0 и ортогональна константам, а должна лежать в подмножествах меры, большей 0, в $C$ и $D$. Таким образом, указанные выше функции всегда больше нуля. Можно найти такое $\varepsilon>0$, что обе эти функции больше или равны $\varepsilon$ на подмножестве $Y' \subset Y_s$, имеющем меру, большую нуля. При этом мы можем взять подмножество $Y'$ конечной меры. Обозначим множество точек $P$ из $M[Y']$, для которых $f_{(x)}(P)$ лежит в $C$ и $D$, через $J$ и $K$ соответственно.

По построению, $J$ и $K$ не пересекаются и оба являются $(\mu)$-измеримыми. Множество таких $P$, для которых $f_{(x)}(P)$ и $f_{(x)}(S_t P)$ не совпадают, $(\mu)$-измеримо. Для любого $x$ его часть, лежащая в $M(x)$, имеет меру 0 (из-за $U_t f(x) = f(x)$), и согласно нашим $\mu$-, $\mu_{(x)}$-формулам само это множество имеет меру 0.

При этом $J$ и $K$ с точностью до множества ($\mu$-) меры 0 $S_t$-инвариантны. Кроме того, они $\subseteq M[Y']$, $\mu(M[Y']) = \tilde{\mu}^{(0)}(Y')$ конечна и $J$, $K$ являются $\Lambda$-множествами. Согласно сказанному в конце п. 5 они совпадают с точностью до множества ($\mu$-) меры 0 с $M[Z]$ и $M[W]$.

Так как в $Y'$ $\mu_{(x)}(M(x) \cdot J) \geqq \varepsilon$, то для любого ($\tilde{\mu}^{(0)}$-измеримого) $V \subseteq Y'$

$$\mu_{(x)}(M(V) \cdot J) \geqq \varepsilon \tilde{\mu}^{(0)}(V) \quad (\mu\text{-}, \ \mu_{(x)}\text{-формулы!})$$

и также

$$\mu(M(V)\cdot K) \geqq \varepsilon\tilde{\mu}^{(0)}(V).$$

Если мы положим в первой формуле $V = W$, то получим

$$\varepsilon\tilde{\mu}^{(0)}(W) \leqq \mu(M(W)\cdot J) = \mu(K\cdot J) = 0,$$

$$\tilde{\mu}^{(0)}(W) = 0, \ \mu(K) = \mu(M[W]) = 0,$$

а если во второй формуле $V = Y'$, то

$$\varepsilon\tilde{\mu}^{(0)}(Y') \leqq \mu(M[Y']\cdot K) = \mu(K) = 0, \ \tilde{\mu}^{(0}(Y') = 0.$$

Но это противоречит первоначальному предположению об $Y'$. Следовательно, $Y_8$ имеет меру 0.

**10.** Пусть $Y_9$ есть сумма $Y_6$, $Y_7$, $Y_8$ и тем самым имеет меру 0, а $X_9$ — его дополнение (в $0 \leqq x \leqq 1$). Для $x$ из $X_9$ $\mu_{(x)}$ есть $l$-мера в $M(x)$, $S_t$ — поток в $M(x)$, $\mu_{(x)}(M(x)) = 1$, $S_t$ эргодичен в $M(x)$. Имеем $\mu(M[Y_9]) = \tilde{\mu}^{(0)}(Y_9) = 0$, и если мы такую же меру припишем $\Omega_2$, то выполняется соответствующее свойство из п. 3 и $\mu(M[X_9]) = \mu(\Omega_1)$. Если $\Omega_2$ имеет меру 0, то можно отнести его к некоторому $M(x)$, определив $\mu_{(x)}(\Omega_2) = 0$. Тогда сохраняется равенство $M[X_9] = \Omega_1$ и $\Omega_2 = 0$. Мы можем также предположить, что это требование выполняется. Далее, мы хотим обозначить $X_9$ через $X^{(0)}$. Теперь мы можем, соединив все вместе, сформулировать утверждение.

Теорема 2. *Множество $\Omega$ может быть разложено следующим образом: $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, $\Omega_1 = \sum_{x\in X^{(0)}} M(x)$, где $X^{(0)}$ — множество чисел отрезка $0 \leqq x \leqq 1$; $M(x)$ и $\Omega_2$ — попарно непересекающиеся множества: $X^{(0)}$* и *$M(x)$ являются $m$-пространствами, в которых определены соответственно $l$-меры $\tilde{\mu}^{(0)}$ и $\mu_{(x)}$. Это разложение обладает, возможно, при замене $S_t$ эквивалентным потоком следующими свойствами:*

1. *Либо $\Omega_2$ пусто, либо $\mu(\Omega_2) = \infty$ и $\Omega_2$ нуль-эргодично.*

2. *В каждом $M(x)$ $S_t$ есть собственно эргодический поток (по $l$-мере $\mu(x)$ и перенесенной на $M(x)$ относительной топологии из $\Omega$).*

3. *Для всех $(\tilde{\mu}^{(0)})$-измеримых $X \subseteqq X^0$ $\tilde{\mu}^{(0)}(X) = \mu\left(\sum_{x\in X} M(x)\right)$. При этом $\mu_{(x)}(M(x)) = 1$.*

*Для всех $(\mu)$-измеримых $N \subseteqq \Omega_1$ $\mu(N) = \int_X \mu_{(x)}(M(x)\cdot N)\,dw(x)$.* Т. е. подынтегральное выражение, кроме, быть может, $x$-множества $(\tilde{\mu}^{(0)}$-) меры 0, имеет смысл и $M(x)\cdot N$ $(\mu_{(x)})$-измеримо; $\mu_{(x)}(M(x)\cdot N)$ как функция $x$ $(\tilde{\mu}^{(0)}$-) измерима; $dw(x)$ — дифференциальный элемент $\tilde{\mu}^{(0)}$-интегрирования, тем самым

$$w(y) = \tilde{\mu}^{(0}\text{ (множество } 0 \leqq x \leqq y) = \mu\left(\sum_{0\leqq x\leqq y} M(x)\right);$$

*и, кроме того, утверждается совпадение обеих частей равенства.*

При этом мы доказали то, о чем говорилось в п. 4. введения: каждый поток может быть разложен на эргодические потоки. Можно еще показать, что разложение из теоремы 2 по существу единственно, однако мы не будем на этом останавливаться.

## III. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $U_t$-СЕМЕЙСТВ КУПМАНА

**1.** Рассмотрим прежде всего взаимно однозначное и сохраняющее меру отображение $P \to SP$ $\Omega'$ на $\Omega''$ или $\Omega'$ минус некоторое множество меры 0 на $\Omega''$ минус некоторое множество меры 0. Ясно, что оператор $U$, определенный равенством $Uf(P) = f(SP)$, унитарен и (соответственно $D_5$) $Uf \cdot Ug = U(f \cdot g)$, если $f$, $g$ и $f \cdot g$ принадлежат гильбертову пространству $\mathfrak{H}$. Последнее условие имеет место, например, когда $f$, $g$ принадлежат гильбертову пространству и ограничены [54]. Если, обратно, для унитарного оператора $U$ в $\mathfrak{H}$ имеет место равенство $Uf \times Ug = U(f \cdot g)$ при всех ограниченных $f$, $g$, то мы можем найти взаимно однозначное и сохраняющее меру отображение $S$, так что $Uf(P) = f(SP)$.

Если $\Lambda' \subseteqq \Omega$ измеримо и имеет конечную меру, то для

$$\chi_{\Lambda'}(P) = \begin{cases} 1 & \text{при } P \in \Lambda', \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$\chi_{\Lambda'} \cdot \chi_{\Lambda'} = \chi_{\Lambda'}$ и $U\chi_{\Lambda'} \cdot U\chi_{\Lambda'} = U(\chi_{\Lambda'} \cdot \chi_{\Lambda'}) = \chi_{\Lambda'}$. При этом с точностью до множества меры нуль $U_{\chi_{\Lambda'}}(P) = 0$ или 1, и мы можем так изменить определение этой функции на множестве меры 0, что как элемент $\mathfrak{H}$ она не изменится и $U_{\chi_{\Lambda'}}(P)$ будет всюду равна 0 либо 1. Множество, для которого выполняется последнее условие, обозначим через $\Lambda''$; оно измеримо (из определения $U_{\chi_{\Lambda'}}$) и имеет конечную меру. При этом $U_{\chi_{\Lambda'}} = \chi_{\Lambda''}$.

При помощи этой процедуры мы можем каждому измеримому $\Lambda' \subseteqq \Omega'$, имеющему конечную меру, сопоставить множество $\Lambda'' \subseteqq \Omega''$, обладающее такими же свойствами. Так как $U^{-1}$ также является унитарным, то верно и обратное, т. е. каждое подобное множество $\Lambda''$ действительно получается из определенного $\Lambda'$. Далее, $\Lambda'$, очевидно, определяет $\Lambda''$ с точностью до множества меры 0 и обратно.

Так как $U$ унитарен и $\|\chi_{\Lambda'}\|^2 = \mu(\Lambda')$, $\|\chi_{\Lambda''}\|^2 = \mu(\Lambda'')$, то $\mu(\Lambda') = \mu(\Lambda'')$. Имеем

$$U_{\chi_{\Lambda_1' \cdot \Lambda_2'}} = U(\chi_{\Lambda_1'} \cdot \chi_{\Lambda_2'}) = U_{\chi_{\Lambda_1'}} \cdot U_{\chi_{\Lambda_2'}} = \chi_{\Lambda_1''} \cdot \chi_{\Lambda_2''} = \chi_{\Lambda_1'' \cdot \Lambda_2''}$$

---

[54] В таком случае

$$\int_{\Omega} |f(P)\, g(P)|^2 \, dv_P \leqq (\underset{P \in \Omega}{\mathrm{Max}} |f(P)|)^2 \int_{\Omega} |g(P)|^2 \, dv_P$$

тоже конечен.

и

$$U_{\chi_{\Lambda_1+\Lambda_2}} = U(\chi_{\Lambda_1'} + \chi_{\Lambda_2'} - \chi_{\Lambda_1\cdot\Lambda_2}) = U_{\chi_{\Lambda_1'}} + U_{\chi_{\Lambda_2}} -$$

$$- U_{\chi_{\Lambda_1'}\cdot\chi_{\Lambda_2'}} = \chi_{\Lambda_1''} + \chi_{\Lambda_2''} - \chi_{\Lambda_1''\cdot\Lambda_2''} = \chi_{\Lambda_1''+\Lambda_2''}.$$

Таким образом, если $\Lambda_1''$, $\Lambda_2''$ соответствуют $\Lambda_1'$, $\Lambda_2$, то таким же образом $\Lambda_1''\cdot\Lambda_2''$ и $\Lambda_1''+\Lambda_2''$ соответствуют $\Lambda_1\cdot\Lambda_2$ и $\Lambda_1+\Lambda_2'$. По индукции получаем: если $\Lambda_1'', \ldots, \Lambda_n''$ соответствуют $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, то $\Lambda_1''+\ldots+\Lambda_n'$ соответствует $\Lambda_1+\ldots$ $\ldots+\Lambda_n$. А так как $U$ есть непрерывный оператор, то с помощью предельного перехода получаем: если $\Lambda_1''$, $\Lambda_2'', \ldots$ соответствуют $\Lambda_1$, $\Lambda_2, \ldots$ (и $\Lambda_1'+\Lambda_2+\ldots$ имеет конечную меру), то имеется соответствие и между $\Lambda_1'+\Lambda_2+\ldots$ и $\Lambda_1''+$ $+\Lambda_2''+\ldots$ Итак, если $\Lambda' \leftrightarrow \Lambda''$ в смысле теоремы 1 предыдущей работы автора[1,12], то существует сохраняющее меру отображение $\Omega'$ на $\Omega''$, и, таким образом, имеем $\Lambda'' \leftrightarrow \Lambda'$. Далее, на основании упомянутой теоремы существует взаимно однозначное сохраняющее меру точечное отображение $P \to SP$ множества $\Omega'$ минус некоторое множество меры 0 на $\Omega''$ минус некоторое множество меры 0, которое индуцирует отображение множеств $\Lambda'' \leftrightarrow \Lambda'$. Если $\Omega'$ и $\Omega''$ несчетны, то мы можем даже выбрать $S$ отображающим $\Omega'$ на $\Omega''$ взаимно однозначно.

Оператор $Vf(P) = f(SP)$ также является унитарным. Имеем $U_{\chi_{\Lambda'}} = \chi_{\Lambda''}$, но так как $\Lambda''$ есть $P \to SP$-прообраз $\Lambda'$, то и $V_{\chi_\Lambda} = \chi_{\Lambda''}$. При этом для всех $f =$ $= \chi_\Lambda$ имеет место равенство $Uf = Vf$. Так как характеристические функции всюду плотны в замкнутом линейном многообразии $\mathfrak{H}$ (ср. примеч. 44), то это равенство выполняется для всех $f$. Итак, $U = V$, и тем самым все доказано.

2. Пусть $S_t$ — поток, $U_t$ — купмановские операторы: $U_tf(P) = f(S_tP)$. Унитарность операторов $U_tU_s = U_{t+s}$ и $U_tf\cdot U_tg = U_t(f\cdot g)$ ($f$, $g$ ограничены) очевидна. Для выполнения $D_4$ и $D_5$ не хватает только свойства измеримости $(U_tf, g)$ по $t$. Это свойство достаточно доказать для $f$ и $g$ из такого множества $\mathfrak{R}$, для которого порожденное замкнутое линейное многообразие совпадает с $\mathfrak{H}$, т. е. если $(U_tf, g)$ измерима при $f$, $g$ из $\mathfrak{R}$, то это выполняется для их линейных комбинаций и для пределов этих линейных комбинаций, т. е. для всех $f$, $g$. Возьмем в качестве такого множества $\mathfrak{R}$ множество всех $\chi_\Lambda$ ($\Lambda$ измеримо и имеет конечную меру, см. примеч. 44), при этом мы должны только показать, что $(U_t\chi_\Lambda, \chi_M) =$ $= (\chi_{S_t^{-1}\Lambda}, \chi_M) = \mu(S_t^{-1}\Lambda\cdot M)$ есть измеримая функция . В п. 6 § II мы показали, что $[P, t] \to S_tP$-прообраз $\Lambda$ (в $\Omega\times T$) измерим и множество тех $[P, t]$, где $P\in M$, очевидно, тоже измеримо. Следовательно, пересечение $N$ этих двух множеств измеримо.

По теореме Фубини $\mu(N_{(t)})$ ($N_{(t)}$ — множество тех $P$, для которых $[P, t]\in N$), также есть измеримая функция от $t$. Поскольку $N_{(t)} = S_t^{-1}\Lambda\cdot M$, мы получили то, что требовалось.

Обратно, пусть $U_t$ — семейство операторов, удовлетворяющих $D_1$, $D_2$. Прежде всего мы можем каждому $U_t$ сопоставить некоторое $P \to S_t P$, отображающее $\Omega$ минус какое-то множество меры 0 взаимно однозначно и с сохранением меры на $\Omega$ минус множество меры 0. Из $U_t U_s = U_{t+s}$ вытекает $S_t S_s = S_{t+s}$. Остается проверить, что $S_t P$ есть измеримая функция $[P, t]$.

Из теоремы 1 предыдущей работы автора[1,9] вытекает, что $U_t$ сильно непрерывно по $t$, в частности $U_t f \to f$ при $t \to 0$. Если $f = \chi_\Lambda$, то это означает, что $\chi_{S_t^{-1}\Lambda} \to \chi_\Lambda$, и если $\| \chi_{S_t^{-1}\Lambda} - \chi_\Lambda \|^2 = \mu\,((\Lambda + S_t^{-1}\Lambda) - (\Lambda \cdot S_t^{-1}\Lambda))$, то $\mu\,((\Lambda + S_t^{-1}\Lambda) - (\Lambda \cdot S_t^{-1}\Lambda)) \to 0$. Если $P$, $S_t P$ лежат в $\Lambda$ либо ни одна из этих точек в $\Lambda$ не лежит, мы говорим, что они эквивалентны по отношению к $\Lambda$. Легко видеть, что мера множества тех точек, для которых их $S_t$-образ им не эквивалентен по отношению к $\Lambda$, при $t \to 0$ тоже стремится к 0. Пусть $K_1, K_2, \ldots$ — система окрестностей в $\Omega$, состоящих из эквивалентных одна другой точек. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и какое-то $n = 1, 2, \ldots$ Мера множества тех $P$, которые не эквивалентны своему $S_t$-образу по отношению к $K_m$, стремится к нулю при $t \to 0$, и то же самое имеет место для суммы таких множеств при всех $m = 1, \ldots, n$. При этом существует $\delta = \delta(n, \varepsilon) > 0$, такое, что эта мера $\leqq \varepsilon$ при $|t| \leqq \delta$. Пусть теперь $|t'' - t'| < \delta$. Тогда множество тех $P$, которые не эквивалентны своим $S_{t''-t'}$-образам по отношению ко всем $K_1, \ldots, K_n$, имеет меру $\leqq \varepsilon$. То же самое верно для его $S_{t'}$-прообраза, т. е. множества $\Delta(t', t'', n)$ всех $P$, для которых $S_{t'}$- и $S_{t''}$-образы не эквивалентны один другому для всех $K_1, \ldots, K_n$.

Пусть заданы последовательности $\delta_n = \delta(n, 1/2^n)$ и $t_1, t_2, \ldots$, такие, что $|t - t_n| \leqq \delta_n$. Мера множества $\Delta_n = \sum_{m=n}^{\infty} (t_m, t, m)$ не превосходит $\sum_{m=n}^{\infty} 1/2^m = 1/2^{n-1}$. Если $P$ не принадлежит $\Delta_n$, то $S_{t_n} P$ эквивалентны $S_t P$ относительно всех $K_1, \ldots, K_n$. Тогда если $P$ не лежит в $\Delta_p$ при всех $p \geqq n$, то $S_{t_p} P$ эквивалентны $S_t P$ относительно всех $K_1, \ldots, K_p$, и тем более относительно всех $K_1, \ldots, K_n$.

Пусть $P$ не принадлежит $\Delta_n$ и $K$ — некоторая окрестность $S_t P$. Тогда существует $S_t P$, для которого $K_m \subseteqq K$. Пусть $p \geqq m, n$, тогда согласно предыдущему все $S_{t_q} P$, $q \geqq p$, эквивалентны $S_t P$ относительно всех $K_1, \ldots, K_p$ одновременно (тогда тем более $P$ не принадлежит $\Delta_p$) и то же самое имеет место относительно $K_m$. Если $S_t P$ лежит в $K_m$, то и $S_{t_q} P$ ей принадлежит, и тем более принадлежит $K$. Таким образом, все $S_{t_q} P$ при $q \geqq p$ принадлежат $K$. Если это выполняется для всех $K$, то $S_{t_q} P \to S_t P$ при $q \to \infty$. Множество тех $P$, для которых $S_{t_q} P$ не стремится к $S_t P$ при $q \to \infty$, во всяком случае $\subseteqq \Delta_n$. Его (внешняя) мера $\leqq 1/2^{n-1}$. А так как это выполняется при всех $n$, то это множество имеет меру 0.

Мы показали следующее: если $|t - t_n| \leqq \delta_n$, то с точностью до $P$-множества меры 0 $S_{t_n} P \to S_t P$ при $n \to \infty$. Положим теперь для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\sum_t^{(n)} P = S_{\nu\delta_n} P$, где $\nu = \nu(n, t)$ определяется из неравенства $\nu\delta_n \leqq t < (\nu + 1)\,\delta_n$.

В интервале $\nu_0\delta_n \leqq t < (\nu_0 + 1)\delta_n$ $\sum_t^{(n)} P$ не зависит от $t$ и в его области зависимости от $P$ $S_{t_0}P$ ($t_0 = \nu_0\delta$) измерима как относительно $P$, так и относительно $[P, t]$. Так как последовательность таких интервалов покрывает все $[P, t]$-пространство ($\Omega \times T$), то эта функция $[P, t]$-измерима. Мы можем теперь определить $S'_tP$ следующим образом: если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_t^{(n)} P$, то $S'_tP$ полагается равной этому пределу, в противном случае она считается неопределенной. Очевидно, что $S'_tP$ измерима. Если теперь $|t - \nu\delta_n| \leqq \delta$, то из доказанного выше вытекает (при $t_n = \nu(n, t)\delta_n$), что при фиксированном $t$ $S'_tP$ определено всюду, кроме, быть может, множества меры 0, и совпадает с $S_tP$. При этом $S'_t$ отображает $\Omega$ минус некоторое нуль-множество взаимно однозначно и с сохранением меры на $\Omega$ минус нуль-множество. Кроме того, это отображение порождает унитарный оператор $U_t$ и имеет место равенство $S'_tS'_s = S'_{t+s}$. Тогда выполняется $D'_2$ и необходимо еще только следующее: $S'_tP$ не определено для такого $P$-множества меры 0, которое используется при взаимно однозначном отображении, и при этом сохраняется его $[P, t]$-измеримость.

Так же как в п. 6 § II, можно показать, что $[P, t] \to [S'_tP, t]$-прообраз каждого измеримого множества $\bar{N}$ измерим и, кроме того, является $[P, t] \to S'_tP$-прообразом множества $N$ (полагаем $\bar{N} = N \times T$). При этом если $s$ фиксировано, то $S'_sS'_tP$ есть измеримая функция $[P, t]$. Тогда, так как $\sum_{-t}^{(n)} S'_tP$ составлено из счетного числа таких множеств, оно и его предел при $n \to \infty$ $S_{-t}S'_tP$ тоже $[P, t]$-измеримы. Далее, $[P, t]$-множество $\bar{M}$, для которого $S_{-t}S'_tP \neq P$, тоже измеримо и для любого $t$ множество тех $P$, при которых $[P, t] \in \bar{M}$, имеет меру 0. Положив $S'_tP \in \bar{M}$ для множества, на котором $S'_t$ не было определено, получаем требуемое.

Мы доказали, что имеет место:

Теорема 3. *Для того чтобы семейство операторов, определенное согласно п. 3 введения, соответствовало некоторому потоку общего вида $S_t$, т. е. являлось купмановским семейством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* $D_4$, $D_5$ (*п.* 3 *введения*) ($D_5$ *должно выполняться только для ограниченных* $f$, $g$).

3. Дадим теперь доказательство предложения, сформулированного в п. 8 § II. Пусть задано семейство взаимно однозначных и сохраняющих меру отображений $S_t$ $\Omega$ минус множество меры 0 на $\Omega$ минус множество меры 0. Пусть, однако, $S_t$ определено для всех $t$, кроме некоторого $t$-множества $T'$, имеющего (обычную лебеговскую) меру 0, и равенство $S_tS_s \cong S_{t+s}$ при фиксированном $t$ выполняется с точностью до $s$-множества меры 0 и, наконец, пусть $S_tP$ есть измеримая функция $[P, t]$. Утверждается следующее: можно так доопределить $S_t$ для $t$ из $T'$, что получится поток (т. е. $D_2$ выполняется).

Заданным $S_t$ ($t$ не принадлежит $T'$) мы можем сопоставить унитарные $U_t$ и для любого данного $t$ ($t \notin T'$) и для всех $s$ с точностью до $s$-множества меры 0 имеем $U_tU_s = U_{t+s}$. Далее, $(U_tf, g)$ измерима по $t$, что доказывается точно так

же, как в начале п. 2. Мы можем теперь для $t$ из $T'$ так доопределить $U_t$, что всегда выполняется равенство $U_tU_s = U_{t+s}$, и тем самым получаем новые $U_t$; $t$-измеримость $(U_tf, g)$ и $D_4$, $D_5$ по-прежнему имеют место, так как доопределение происходило на $t$-множестве меры 0. Согласно теореме 3 существует поток $S_t$, порождающий это семейство $U_t$. При $t$, не принадлежащих $T'$, $S_t$ и $S_t'$ порождают один и тот же $U_t$, при этом $S_t \cong S_t'$. Если мы теперь определим $S_t'$ вне $T'$ как $S_t$, то получится эквивалентный поток $S_t''$, который является искомым расширением $S_t$.

Задача такова: $T'$ имеет меру 0; для любого $t$ вне $T'$ задан унитарный $U_t$ и для всех $s$ с точностью до $s$-множества (зависящего от $t$) меры 0 $U_tU_s = U_{t+s}$; $(U_tf, g)$ — измеримая функция $t$. Нужно для $t$, принадлежащих $T'$, так доопределить $U_t$, чтобы всюду выполнялось равенство $U_tU_s = U_{t+s}$.

Пусть $1 \cdot U_s = U_{0+s}$, тогда если 0 не принадлежит $T'$, то $U_0$ совпадает с 1; если же $0 \in T'$, мы можем исключить его из $T'$, положив $U_0 = 1$. Таким образом, можно сразу предположить, что 0 не принадлежит $T'$ и $U_0 = 1$.

При фиксированном $t$ $r$, принадлежащие $T'$, и те $r$, для которых $t + r \in T'$, образуют множество меры 0. Мы можем поэтому выбрать такое $r$, что ни $r$, ни $s = t + r$ не принадлежат $T'$. Таким образом, $s$, $r$ не принадлежат $T'$, но $t = s - r$ может туда попасть. Положим теперь $U_t' = U_sU_r^{-1}$. Однако при этом надо еще показать, что $U_t'$ не зависит от выбора $s$, $r$ (удовлетворяющих указанному выше условию). Если это доказано, то можно сделать следующее заключение: при $t \notin T'$ мы можем выбрать $r$, $t + r$ не лежащими в $T'$, так что имеет место равенство $U_tU_r = U_{t+r}$ и $U_t = U_{t+r}U_r^{-1} = U_t'$. Для произвольных $t$, $s$ мы можем выбрать $r$, $s + r$, $t + s + r$ вне $T'$, при этом

$$U_t'U_s = U_{t+s+r}U_{s+r}^{-1}U_{s+r}U_r^{-1} = U_{t+s+r}U_r^{-1} = U_{t+s}.$$

Таким образом, $U_t$ есть искомое расширение $U_t$. Осталось показать только следующее: если $s$, $r$, $s'$, $r'$ не принадлежат $T'$ и $s - r = s' - r'$, то $U_sU_r^{-1} = U_{s'}U_{r'}^{-1}$.

Для этого достаточно доказать следующее: из того, что $s$, $r$, $s'$, $r'$ не принадлежат $T'$ и $s + r = s' + r'$, вытекает, что $U_sU_r = U_{s'}U_{r'}$. Затем, если $r' = s$, $s' = r$ заданы, то $U_sU_r = U_rU_s$, т. е. операторы $U_t$ попарно коммутируют. И при этом равенства $U_sU_r = U_{s'}U_r$ и $U_sU_{r'}^{-1} = U_{s'}U_r^{-1}$ эквивалентны. Равенство $s + r = s' + r'$ эквивалентно $s - r' = s' - r$, и мы получаем предыдущее утверждение, подставив $s$, $r'$, $s'$, $r$ вместо $s, r, s', r'$.

Для того чтобы доказать сформулированное выше утверждение, рассмотрим доказательство теоремы 1 позапрошлой статьи автора [13]. Доказательство того, что для всех $t$, не принадлежащих множеству $T''$ ($\supseteq T'$) меры 0, $U_t$ является аппроксимативно сильно непрерывным (см. указанную работу) [14], проходит в данном случае без изменений. Если $t$ не принадлежит $T'$, то для всех $s$ с точностью до множества меры 0 $U_tU_s = U_{t+s}$ и также

$$\| U_{t+s}f - U_tf \| = \| U_tU_sf - U_tU_0f \| = \| U_t(U_sf - U_0f) \| = \| U_sf - U_0f \|.$$

Если мы применим это равенство для $t$, не лежащих в $T''$, то получаем, что $U_t$ для $t = 0$ аппроксимативно сильно непрерывно. Если же мы его применим для тех $t$, которые лежат в $T'$, то можно показать, что из аппроксимативно сильной непрерывности $U_t$ при $t = 0$ то же самое следует для всех $t \in T'$, т. е. $T' = T''$.

Пусть теперь даны $s, r, s', r'$, не лежащие в $T'$, и $s + r = s' + r'$. Пусть $f \in \mathfrak{H}$, $\varepsilon > 0$. Тогда найдется (предполагается, что $U_t$ при $t = r$ и $t = r'$ аппроксимативно сильно непрерывно) $\delta_1 > 0$, такое, что для любого $0 < \delta \leqq \delta_1$ при $|t - r| \leqq \delta$ имеет место неравенство $\|U_t f - U_r f\| \leqq \varepsilon/2$ с точностью до множества меры, меньшей $\delta$, и такое $\delta_2 > 0$, что для любого $0 < \delta \leqq \delta_2$ при $|t' - r'| \leqq \delta$ с точностью до множества меры, меньшей $\delta$, выполняется неравенство $\|U_{t'} f - U_{r'} f\| \leqq \varepsilon/2$. Далее с точностью до множества меры 0 имеем $U_s U_t = U_{s+t}$ и $U_{s'} U_{t'} = U_{s'+t'}$. Пусть $\delta = \mathrm{Min}(\delta_1, \delta_2)$. Если мы свяжем $t$ и $t'$ между собой условием $s + t = s' + t'$, то получим, что с точностью до множества меры, меньшей $2\delta$, выполняются все четыре условия. Множество, для которого $|t - r| < \delta$ и $|t' - r'| < \delta$, имеет меру $2\delta$. Далее, существует $t$, для которого выполняются все условия. Итак, имеем

$$U_s U_t = U_{s+t} = U_{s'+t'} = U_{s'} U_{t'},$$

$$\|U_s U_t f - U_s U_r f\| = \|U_s (U_t f - U_r f)\| = \|U_t f - U_r f\| \leqq \varepsilon/2,$$

$$\|U_{s'} U_{t'} f - U_{s'} U_{r'} f\| = \|U_{s'} (U_{t'} f - U_{r'} f)\| = \|U_{t'} f - U_{r'} f\| \leqq \varepsilon/2$$

и $\|U_s U_r f - U_{s'} U_{r'} f\| \leqq \varepsilon$. Поскольку это выполняется для любого $\varepsilon > 0$, то $U_s U_r f = U_{s'} U_{r'} f$, а так как это верно для всех $f$, то $U_s U_r = U_{s'} U_{r'}$, что и утверждалось.

Тем самым доказательство закончено.

## IV. $U_t$-СЕМЕЙСТВА С ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

1. В п. 3 введения мы описали связь между $U_t$-семейством, разложением единицы $E(\lambda)$ и инфинитезимальным оператором $A$, основанную на теореме Стоуна. Известно, что понимается под спектром $A$ и как он классифицируется [55]. Мы хотим перенести это на $E(\lambda)$ и $U_t$, определив для них понятие спектра.

На основании теоремы 2 из § II можно рассматривать только такие $U_t$-семейства, которые порождены эргодическими потоками. Таким образом,

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0}} (E(+\varepsilon) - E(-\varepsilon)) = \lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0}} (E(0) - E(-\varepsilon)) = E_0$$

(так как $E(\lambda)$ полунепрерывно справа!) и только для постоянных $f$ справедливо уравнение $E_0 f = f$. Если поток нуль-эргодичен ($\mu(\Omega) = \infty$), то в $\mathfrak{H}$ не лежат никакие константы, кроме 0, при этом $E_0 = 0$. Для собственно эргодического потока ($\mu(\Omega)$ конечна) константы $f$ принадлежат $\mathfrak{H}$, они могут быть представлены в виде $c\varphi_0$, где $\varphi_0$ — нормировка $1/\sqrt{\mu(\Omega)}$ и $E_0 = P_{[\varphi_0]}$ [56]. В первом слу-

---

55 См. [19, 11].

56 Ср. с теорией операторов проектирования в [7, с. 74—78].

чае 0 не принадлежит точечному спектру; во втором 0 ему принадлежит и при этом 0 является простым собственным значением, соответствующим собственной функции $\varphi_0 = 1/\sqrt{\mu(\Omega)}$.

Случай нуль-эргодичности обсуждался Купманом (см. примеч. 1). Он считал, что здесь есть точечный спектр, если для некоторой $f \neq 0$ $Af = \lambda f$, т. е. $U_t f = e^{i\lambda t} f$. Отсюда следует

$$U_t \,|f(P)|^{57} = |U_t f(P)| = |e^{i\lambda t} f(P)| = |f(P)|.$$

Итак, $|f(P)|$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению 0, но 0 не может быть собственным значением, поэтому $|f(P)| = 0$ и $f(P) = 0$. Таким образом, в этом случае нет точечного спектра и спектр является чисто непрерывным.

В собственно эргодическом случае мы можем положить $\mu(\Omega) = 1$ (ср. с теоремой 2). Далее, из результатов Купмана вытекает для любой собственной функции $f$, соответствующей собственному значению $\lambda$, что $|f|$ является собственной функцией с собственным значением 0. При этом важно только, что $|f|$ есть константа, т. е.

$$|f| = c > 0, \quad f(P) = ce^{i\theta(P)} \quad \text{и} \quad U_t f(P) = f(S_t P) = e^{i\lambda t} f(P)$$

означает, что $\theta(S_t P) = \theta(P) + \lambda t \ldots \mod 2\pi$. Очевидно, что $\theta(P)$ определена по $\mod 2\pi$ и (если, например, ограничиться рассмотрением чисел $\geq 0$ и $< 2\pi$) измерима. Обратно, если $\theta(P)$ удовлетворяет этим трем условиям, то любая $f(P) = ce^{i\theta(P)}$ принадлежит $\mathfrak{H}$ и $U_t f(P) = f(S_t P) = e^{i\lambda t} f(P)$, т. е. является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda$. Итак, имеет место:

Теорема 4. (Купман, см. примеч. 1). *Пусть $\Omega$ собственно эргодично. Функция $f(P)$ является собственной, отвечающей собственному значению $\lambda$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $ce^{i\theta(P)}$. Здесь $\theta(P)$ — измеримая функция, определенная по* $\mod 2\pi$, *для которой $\theta(S_t P) = \theta(P) + \lambda t$.*

Две собственные функции считаются несущественно отличающимися, если они отличаются на постоянный множитель; аналогично для двух $\theta$, если они отличаются на постоянное слагаемое. При $\lambda = 0$ из эргодичности следует, что $f = \text{const}$ и также $\theta = \text{const}$, т. е. по существу $\theta = 0$.

Мы будем называть, исходя из соответствующих понятий классической механики, $\theta(P)$ из теоремы 4 угловой переменной, отвечающей собственному значению $\lambda$.

Некоторые ее свойства очевидны: если $\theta_1$, $\theta_2$ — угловые переменные, отвечающие собственному значению $\lambda$, то $\theta_1 - \theta_2$ отвечает собственному значению 0, т. е. постоянна, и поэтому $\theta_1 = \theta_2 + \text{const}$. Таким образом, данному $\lambda$ соответствует (в существенном) в точности одна угловая переменная. Если $\theta$ и $\bar{\theta}$ — угловые переменные, соответствующие собственному значению $\lambda$, то $\bar{\theta} - \theta = 2iJ\theta = \text{const}$, $J\theta = \text{const}$, т. е. каждая угловая переменная (в существенном) действительна. Если $\theta_1$ и $\theta_2$ — угловые переменные, соответствующие собственным значениям $\lambda_1$ и $\lambda_2$, то $\theta_1 + \theta_2$ есть угловая переменная, отвечающая собствен-

[57] Очевидно, что $U_t F(f(P)) = F(U_t f(P))$. Если $f(P)$ принадлежит $\mathfrak{H}$, то и $|f(P)|$ принадлежит $\mathfrak{H}$.

ному значению $\lambda_1 + \lambda_2$. Угловые переменные и соответствующие им собственные значения образуют модуль по сложению. Последние составляют только точечный спектр $U_t$, который, таким образом, вместе с $\lambda_1$, $\lambda_2$ содержит и $\lambda_1 \pm \lambda_2$. Согласно предыдущему $U_t$-семейство имеет только простые собственные значения.

Если $\theta_1$, $\theta_2$ — (существенно) различные угловые переменные (соответствующие различным собственным значениям), то собственные функции $e^{i\theta_1}$ и $e^{i\theta_2}$ ортогональны, так что

$$\int_\Omega \exp(i\theta_1(P))\,\overline{\exp(i\theta_2(P))}\,dv_P = \int_\Omega \exp(i(\theta_1(P) - \theta_2(P)))\,dv_P = 0.$$

2. Продолжим теперь наше рассмотрение. Пусть задана счетная бесконечная система чисел $Z$, содержащая вместе с $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$. Существует ли конечно-эргодическое $U_t$-семейство с чисто точечным спектром (как мы показали выше, он должен быть простым), такое, что этот точечный спектр совпадает с $Z$?

Если задано такое $U_t$-семейство, то достаточно найти полную ортонормированную систему ограниченных $\varphi_\lambda$ ($\lambda$ пробегает $Z$), обладающих свойством $\varphi_\lambda\varphi_\mu = \varphi_{\lambda+\mu}$. Так как любая $f$ может быть представлена как $\Sigma_{\lambda\in Z} a_\lambda\varphi_\lambda$ и $\|f\|^2 = \Sigma_{\lambda\in Z} |a_\lambda|^2$ (полнота ортонормированной системы!), мы можем операторы $U_t$ определить как $U_t(\Sigma_{\lambda\in Z} a_\lambda\varphi_\lambda) = \Sigma_{\lambda\in Z} e^{i\lambda t} a_\lambda\varphi_\lambda$. Они унитарны, и ясно, что $U_tU_s = U_{t+s}$. Далее, $U_tf\cdot U_tg = U_tf\cdot g$ для $f = \varphi_\lambda$, $g = \varphi_\mu$ и отсюда для $f$, являющихся линейными комбинациями функций $\varphi_\lambda$ и их пределов (ограниченность $g = \varphi_\mu$ обеспечивает возможность замыкания по непрерывности), т. е. для всех $f$. Если $f$ ограничена, то это переносится аналогично на линейные комбинации $\varphi_\mu$ и их пределы (замыкания по непрерывности! ср. с предыдущим). При этом выполняются $D_4$, $D_5$ и по теореме 3 семейство $U_t$ действительно порождается некоторым потоком $S_t$. Далее, легко видеть, что $U_t\varphi_\lambda = e^{i\lambda t}\varphi_\lambda$, т. е. $\varphi_\lambda$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda$. Так как $\varphi_\lambda$ образуют полную ортонормированную систему, то не существует других собственных функций. При этом $U_t$-семейство имеет чисто точечный спектр, который является простым и совпадает с $Z$. Так как $0 = \lambda - \lambda$ принадлежит $Z$, то 0 есть простое собственное значение. Собственная функция $\varphi_0$, соответствующая 0, в силу $\varphi_0\varphi_\mu = \varphi_\mu$ равна 1, т. е. постоянна. При этом $S$ собственно эргодичен, и мы получаем требуемое.

Существование полной ортонормированной системы $\varphi_\lambda$, где $\lambda \in Z$, с заранее заданными собственными значениями есть утверждение красивой теоремы Хаара [58].

3. Пусть теперь заданы два $m$-пространства $\Omega'$, $\Omega''$ с соответствующими $l$-мерами $\mu'^*$, $\mu''^*$ и потоками $S'_t$, $S''_t$. Эти потоки собственно эргодичны, $\mu(\Omega') = \mu(\Omega'') = 1$. Соответствующие семейства операторов $U'_t$, $U''_t$ могут иметь один и тот же чисто точечный спектр $Z$.

[58] См. [20, с. 132, теорема II], а именно $Z$ соответствует рассматриваемым там коммутативным группам $A$, $B$, $C$, ...; $\lambda \in Z$ соответствуют $X_A^{(s)}$, $X_B^{(s)}$, а «+» есть закон композиции в группе.

Так как оба спектра должны быть простыми, то каждому $\lambda$ из $Z$ отвечает по одной собственной функции $\varphi_\lambda$ и $\varphi''_\lambda$ соответственно операторов $U'_t$ и $U''_t$ (собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, по модулю равного 1). Как $\varphi_\lambda$, так и $\varphi''_\lambda$ образуют полную ортонормированную систему.

Абсолютная величина $\varphi_\lambda$ равна $c_\lambda$ и $\|\varphi_\lambda\|^2 = c_\lambda'^2 \mu(\Omega)$, а так как левая часть этого равенства и $\mu(\Omega)$ равны 1, то $c_\lambda = 1$, т. е. $|\varphi_\lambda| = 1$. Имеем также $|\varphi_{\lambda_1} \cdot \varphi_{\lambda_2}| = 1$, т. е. $\varphi_{\lambda_1} \cdot \varphi_{\lambda_2}$ нормирована. Так как $\varphi_{\lambda_1} \cdot \varphi_{\lambda_2}$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_1 + \lambda_2$, то должно выполняться равенство $\varphi_{\lambda_1} \cdot \varphi_{\lambda_2} = c_{\lambda_1,\lambda_2} \varphi_{\lambda_1+\lambda_2}$, где $c'_{\lambda_1,\lambda_2}$ — константа, $|c'_{\lambda_2,\lambda_2}| = 1$. Аналогично можно показать, что $\varphi''_{\lambda_1} \cdot \varphi''_{\lambda_2} = c''_{\lambda_1,\lambda_2} \varphi''_{\lambda_1+\lambda_2}$, где $c''_{\lambda_1,\lambda_2}$ — константа и $|c''_{\lambda_1,\lambda_2}| = 1$.

Мы хотим теперь перейти к новой полной ортонормированной системе, состоящей из собственных функций $U_t$ вида $\psi'_\lambda = d'_\lambda \varphi'_\lambda$, где $d_\lambda$ — постоянные, равные по абсолютной величине 1 и такие, что из $k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n = 0$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из $Z$, $k_1, \ldots, k_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) вытекает, что $(\psi'_{\lambda_1})^{k_1} \ldots (\psi_{\lambda_n})^{k_n} = 1$. Для этой цели упорядочим элементы $Z$ произвольным образом, т. е. построим последовательность $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ Пусть $d'_{\lambda^{(1)}}, \ldots, d_{\lambda^{(m)}}$ и соответственно $\psi'_{\lambda^{(1)}}, \ldots$ $\ldots, \psi_{\lambda^{(m)}}$ уже выбраны так, что из $k_1\lambda^{(1)} + \ldots + k_m\lambda^{(m)} = 0$ ($k_1, \ldots, k_m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) вытекает $(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m} = 1$. Мы хотим теперь $d_{\lambda^{(m+1)}}$ и соответственно $\psi_{\lambda^{(m+1)}}$ определить так, чтобы из $k_1\lambda^{(1)} + \ldots + k_m\lambda^{(m)} + k_{m+1}\lambda^{(m+1)} = 0$ ($k_1, \ldots, k_m, k_{m+1} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) вытекало

$$(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m} (\psi_{\lambda^{(m+1)}})^{k_{m+1}} = 1.$$

Так как изложенное требование выполняется для $m = 0$, то мы по индукции получаем, что все $d_{\lambda^{(1)}}, d_{\lambda^{(2)}}, \ldots$ и $\psi_{\lambda^{(1)}}, \psi_{\lambda^{(2)}}, \ldots$, т. е. и все $d'_\lambda$, $\psi'_\lambda$, $\lambda \in Z$, удовлетворяют нашему условию. Рассмотрим теперь шаг индукции от $m$ к $m+1$.

Пусть имеется совокупность равенств

$$k_1\lambda^{(1)} + \ldots + k_m\lambda^{(m)} + k_{m+1}\lambda^{(m+1)} = 0 \qquad (k_1, \ldots, k_m, k_{m+1} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Если $k_{m+1} = 0$, то $k_1\lambda^{(1)} + \ldots + k_m\lambda^{(m)} = 0$, поэтому согласно предположению

$$(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m} = 1$$

и тогда

$$(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m} (\psi_{\lambda^{(m+1)}})^{k_{m+1}} = 1,$$

т. е. независимо от выбора $d_{\lambda^{(m+1)}}$ все в порядке. Таким образом, если не требовать, чтобы $k_{m+1} \neq 0$, то все доказано. Если же это потребовать, то пусть $Z_1$ есть множество таких $k_{m+1}$. Тогда $Z_1$ есть множество целых чисел, оно содержит вместе $k$, $l$ и $k + l$ и состоит не только из одного 0; при этом $Z_1$ — множество, состоящее из всех чисел, кратных одному определенному целому поло-

жительному числу $k^{(0)}$. Тогда будет выполнено равенство

$$k_1^{(0)}\lambda^{(1)} + \ldots + k_m^{(0)}\lambda^{(m)} + k^{(0)}\lambda^{(m+1)} = 0.$$

Достаточно добиться того, чтобы выполнялось

$$(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1^{(0)}} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m^{(0)}} (\psi_{\lambda^{(m+1)}})^{k^{(0)}} = 1,$$

так как при

$$k_1\lambda^{(1)} + \ldots + k_m\lambda^{(m)} + k_{m+1}\lambda^{(m+1)} = 0$$

имеет место $k_{m+1} = hk^{(0)}$ ($h$ — целое) и

$$(k_1 - hk_1^{(0)})\,\lambda^{(1)} + \ldots + (k_m - hk_m^{(0)})\,\lambda^{(m)} = 0.$$

Далее по предположению

$$(\psi'_{\lambda^{(1)}})^{k_1 - hk_1^{(0)}} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m - hk_m^{(0)}} = 1$$

и, следовательно,

$$(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m} (\psi_{\lambda^{(m+1)}})^{k_{m+1}} = 1.$$

Теперь, используя равенства

$$\varphi'_{\lambda_1}\varphi'_{\lambda_2} = c'_{\lambda_1,\lambda_2}\varphi'_{\lambda_1+\lambda_2}, \qquad |c'_{\lambda_1,\lambda_2}| = 1$$

и замечая, что $\psi'_\lambda = d'_\lambda\varphi_\lambda$, $|d'_\lambda| = 1$, получаем

$$(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1^{(0)}} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m^{(0)}} = b'_1\varphi_{k_1^{(0)}\lambda^{(1)}+\ldots+k_m^{(0)}\lambda^{(m)}} = b'_1\varphi'_{-k^{(0)}\lambda^{(m+1)}},$$

$$(\varphi_{\lambda^{(m+1)}})^{-k^{(0)}} = b'_2\varphi_{-k^{(0)}\lambda^{(m+1)}}, \qquad |b'_1| = |b_2| = 1,$$

и тем самым

$$(\psi_{\lambda^{(1)}})^{k_1^{(0)}} \ldots (\psi_{\lambda^{(m)}})^{k_m^{(0)}} (\varphi_{\lambda^{(m+1)}})^{k^{(0)}} = b'_1/b_2.$$

Нам нужно теперь выбрать такое $d'_{\lambda^{(m+1)}}$, что $(d_{\lambda^{(m+1)}})^{k^{(0)}} = b_2/b_1$, и мы получим то, что требуется ($|d'_{\lambda^{(m+1)}}|$, само собой, равен 1).

Из доказанного вытекает, в частности,

$$\psi'_{\lambda_1}\psi_{\lambda} = \psi'_{\lambda_1+\lambda} \qquad (\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad k_1 = k_2 = 1, \quad k_3 = -1).$$

Будем вместо $\psi'_\lambda$ писать $\varphi'_\lambda$; мы можем считать с самого начала, что $\varphi'_{\lambda_1}\varphi'_{\lambda_2} = \varphi_{\lambda_1+\lambda_2}$. Аналогично можно предположить, что $\varphi''_{\lambda_1}\varphi''_{\lambda_2} = \varphi''_{\lambda_1+\lambda_2}$.

Поскольку $\varphi'_\lambda$, $\lambda \in Z$, и $\varphi''_\lambda$, $\lambda \in Z$, есть две полные ортонормированные системы, то равенство

$$V(\Sigma_{\lambda\in Z} a_\lambda\varphi'_\lambda) = \Sigma_{\lambda\in Z} a_\lambda\varphi_\lambda$$

определяет унитарный оператор $V$. Имеем $Vf\cdot Vg = V(f\cdot g)$ при $f = \varphi'_\lambda$, $g = \varphi_\mu$, и

отсюда, так же как в конце п. 2, выводится, что это равенство справедливо для всех $f$, $g$, если $f$ ограничена. Таким образом, для $V$ выполняется $D_5$. На основании доказанного в п. 1 § III должно существовать взаимно однозначное и сохраняющее меру отображение из $\Omega'$ минус некоторое множество меры 0 на $\Omega''$ минус множество меры 0, порождающее $V$ при помощи равенства $Vf(P) = f(\Sigma P)$.

Далее,

$$U''_t\varphi''_\lambda = e^{it\lambda}\varphi''_\lambda, \qquad VU'_tV^{-1}\varphi''_\lambda = VU'_t\varphi'_\lambda = Ve^{it\lambda}\varphi_\lambda = e^{it\lambda}\varphi''_\lambda,$$

т. е. $U''_tf = VU'_tV^{-1}f$ для всех $f = \varphi_\lambda$. Отсюда вытекает, что это равенство справедливо также для линейных комбинаций функций $\varphi'_\lambda$ и их предельных точек, т. е. для всех $f$, причем $U''_t = VU'_tV^{-1}$. С помощью выражений для $S'_t$, $S''_t$, $\Sigma$ получаем

$$f(S''_tP'') = f(\Sigma S'_t\Sigma^{-1}P''_t), \qquad P'' \in \Omega'',$$

и, так как это верно для всех $f$, имеем $S''_t \cong \Sigma S'_t\Sigma^{-1}$. Таким образом, потоки $S'_t$ и $S''_t$ изоморфны.

4. Собирая вместе доказанное ранее, мы можем сформулировать:

Т е о р е м а 5. *Если $\mu(\Omega) = 1$ и поток $S_t$ в $\Omega$ является (собственно) эргодическим и при этом семейство $U_t$ имеет чисто точечный спектр, то этот спектр представляет собой счетное бесконечное множество, состоящее из действительных чисел и содержащее вместе с $\lambda$, $\mu$ также и $\lambda \pm \mu$.*

*Обратно, таким способом можно получить все счетные бесконечные множества $Z$ действительных чисел, содержащие вместе с $\lambda$, $\mu$ и $\lambda \pm \mu$, и при этом $Z$ определяет $\Omega$, $S_t$ в существенном (т. е. с точностью до изоморфного отображения, ср. $D_3$) однозначно.*

Каждое множество чисел $Z$ с описанными свойствами, т. е. каждый «числовой модуль», таким образом, определяет однозначно, с точностью до изоморфного отображения собственно эргодический поток. Тем самым доказано существование бесконечно многих типов эргодических потоков. При этом было бы поучительно для простых «числовых модулей» $Z$ непосредственно построить соответствующие потоки (с точностью до изоморфного отображения единственные).

Если, например, $Z$ имеет конечный базис, т. е. существует система чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$, такая, что, во-первых, из равенства $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0$ ($k_1, \ldots, k_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) вытекает $k_1 = \ldots = k_n = 0$ и, во-вторых, $Z$ совпадает с множеством всех сумм вида $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n$ ($k_1, \ldots, k_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то мы получаем известный пример потока, построенный Вейлем[59]. А именно, пусть $\Omega$ — $n$-мерный куб, $P = [u_1, \ldots, u_n]$, $0 \leqq u_1 < 1, \ldots, 0 \leqq u_n < 1$, $u^*$ — обычная лебеговская внешняя мера. Пусть

$$S_t[u_1, \ldots, u_n] = [\{u_1 + \omega_1 t/2\pi\}, \ldots, \{u_n + \omega_n t/2\pi\}],$$

где $\{u\}$ — остаток от $u$ по mod $1 : 0 \leqq \{u\} < 1$, $u - \{u\}$ — целое. Известно, что функции

$$\exp[2\pi i(k_1u_1 + \ldots + k_nu_n)], \qquad k_1, \ldots, k_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

[59] См. [21].

образуют полную ортонормированную систему; и так как

$$S_t \exp[2\pi i (k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n)] = \exp[i(k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n) t] \times \times \exp[2\pi i (k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n)],$$

то они являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n$. При этом других собственных функций нет. Чисто точечный спектр совпадает с $Z$, а 0 есть простое собственное значение, соответствующее собственной функции 1, т. е. поток собственно эргодичен. Данные $\Omega$ и $S_t$ и представляют собой искомый пример.

Отметим еще, что если мы при $n = 1$ множество $k\omega$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) рассмотрим в качестве $Z$, то $S_t$ будет просто периодическим движением с периодом $2\pi/\omega$. Это $Z$ есть единственный не всюду плотный «числовой модуль» [60]. Во всех других примерах с точечным спектром соответствующий модуль является всюду плотным.

Несколько более сложный пример получается следующим образом: $Z$ — множество всех диадически рациональных чисел ($n/2^p$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, p = 1, 2, \ldots$), тогда в $Z$ не существует конечного базиса. Пусть $\Omega$ — квадрат; $p = [u, v]$, $0 \leqq u < 1$, $0 < v < 1$; $\mu^*$ — обычная лебегова внешняя мера. Отображение $S_t$ определяется так: $\varphi(v)$ есть следующее взаимно однозначное и сохраняющее меру отображение $0 < v < 1$ на себя: $1/2 < v < 1$ передвигается на $1/2$ в $0 < \varphi(v) < 1/2$, $1/4 < v < 1/2$ — на $1/4$ в $1/2 < \varphi(v) < 3/4$, $1/8 < v < 1/4$ на $5/8$ в $3/4 < \varphi(v) < 7/8, \ldots$, а оставшиеся точки $v = 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ в этом же порядке сопоставляются оставшимся $\varphi(v) = 1/2, 3/4, 7/8, \ldots$ [61] Пусть $S_t[u, v]$ определено, при этом можно $u$ увеличить на $t/2\pi$ (т. е. при $t > 0$ сдвинуть вправо, а при $t < 0$ — влево), но левая и правая границы $\Omega$ (т. е. $u = 1$ и $u = 0$ соответственно) пересекаются столь часто, что $u$ на левой и правой границах переставляются обратно и $v$ заменяется на $\varphi(v)$ и $\varphi^{-1}(v)$ соответственно (обратное!) [62]. Спектр семейства $U_t$ определяется из соображений удобства следующим образом. Попытаемся в каждом $2^p$-интервале $(m-1)/2^p < v < m/2^p$ ($m = 1, 2, \ldots 2^p$) так

---

[60] В $Z$ есть элемент $\lambda \neq 0$, и, следовательно, элемент, положительный : $|\lambda| = \pm\lambda$. Если среди его положительных элементов есть наименьший, то можно сделать вывод, что для любого $\lambda$ из $Z$ существует некоторое $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ для которого $\lambda_0 > \lambda - k\lambda_0 \geqq 0$, и при этом не может быть $\lambda - k\lambda_0 > 0$, т. е. $\lambda - k\lambda_0 = 0$ и $\lambda = k\lambda_0$. Тем самым существует описанное в настоящей работе множество. В противном случае не существует нижней границы $\lambda_0$ для $\lambda > 0$ из $Z$. Для $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda_1$ из $Z$, такое, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_0 + \varepsilon$, и $\lambda_2$ из $Z$, такое, что $\lambda_0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Поэтому $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $\lambda < \varepsilon$ и лежит в $Z$. Отсюда следует, что для любого $\mu$ мы можем найти $k$, такое, что $\mu < k\lambda < \mu + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно, и тем самым $Z$ всюду плотно.

[61] С помощью формул: $\varphi(v) = v + 1 - 3/2^n$ при $1/2^n < v < 1/2^{n-1}$ и $\varphi(v) = 1 - v$ при $v = 1/2^n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

[62] С помощью следующих формул: пусть $\varphi^n(v)$ — итерация $\varphi(v)$ и соответственно $\varphi^{-1}(v)$ (для $n > 0$ и соответственно $n < 0$), тогда $S_t[u, v] = \left[\left\{u + \frac{t}{2\pi}\right\}, \varphi^{u + \frac{t}{2\pi} - \left\{u + \frac{t}{2\pi}\right\}}(v)\right]$ $\left(u + \frac{t}{2\pi} - \left\{u + \frac{t}{2\pi}\right\} - \text{целое}\right)$.

определить постоянную $\sigma_{n,p}(v)$, что $\varphi_{n,p}(u, v) = \sigma_{n,p}(v) \exp\left(2\pi i \frac{n}{2^p} u\right)$ есть нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению $n/2^p$. Можно показать, что для любых $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, p = 1, 2, \ldots$ существует лишь один способ сделать это (с точностью до несущественного постоянного множителя). При данной $\varphi_{n,p}$ достаточно потребовать от $\varphi_{2n,p+1}$, чтобы $\varphi_{n,p} = \varphi_{2n,p+1}$; так как $\varphi_{n,p}$ зависит только от числа $\lambda = n/2^p$, то ее можно обозначить через $\varphi_\lambda$. В силу того, что $\varphi_\lambda$ — собственные функции, они образуют ортонормированную систему. Можно показать, что она полна. Таким образом, не существует других собственных функций. При этом чисто точечный спектр совпадает с $Z$ и 0 есть простое собственное значение, отвечающее, естественно, собственной функции 1, т. е. поток собственно эргодичен. Соответствующие $\Omega$, $S_t$ представляют собой искомый пример. Мы опускаем простые этапы доказательств для рассмотренных двух примеров.

По аналогичной схеме можно разобрать примеры многих других «числовых модулей» $Z$, на которых мы более не останавливаемся.

## V. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ $U_t$-СЕМЕЙСТВАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

1 Семейства $U_t$ с чисто непрерывным спектром (за исключением простого собственного значения 0, не имеющие точечного спектра) являются, как мы уже отмечали в п. 4 введения, особенно важными по двум причинам. Во-первых, обобщение эргодической теоремы е) из п. 2 введения (ср. примеч. 2) относится к ним и только к ним, т. е. они являются, как будет вскоре объяснено, потоками, не обладающими «a la longue» настоящими собственными функциями.

Во-вторых, предполагается, что $U_t$-семейства в общем случае имеют чисто непрерывный спектр, т. е. наличие точечного спектра является редким исключением. Последнее мы попытаемся пояснить в § VI. В связи с изложенным выше возникает желание исследовать их по меньшей мере столь же подробно, как в § V это было сделано для точечного спектра.

Прежде всего, можно ожидать, что непрерывный спектр, как и точечный, всегда является простым [15] (эргодичность потока предполагается!). Далее, что верна теорема об изоморфизме в том виде, как она сформулирована в п. 3 введения и доказана во второй половине теоремы 5 для чисто точечного спектра [6]. То есть что два потока $\Omega$, $S_t$ с унитарно эквивалентными $U_t$-семействами в существенном (с точностью до взаимно однозначного и сохраняющего меру отображения) совпадают Тогда мы знали бы, что все важные для нас свойства потоков (инвариантные относительно изоморфизма, ср. п. 3 введения) установлены. Например, в случае точечного спектра по теореме 5 это имеет место; верно это и в случае непрерывного спектра и все определяется его типом Хеллингера (ср. примеч. 24). Сформулируем теперь то, что мы собираемся показать, во всяком случае, для дифференцируемых потоков (и что предположительно верно для всех): если непрерывный спектр существует всюду, то он занимает всю числовую ось $-\infty < \lambda < \infty$, тем самым он распадается только на типы Хеллингера.

Наконец, мы знаем из теоремы 5, что точечный спектр не может быть произ-

вольным (бесконечным, счетным) множеством чисел. Более того, существует ограничение, согласно которому он не может быть ничем, кроме «числового модуля». Было бы важно выяснить, какие ограничения накладываются на тип Хеллингера. Если, например, он всегда является простым типом («λ»), то отсюда вытекало бы значительное усиление е) (см. п. 2 введения, а также [3] и примеч. 24). Далее, это имеет поразительное следствие, согласно которому все потоки с чисто непрерывным спектром (как раз предположительно в общем случае) в существенном совпадают (изоморфны). Однако делать такие предположения весьма рискованно[61].

Из всего этого мы, к сожалению, пока ничего не умеем доказывать. В дальнейшем будет доказана только возможность расширения непрерывного спектра для дифференцируемых потоков

2. Пусть $\Omega$ — $m$-пространство, которое «в малом» может быть представлено в $n$-мерных координатах, т. е. для любой $P_0$ в некоторой подходящей окрестности $P=[u_1, \ldots, u_n]$, и $S_t$ — эргодический и дифференцируемый поток в $\Omega$. Пусть $P$ есть некоторая точка из $\Omega$. Обозначим через $S(P)$ ее орбиту $S_tP$, $-\infty < t < \infty$. Если $S_tP$ имеет двойную точку, т. е. $S_{t_1}P = S_{t_2}P$, $t_1 < t_2$, то, применив $S_{t-t_1}$, получаем $S_tP = S_{t+(t_2-t_1)}P$, т. е. существует положительный период $t_2 - t_1$. Минимальный такой период обозначим через $\tau$. Если это выполняется для любой $P$, то легко видеть, что $\tau = \tau(P) > 0$ есть измеримая функция $P$. При этом существует такая точка $P_0$, в которой она аппроксимативно непрерывна (это верно даже для всех $P_0$ с точностью до множества меры 0 [63]). Пусть $K$ — окрестность $P_0$; $K_1$ — множество таких $S_tP$, что $P \in K$, $0 \leqq t \leqq \tau(P_0) + 1$. Мера этого множества, очевидно, конечна, и если $K$ стягивается на $P_0$, то оно стягивается на отрезок траектории $S_tP_0$, $0 \leqq t \leqq \tau(P_0) + 1$ (так как $S_tP$ непрерывна!) и его мера стремится к мере $S(P_0)$. Если последняя меньше $\mu(\Omega)$, то мы можем выбрать $K$ таким, что $\mu(K_1) < \mu(\Omega)$. Так как $\tau(P)$ аппроксимативно непрерывна при $P = P_0$, то существует множество $\Lambda \subseteqq K$, $\mu(\Lambda) > 0$, на котором $\tau(P) \leqq \tau(P_0) + 1$ (можно утверждать даже большее). Пусть $\Lambda$ есть множество $S_tP$, где $P \in \Lambda$, $0 \leqq t \leqq \tau(P_0) + 1$. В силу $\tau(P) \leqq \tau(P_0) + 1$ множество $\Lambda_1$, являющееся суммой $S(P)$, $P \in \Lambda$, также $S_t$-инвариантно. При этом

$$\mu(\Lambda) \geqq \mu(\Lambda_1) > 0, \qquad \mu(\Lambda) \leqq \mu(K_1) < \mu(\Omega).$$

Таким образом, $S_t$ не эргодичен.

Итак, пусть $\mu(S(P_0)) = \mu(\Omega)$. Так как допустимо пренебрежение множествами меры 0, мы можем положить $S(P_0) = \Omega$. Множество $S(P_0)$ взаимно однозначно отображается на $s \geqq 0$, $\leqq \tau\ (=\tau(P_0))$ с помощью соответствия $s \to S_sP_0$. При этом мы можем представить $\Omega$ как множество $0 \leqq t < \tau$ при помощи переноса меры. Тогда

$$S_tS_s = S_{t+s} = S_{t+s-e\tau}, \qquad e = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Теперь $S_t$ определяется так: $S_ts = t + s \ldots \mathrm{mod}\, \tau$. Отсюда, так как мера должна быть инвариантна относительно этой операции, нетрудно вывести, что она является лебеговской (быть может, с точностью до умножения на константу

---

[63] См., например, [17].

$a > 0$). Тогда ясно, что функции $\frac{1}{\sqrt{a\tau}} e^{\frac{2\pi i}{\tau} ks}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, являются собственными функциями $U_t$, отвечающими собственным значениям $2\pi k/\tau$. Так как они образуют полную ортонормированную систему, то других собственных функций нет. Возникает тем самым чисто точечный спектр $Z: 2\pi k/\tau$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Это есть обсуждавшийся в п. 4 § IV самый простой случай: обычное периодическое движение. В частности, $n = 1$.

Если это не так, то можно найти соответственно обычную траекторию $S(P_0)$, у которой все $S_tP_0$ различны. Возьмем какое-нибудь $t_0$, которое пока зафиксируем. Мы можем выбрать такую $(n-1)$-мерную площадку $F$ в $\Omega$, содержащую $P_0$ и трансверсальную $S(P_0)$, что все $S_tF$, $0 \leqq t \leqq t_0$, не пересекаются (дифференцируемость! $F$ должно быть только достаточно малой). Пусть $F(t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$,— множество точек вида $S_tP$, где $P \in F$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Так как $F(t_1, t_2)$ — $n$-мерная область, то $\mu(F(t_1, t_2)) > 0$. Поскольку $S_t$ сохраняет меру,

$$\mu(F(t_1, t_2)) = \mu(S_tF(t_1, t_2)) = \mu(F(t_1 + t, t_2 + t)),$$

т. е. $\mu(F(t_1, t_2)) = f(t_2 - t_1)$. Если $t_1, t_2, t_3$ принадлежат $0 \leqq t \leqq t_0$, то

$$\mu(F(t_1, t_2)) + \mu(F(t_2, t_3)) = \mu(F(t_1, t_3)),$$

т. е. имеем

$$f(s') + f(s'') = f(s' + s''),$$

если $s', s'' > 0$, $s' + s'' \leqq t_0$. Далее, $f(s) > 0$ (она определена только для $t_0 \geqq s > 0$), отсюда $f(s)$ должна иметь вид $cs$, $c = \text{const} > 0$. Следовательно, $\mu(F(t_1, t_2)) = c(t_1 - t_2)$. Теперь мы определим

$$\varphi(P) = \begin{cases} e^{i\lambda s}, & P \in S_sF, \quad 0 \leqq s \leqq t_0, \\ 0 & \text{в противном случае (т. е. } P \text{ не лежит в } F(0, t_0)). \end{cases}$$

Имеем

$$\|\varphi\|^2 = \int_{F(0,t_0)} ds = \mu(F(0, t_0)) = ct_0,$$

$$\|U_t\varphi_0 - e^{i\lambda t}\varphi_0\| = \int_{F(0,t)+F(t_0,t_0+t)} ds = \mu(F(0, t)) + \mu(F(t_0, t_0 + t)) = 2ct$$

при $0 \leqq t \leqq t_0$. Далее, $(E(\lambda) - E(-\lambda))\varphi \to \varphi$ при $\lambda \to \infty$ и существует $\lambda$, такое, что

$$\|(E(\lambda) - E(-\lambda))\varphi\| \geqq {}^1/_2 ct_0.$$

С другой стороны, $E(\lambda) - E(-\lambda)$ есть проектор, перестановочный с $U_t$. Поэтому

$$\|U_t(E(\lambda) - E(-\lambda))\varphi - e^{it\lambda}(E(\lambda) - E(-\lambda))\varphi\| = \|(E(\lambda) - E(-\lambda)) \times$$
$$\times (U_t\varphi - e^{it\lambda}\varphi)\| \leqq \|U_t\varphi - e^{it\lambda}\varphi\| = 2ct.$$

Для $\psi = (E(\lambda) - E(-\lambda))\varphi / \|(E(\lambda) - E(-\lambda))\varphi\|$ имеем

$$\|\psi\| = 1, \qquad \|U_t\psi - e^{it\lambda}\psi\| \leqq 4t/t_0.$$

Далее, к $(E(\lambda) - E(-\lambda))\varphi$ и к $\psi$ можно применить $A$[64]. Наше неравенство перепишем в следующем виде:

$$\left\| \frac{U_t - 1}{it}\psi - \frac{e^{i\lambda t} - 1}{it}\psi \right\| \leqq \frac{4}{t_0},$$

и отсюда при $t \to 0$ вытекает $\| A\psi - \lambda\psi \| \leqq 4/t_0$. Так как $t_0$ произвольно, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать его так, чтобы $4/t_0 < \varepsilon$. При этом $\| A\psi - \lambda\psi \| < \varepsilon \| \psi \|$. Поскольку такую $\psi$ можно найти для любого $\varepsilon > 0$, то $\lambda$ принадлежит полному спектру. Таким образом, полный спектр совпадает со всей прямой $-\infty < \lambda < \infty$.

3. Если точечный спектр $Z$ отсутствует или совпадает с множеством чисел $k\omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при фиксированном $\omega > 0$, то непрерывный спектр содержит все точки полного спектра, кроме, быть может, $k\omega$. Если при этом не имеют места рассмотренные в п. 2 специальные случаи (чисто точечный спектр, $Z$-множество всех $k\omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то полный спектр содержит все $\lambda$, т. е. непрерывный спектр всюду плотен. Так как он является замкнутым множеством, то содержит все $\lambda$.

В противном случае всюду плотен точечный спектр $Z$ (см. примеч. 60). Если $\lambda$ принадлежит $Z$, то обозначим через $\varphi_\lambda$ собственную функцию, отвечающую собственному значению $\lambda$. По теореме 4 $|\varphi_\lambda| = \text{const} > 0$, мы можем положить $|\varphi_\lambda| = 1$. Тогда оператор $Vf = \varphi_\lambda f$ является унитарным. Из $U_t\varphi_\lambda = e^{it\lambda}\varphi_\lambda$ вытекает

$$V^{-1}UV = e^{it\lambda}U.$$

Так как $V^{-1}UV$ имеет тот же спектр, что и $U$, то спектр $e^{it\lambda}U$, очевидно, сдвинут на $\lambda$ вправо. В частности, непрерывный спектр $U$ при сдвиге вправо на $\lambda$ переходит в себя. Если ему принадлежит также и $\mu$, то все $\mu + \lambda$, $\lambda \in Z$, тоже ему принадлежат, и, следовательно, он всюду плотен. Таким образом, он пуст или совпадает со всей числовой прямой.

Собирая все вместе, мы можем сформулировать:

Теорема 6. *За исключением обычного периодического потока с периодом* $2\pi/\omega$, $\omega > 0$, *имеющего чисто точечный спектр* $Z$: $k\omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *полный спектр эргодического дифференцируемого потока* $S_t$ *всегда есть вся числовая прямая* $-\infty < \lambda < \infty$.

*Непрерывный спектр либо отсутствует, либо совпадает со всей числовой прямой* $-\infty < \lambda < \infty$.

Эта теорема, вероятно, верна и без предположения о дифференцируемости потока [5].

## VI. ПРИМЕРЫ С ЧИСТО НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

1. Из п. 1 § IV мы знаем, что каждый нуль-эргодический поток имеет чисто непрерывный спектр. Такие потоки легко указать: например, $\Omega$ — множество всех действительных $\mu$, $\mu^*$ — обычная лебегова внешняя мера, $S_t\mu = \mu + t$. Тогда если $\Lambda$ измеримо и имеет конечную меру, то мы можем выбрать такое $t_0 >$

[64] См., например, [8, с. 415, примеч. 68].

$>0$, что часть $\Lambda$, лежащая в $-t_0 < u < t_0$, имеет меру, большую $^1/_2\mu^*(\Lambda)$. Тогда его часть, лежащая в $-3t_0 < u < -t_0$, имеет меру, меньшую $^1/_2\mu^*(\Lambda)$, и аналогично для той части $S_{2t_0}$, которая лежит в $-t_0 < u < t_0$, так что $\Lambda$ и $S_{2t_0}\Lambda$ могут отличаться не обязательно на множество меры 0. Поэтому каждое $\Lambda$-множество должно иметь меру 0, т. е. $S_t$ нуль-эргодичен.

Однако нас в первую очередь интересуют собственно эргодические потоки и мы хотим привести примеры таких потоков с чисто непрерывным спектром. Все рассматриваемые примеры будут иметь такой вид: пусть $f(u)$ — некоторая функция, определенная в $0 \leqq u < 1$, которая всюду $\geqq A$, $\leqq B$ для двух строго положительных $A$, $B$; $\gamma$ — некоторое число: $0 \leqq \gamma < 1$. Пусть $\Omega$ — плоская область; $P = [u, v]$, $0 \leqq u < 1$, $0 \leqq v < f(u)$; $\mu^*$ — обычная лебегова внешняя мера. Отображение $S_t\,[u, v]$ определяется так: $v$ нужно увеличить на $t$[65] (при $t < 0$ получается вычитание), а в каждом случае, когда пересекается верхняя $v = f(u)$ или нижняя $v = 0$ граница $\Omega$, переставить $v$ на нижнюю или соответственно верхнюю границу $\Omega$ и заменить $u$ на $\{u + \gamma\}$ или на $\{u - \gamma\}$, т. е. на то из чисел $u + \gamma$, $u + \gamma - 1$ или на $u - \gamma$, $u - \gamma + 1$ соответственно, которое $\geqq 0$, $< 1$. Очевидно, $S_t$ сохраняет меру.

Рассмотрим теперь, для каких $f(u)$ и $\gamma$ этот поток является (собственно) эргодическим и имеет чисто непрерывный спектр.

2. Если $\lambda$ принадлежит точечному спектру семейства $U_t$, определяемого с помощью $S_t$, то пусть $\varphi \neq 0$ — соответствующая собственная функция. Тогда при любом фиксированном $t$ с точностью до $[u, v]$-множества меры 0 $\varphi(S_t[u, v]) = e^{i\lambda t}\varphi(u, v)$. С помощью условия, согласно которому для $S_t$ выполнено не только $D_2'$, но и $D_2$, мы исключаем описанные выше особые случаи. Так как $\varphi(u, v)$ измерима по $[u, v]$ и $S_t[u, v]$-прообраз любого измеримого множества есть измеримое $[u, v, t]$-множество (см. п. 6 § II), то $\varphi(S_t[u, v])$ измерима по $[u, v, t]$. Множество $\overline{N}$, состоящее из тех $[u, v, t]$, для которых $\varphi(S_t[u, v]) \neq e^{i\lambda t}\varphi(u, v)$, также является измеримым. Для любого фиксированного $t$ множество $\overline{N}_{(t)}$, состоящее из таких $[u, v]$, что $[u, v, t] \in \overline{N}$, имеет меру 0. По теореме Фубини $\overline{N}$ тоже имеет меру 0. По той же самой теореме (примененной в противоположную сторону) для всех $[u, v]$ из $[u, v]$-множества $N$ меры 0 множество тех $t$, для которых $[u, v, t] \in \overline{N}$, имеет меру 0. Таким образом, если $[u, v]$ не принадлежит $N$, то $\varphi(S_t[u, v]) = e^{i\lambda t}\varphi(u, v)$ при всех $t$ с точностью до множества меры 0.

Пусть теперь $[u', v']$, $[u'', v'']$ не принадлежат $N$ и, кроме того,

$$S_{t'}\,[u', v'] = S_{t''}\,[u'', v''].$$

Имеем

$$\varphi(S_{s'}\,[u', v']) = e^{i\lambda s'}\varphi(u', v'), \quad \varphi(S_{s''}\,[u'', v'']) = e^{i\lambda s''}\varphi(u'', v'')$$

и далее

$$\varphi(S_tS_{t'}\,[u', v']) = e^{i\lambda t}\varphi(S_{t'}\,[u', v']),$$

$$\varphi(S_tS_{t''}\,[u'', v'']) = e^{i\lambda t}\varphi(S_{t''}\,[u'', v''])$$

---

[65] Или при фиксированном положительном $c$ положить в $c$ раз большим. В дальнейшем оно не будет меняться и мы можем добиться того, что $\mu(\Omega) = c\int\limits_0^1 f(u)\,du$ в точности равна 1.

с точностью до множества меры 0 соответственно по $s', s'', t', t''$. Если мы свяжем $s'$, $s''$, $t$ между собой при помощи равенств $s' = t + t'$, $s'' = t + t''$, то все четыре равенства будут выполняться с точностью до некоторого $t$-множества меры 0. Если мы при этом выберем $t$ так, чтобы они выполнялись, и примем во внимание, что $S_t S_{t'} = S_{s'}$, $S_t S_{t''} = S_{s''}$ и $S_{t'}[u', v'] = S_{t''}[u'', v'']$, то получим

$$e^{i\lambda s'}\varphi(u', v') = e^{i\lambda s''}\varphi(u'', v''), \qquad e^{i\lambda t'}\varphi(u', v') = e^{i\lambda t''}\varphi(u'', v'').$$

Если мы для всех $[\bar{u}, \bar{v}] = S_t[u, v]$, где $[u, v]$ не лежит в $N$, определим $\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v})$ как $e^{i\lambda t}\varphi(u, v)$, то это определение непротиворечиво. Для остальных $[\bar{u}, \bar{v}]$ положим $\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$. Если $[\bar{u}, \bar{v}]$ не принадлежит $N$, то мы можем положить $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $t = 0$, и при этом будет $\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(\bar{u}, \bar{v})$. Итак, $\bar{\varphi}(u, v) \neq \varphi(u, v)$ только в $N$ и еще, быть может, в каком-то множестве меры 0, т. е. $\bar{\varphi}$, как и $\varphi$, принадлежит $\mathfrak{H}$ и как элемент $\mathfrak{H}$ совпадает с $\varphi$. Таким образом, согласно нашей конструкции всюду без исключения

$$\bar{\varphi}(S_t[u, v]) = e^{i\lambda t}\bar{\varphi}(u, v).$$

Вместо $\bar{\varphi}$ мы можем подставить $\varphi$ и считать, что с самого начала это выполнялось для $\varphi$.

3. Если $[u, v']$ и $[u, v'']$ принадлежат $\Omega$, то при $t = v'' - v'$ $S_t[u, v'] = [u, v'']$, так что

$$\varphi(u, v'') = \exp(i\lambda(v'' - v'))\varphi(u, v'), \quad \exp(-i\lambda v')\varphi(u, v') = \exp(-i\lambda v'')\varphi(u, v'').$$

Таким образом, $e^{-i\lambda v}\varphi(u, v)$ не зависит от $v$ и является измеримой функцией $\psi(u)$ от $u$. Пусть $0 < t < 2A$, $v = f(u) - t/2$. Тогда

$$S_t[u, f(u) - t/2] = [\{u + \gamma\}, t/2],$$

так что

$$\exp(i\lambda t/2)\psi(\{u + \gamma\}) = \exp(i\lambda t)\exp(i\lambda(f(u) - t/2))\psi(u),$$

$$\psi(\{u + \gamma\}) = e^{i\lambda f(u)}\psi(u).$$

С другой стороны, ясно, что если $\psi(u)$ измерима и

$$\psi(\{u + \gamma\}) = e^{i\lambda f(u)}\psi(u),$$

то $\varphi(u, v) = e^{i\lambda v}\psi(u)$ есть решение уравнения

$$\varphi(S_t[u, v]) = e^{i\lambda t}\varphi(u, v).$$

Далее,

$$\iint_\Omega |\varphi(u, v)|^2\, du\, dv = \int_0^1\int_0^{f(u)} |\psi(u)|^2\, du\, dv =$$

$$= \int_0^1 |\psi(u)|^2 f(u)\, du \begin{cases} \geqq A\cdot\int_0^1 |\psi(u)|^2\, du, \\ \leqq B\cdot\int_0^1 |\psi(u)|^2\, du \end{cases}$$

и конечность $\int_0^1 |\psi(u)|^2\, du$ обеспечивают выполнение требований, наложенных выше на $\psi(u)$ для собственного значения $\lambda$.

При $\lambda = 0$ имеем $\psi(\{u+\gamma\}) = \psi(u)$. Ясно, что функции $e^{2\pi iku}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему и являются собственными функциями унитарного оператора $\Gamma\chi(u) = \chi(\{u+\gamma\})$, соответствующими собственным значениям $e^{2\pi ik\gamma}$. Следовательно, других собственных функций нет. Если $\gamma$ рационально, то при многих $k$ $e^{2\pi ik\gamma} = 1$, так что существует много $\psi(u) = e^{2\pi iku}$, т. е. наш поток не эргодичен. Если же $\gamma$, наоборот, иррационально, что в дальнейшем будет предполагаться, то из $e^{2\pi ik\gamma} = 1$ вытекает $k = 0$, так что $\psi(u)$ есть постоянная, кратная единственной собственной функции 1, $\psi(u) = c$, $\varphi(u, v) = c$, т. е. наш поток эргодичен.

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Имеем $|\psi(\{u+\gamma\})| = |\psi(u)|$, так что предыдущее заключение применимо к $|\psi(u)|$, т. е. $|\psi(u)| = c$, и так как $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$, то $c > 0$. Хорошо известно [66], что $\int_0^1 |\chi(\{u+\varepsilon\}) - \chi(u)|^2\, du \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. По теореме Кронекера [67] мы можем в силу иррациональности $\gamma$ найти такую последовательность целых чисел $k_1 < k_2 < \ldots$, что $\{k_n\gamma\} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда имеем

$$\int_0^1 |\psi(\{u+k_n\gamma\}) - \psi(u)|^2\, du = \int_0^1 |\psi(\{u+\{k_n\gamma\}\}) - \psi(u)|^2\, du \to 0.$$

С другой стороны,

$$\psi(\{u+k\gamma\}) = \exp(i\lambda(f(u) + f(\{u+\gamma\}) + \ldots + f(\{u+(k-1)\gamma\})))\,\psi(u),$$

так что

$$\int_0^1 |\psi(\{u+k\gamma\}) - \psi(u)|^2\, du = \int_0^1 |(\exp(i\lambda(f(u) + f(\{u+\gamma\}) + \ldots + f(\{u+(k-1)\gamma\}))) - 1)\,\psi(u)|^2\, du = c^2 \int_0^1 |\exp(i\lambda(f(u) + f(\{u+\gamma\}) + \ldots + f(\{u+(k-1)\gamma\}))) - 1|^2\, du = 4c^2 \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}(f(u) + f(\{u+\gamma\}) + \ldots + f(\{u+(k-1)\gamma\}))\right) du.$$

Если мы при этом сможем показать, что

$$\liminf_{k\to\infty} \left| \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}(f(u) + f(\{u+\gamma\}) + \ldots + f(\{u+(k-1)\gamma\}))\right) du \right| > 0,$$

то невыполнение условий на $\psi(u)$, т. е. отсутствие точечного спектра (за исключением $\lambda = 0$, $\varphi = \mathrm{const}$), будет доказано.

4. Пусть $f(u)$ периодична по $u$ с периодом 1 (так что мы вместо $f(\{u\})$ можем писать $f(u)$) и предположим следующее: за исключением конечного числа точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(\nu)}$ (и конгруэнтных им по mod 1 точек $x^{(1)}+k, \ldots, x^{(\nu)}+k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $1 > x^{(1)}, \ldots, x^{(\nu)} \geqq 0$), $f(u)$ всюду непрерывна и непрерывно дифференцируема. В $x^{(1)}, \ldots, x^{(\nu)}$ эта функция может иметь скачки соответственно $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\nu)}$. Пусть сумма этих скачков $\alpha = \alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(\nu)} \neq 0$.

Разделим интервал $0 \leqq u < 1$ на $(\nu+1)k$ частей: при этом $I_l$ есть интервал $(l-1)/(\nu+1)k \leqq u < l/(\nu+1)k$, $l = 1, 2, \ldots, (\nu+1)k$. По меньшей мере в $k$

---

[66] Это очевидно для всех $\chi(u) = e^{2\pi iku}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Поэтому выполняется также для их линейных комбинаций и для предельных точек последних, т. е. для всех $\chi(u)$.

[67] См. [21], а также примеч. 53.

интервалах $I_{l(1)}, \dots, I_{l(k)}$ из $(\nu+1)k$ интервалов $I_l$ не содержится ни одно из $\nu k$ чисел $\{\alpha^{(1)}-j\gamma\}, \dots, \{\alpha^{(\nu)}-j\gamma\}$, $j=0, 1, \dots, k-1$. В этих $k$ интервалах также $u$, $\{u+\gamma\}, \dots, \{u+(k-1)\gamma\}$ все не равны $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(\nu)}$, т. е. функция $f(u)+f(u+\gamma)+\dots+f(u+(k-1)\gamma)$ непрерывна. Таким образом, в $I_{l(h)}$, $h=1,\dots,k$,

$$f(u)+f(u+\gamma)+\dots+f(u+(k-1)\gamma)=C_h+\int_0^u (f'(x)+f'(x+\gamma)+\dots$$
$$\dots+f'(x+(k-1)\gamma))\,du.$$

Для всех ограниченных, интегрируемых по Риману функций $g(u)$ (периода 1) равномерно по $u$ [68]

$$\frac{1}{k}[g(u)+g(u+\gamma)+\dots+g(u+(k-1)\gamma)]\to\int_0^1 g(x)\,dx.$$

Подставим теперь вместо $g(x)$ $f'(x)$ и рассмотрим равенства

$$\int_0^1 f'(u)\,du+\alpha^{(1)}+\dots+\alpha^{(\nu)}=0, \qquad \int_0^1 f'(u)\,du=-\alpha^{(1)}-\dots-\alpha^{(\nu)}=-\alpha,$$

тогда равномерно по $u$

$$\frac{1}{k}[f'(u)+f'(u+\gamma)+\dots+f'(u+(k-1)\gamma)]\to-\alpha \quad \text{при } k\to\infty.$$

Так как $\alpha\neq0$, то $[f'(u)+f'(u+\gamma)+\dots+f'(u+(k-1)\gamma)]/k$ при достаточно больших $k$ для всех $u$ имеет постоянный знак и по абсолютной величине $\geqq {}^1/_2\,|\alpha|$, $\leqq {}^3/_2\,|\alpha|$.

Поэтому в $I_{l(h)}$

$$f(u)+f(u+\gamma)+\dots+f(u+(k-1)\gamma)=C_h\pm\frac{|\alpha|\,k}{2}\int_0^u \sigma_h(x)\,dx,$$

где $1\leqq\sigma_h(x)\leqq3$. Полная вариация этого выражения на интервале $I_{l(h)}$, длина которого равна $1/(\nu+1)k$, не превосходит $\frac{1}{(\nu+1)k}\frac{|\alpha|\,k}{2}\cdot3=\frac{3|\alpha|}{2(\nu+1)}$, что меньше $|\pi/\lambda|$ при достаточно больших $\nu$. Из предыдущего вытекает, что мы можем как угодно увеличить $\nu$ при помощи введения фиктивных (со скачком, равным нулю) точек разрыва. Общая вариация тем самым будет меньше половины расстояния между двумя соседними точками вида $2\pi n/\lambda$, $n=0, \pm1, \pm2, \dots$ Далее, приведенное выше выражение является на всем интервале $I_{l(h)}$ монотонной функцией. Таким образом, по меньшей мере на одной половине $I_{l(h)}$ оно изменяется (при растущем $u$), не принимая значения $2\pi n/\lambda$. Далее, на четверти $I_{l(h)}$ оно увеличивается не менее чем на $\frac{1}{4}\frac{1}{(\nu+1)k}\frac{|\alpha|\,k}{2}=\frac{|\alpha|}{8(\nu+1)}$, и тем самым на какой-то из четвертей $I_{l(h)}$ его значение отстоит от ближай-

---

[68] См. [21], а также примеч. 53. Приведенное там доказательство сходимости дает также и равномерную сходимость.

шего числа вида $2\pi/\lambda$ более чем на $|\alpha|/8(\nu+1)$. Пусть число, в $\lambda/2$ раз большее, чем аргумент функции $\sin^2(\ldots)$, стоящей в $\liminf_{k\to\infty}\left[\int_0^1 \sin^2(\ldots)\,du\right]$ в конце п. 3, отстоит не менее чем на $|\alpha||\lambda|/16(\nu+1)$ от ближайшего числа вида $\pi n$. Так как всегда

$$\sin^2\gamma \geqq \left(\frac{1}{\pi}\times \text{удвоенное расстояние от } y \text{ до ближайшего числа вида } \pi n\right)^2,$$

то $\sin^2(\ldots)\geqq\alpha^2\lambda^2/64\pi^2(\nu+1)^2$. Если $k$ достаточно велико, то в интеграле $\int_0^1 \sin^2(\ldots)\,du$, введенном в конце п. 3, можно выбрать $k$ интервалов (подходящие четверти интервалов $I_{j(h)}$, $h=1,\ldots,k$), каждый длиной $1/4(\nu+1)k$, на которых подынтегральное выражение $\geqq\alpha^2\lambda^2/64\pi^2(\nu+1)^2$. Так как подынтегральное выражение всюду не отрицательно, то весь интеграл заведомо $\geqq k\,\frac{1}{4(\nu+1)k}\,\frac{\alpha^2\lambda^2}{64\pi^2(\nu+1)^2}=\frac{\alpha^2\lambda^2}{256\pi^2(\nu+1)^2}=\delta>0$, так что

$$\liminf_{k\to\infty}\left[\int_0^1 \sin^2(\ldots)\,du\right]\geqq\delta>0.$$

Тем самым предложение, сформулированное в конце п. 3, доказано.

5. Итак, мы показали, что имеет место

Теорема 7. *Пусть $S_t$ — поток, определенный в п. 1 с помощью функции $f(u)$, которую можно считать периодической (с периодом 1), и числа $\gamma$. Пусть $f(u)$ всюду непрерывна и непрерывно дифференцируема на $0\leqq u<1$, за исключением конечного числа точек (и конгруэнтных им по* mod 1 *точек), где она может иметь скачки (т. е. $f(u+0)$, $f(u-0)$ существуют, но $f(u+0)-f(u-0)\neq 0$). Пусть ее производная ограничена и интегрируема по Риману. Далее, пусть $0\leqq\gamma<1$.*

Тогда для (собственно) эргодичности необходима и достаточна иррациональность $\gamma$. Для отсутствия точечного спектра (кроме $\lambda=0$, $\varphi=\text{const}$) достаточно, чтобы сумма скачков $f(u)$ (на $0\leqq u<1$) не обращалась в 0.

Таким образом, чисто непрерывный спектр является здесь общим случаем.

Насколько далеки наши условия от необходимых, установить труднее. Если $f(u)$ всюду непрерывна или сумма ее скачков равна нулю, то может существовать точечный спектр. Например, пусть $f(u)$ — тригонометрический полином

$$f(u)=a_0+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos 2\pi mu+b_m\sin 2\pi mu).$$

(Если $A\leqq f(u)\leqq B$, то $A\leqq a_0\leqq B$.) Для разрешимости уравнения $\psi(\{u+\gamma\})=e^{i\lambda f(u)}\psi(u)$ достаточно разрешимости $\chi(\{u+\gamma\})-\chi(u)=f(u)\ldots$ $\ldots$ mod $(2\pi/\lambda)$, так как можно тогда положить $\psi(u)=e^{i\lambda\chi(u)}$. Так как

$$\chi_1(\{u+\gamma\})-\chi_1(u)=\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos 2\pi mu+b_m\sin 2\pi mu)$$

имеет решение [69], то достаточно решить уравнение $\chi(\{u+\gamma\})-\chi(u)=a_0\ldots$

---

[69] Достаточно решить уравнения $\chi_1(\{u+\gamma\})-\chi_1(u)=\cos 2\pi mu$[16] и $=\sin 2\pi mu$, т. е. $=\Re e^{2\pi imu}$ и $=\Im e^{2\pi imu}$. Отсюда вытекает $\chi_1(u)=\Re$ и $\Im\ \frac{e^{2\pi imu}}{e^{2\pi im\gamma}-1}$ соответственно.

... mod $(2\pi/\lambda)$. Положим $\chi(u) = \alpha u$. Тогда $\chi(\{u+\gamma\}) - \chi(u) = \alpha\gamma$ и $\alpha(\gamma - 1)$ соответственно и при этом должны выполняться равенства

$$\alpha\gamma - a_0 = 2\pi k/\lambda, \qquad \alpha\gamma - \alpha - \alpha_0 = 2\pi l/\lambda, \qquad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

так что

$$\alpha = 2\pi(k-l)/\lambda \text{ и } a_0 = \alpha\gamma - 2\pi k/\lambda = (2\pi\gamma(k-l) - 2\pi k)/\lambda,$$

$$\lambda = \frac{2\pi\gamma}{a_0}(k-l) - \frac{2\pi}{a_0}k.$$

Если мы вместо $k-l$, $-k$ подставим $k$, $l$, то получим, что все

$$\lambda = \frac{2\pi\gamma}{a_0}k + \frac{2\pi}{a_0}l, \qquad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

принадлежат точечному спектру.

Или положим
$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqq u < 1/2, \\ 2 & \text{при } 1/2 \leqq u < 1 \end{cases}$$

(скачки равны $-1$ при $u=0$ и $1$ при $u=1/2$, их сумма равна 0). Тогда если $\lambda = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $e^{i\lambda f(u)} = 1$, так что решение есть $\psi(u) = \text{const}$.

С другой стороны, существуют непрерывные $f(u)$, при которых получается чисто непрерывный спектр, например

$$f(u) = a_0 + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^{(2^n)}\pi u)}{2^{(2^n)}} \left(a_0 > |a_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(2^n)}}\right),$$

где в диадическом разложении $\gamma$ для бесконечно многих $n$ $2^{(2^n)}$-я цифра равна 1, а все следующие цифры (исключая ее саму) равны 0. Это доказывается при помощи точного вычисления $f(u) + f(u+\gamma) + \ldots + f(u + (k-1)\gamma)$ для $k = 2^{(2^m)}$ и оценки вкладов отдельных членов в $\sum_{n=1}^{\infty}$, где главным является член с $n = m$, затем показывается, что $\liminf\limits_{m\to\infty} \left|\int_0^1 \sin^2(\ldots)\,du\right| > 0$ (см. конец п. 3), несмотря на то что $\{2^{(2^m)}\gamma\}$ согласно предположению может принимать как угодно малые значения. Мы опускаем детали этих вычислений. Вероятно, большинству непрерывных $f(u)$ отвечает чисто непрерывный спектр.

Наш поток $S_t$ можно представить в еще более наглядной форме (при помощи изоморфизма), однако это будет обсуждено в другом месте.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Koopman B. O.* Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1931, vol. 17, p. 315—318.
2. *Neumann J. von.* Proof of the quasi-ergodic hypothesis.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1932, vol. 18, p. 70—82.
3. *Neumann J. von, Koopman B.* Dynamical systems of continuous spectra.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1932, vol. 18, p. 263—266.

4. *Hausdorff F.* Mengenlehre. Berlin; Leipzig: Gruyter, 1927. 285 S.
5. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reele Funktionen. Berlin; Leipzig: Teubner, 1918. 704 S.
6. *Birkhoff G. D.* Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems. — Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1931, vol. 17, p. 650—655.
7. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.—Math. Ann., 1929, Bd. 102, N 1, S. 49—131.
8. *Neumann J. von.* Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren.—Math. Ann., 1929, Bd. 102, N 3, S. 370—427.
9. *Neumann J. von.* Über einen Satz von Herrn M. H. Stone.—Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 567—573.
10. *Stone M. N.* Linear transformations in Hilbert space. III. Operational methods and group theory.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1930, vol. 16, p. 172—175.
11. *Hellinger E.* Dissertation. Göttingen, 1907.
12. *Hahn H.* Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Ortogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen.— Monats. Math. und Phys., 1912, Bd. 23, S. 161—224.
13. *Neumann J. von.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. B. : Springer, 1932. 500 S.
14. *Van der Waerden B. L.* Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. B. : Springer, 1932. 158 S.
15. *La Valle Poussin de.* Cours d'analyse infinitesimale. P.: Gauthier-Villars, 1914, p. 68—69.
16. *Lusin N. N.* Sur les proprietes des fonctions mesurables.— C. r. Acad. sci., 1912, vol. 154.
17. *Sierpinski W.* Demonstration de quelques theoremes fondamentaux sur les fonctions mesurables.—Fund. math., 1922, t 3, s. 314—321.
18. *Lusin N.* Sur les ensembles analytiques.— Fund. math., 1927, t. 10, s. 1—95.
19. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.— Gött. Nachr., 1906, H. 3, S. 439—480.
20. *Haar A.* Über unendliche kommutative Gruppen.— Math. Ztschr., 1931, Bd. 33, S. 129—159.
21. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. — Math. Ann., 1916, Bd. 77, H. 3, S. 313—352.

# ДОПОЛНЕНИЯ К РАБОТЕ «ОБ ОПЕРАТОРНЫХ МЕТОДАХ...»* [1,2]

1. Прежде всего нужно исправить ошибку, допущенную автором в цитируемой работе. В основной теореме § II, п. 3 (это теорема 2 о возможности разложения любого потока на эргодические потоки) утверждалось, в частности, что построенные там множества $X^{(0)}$ и $M(x)$ есть $m$-пространства [3] и тем самым являются полными[3]. При этом не было замечено, что приведенная в теореме 2 конструкция не обепечивает полноты. Полнота, однако, важна, так как, например, вторая часть теоремы 6 [4] основана на теореме 1 предыдущей работы автора [5], в которой полнота входит в условие.

Так как в любом $G_\delta$-пространстве, как известно, можно ввести такую метрику, что его топология не изменится и при этом оно станет полным[6], то достаточно взять в качестве $X^{(0)}$ и $M(x)$ $G_\delta$-множества. Мы предпочитаем, однако, показать, что полнота для наших целей, а именно для справедливости теорем 1—3 из работы, указанной в примеч. 5, не обязательна, т. е. понятие $m$-пространства может быть сформулировано без нее [7]. Известно, что метрическое сепарабельное пространство $\Omega$, в котором определена $l$-мера $\mu^*$, может быть расширено до метрического сепарабельного полного пространства $\bar{\Omega}$ с $l$-мерой $\bar{\mu}^*$ так, что $\bar{\mu}^*$ для множеств $\subset\Omega$ совпадает с $\mu^*$ и $\bar{\mu}^*(\bar{\Omega}-\Omega)=0$. (Поэтому предположение теоремы 1 сразу переносится с $\Omega$, $\Omega'$ на $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}'$, а ее утверждение — с $\bar{\Omega}$,$\bar{\Omega}'$ на $\Omega$, $\Omega'$. То же самое касается и теоремы 2, правда, там необходимо существование взаимно однозначного отображения $\bar{\Omega}-\Omega$ на $\bar{\Omega}'-\Omega'$, что, например, имеет место, если оба этих множества имеют мощность континуума [8]. Теорема 3 тоже справедлива, так как она непосредственно вытекает из теоремы 2.)

Если мы возьмем в качестве $\bar{\Omega}$ пополнение $\Omega$ [9] и положим для $M\subset\bar{\Omega}$ $\bar{\mu}^*(M)=\mu^*(M\cdot\Omega)$ $(M\cdot\Omega\subset\Omega)$, то все наши требования выполнены. Для доказательства того, что новая мера $\bar{\mu}^*$ является $l$-мерой, осталось проверить только I и V [10].

---

* Ann. Math., 1932, vol. 33, N 4, p. 789—791.

[1] См. [1].

[2] Получены в сентябре 1932 г.

[3] См. определение $D_1$ на с. 8 указанной работы.

[4] См. с. 52 указанной работы.

[5] См. [2], в частности, определения 1—5 и теорему 5 [17].

[6] См., например, [3, с. 214, теорема 3].

[7] То есть как метрическое и сепарабельное, откуда, как будет показано, вытекает, что оно борелевское.

[8] Пусть $C$ — нигде не плотное канторово совершенное множество с обычной топологией, $\bar{\mu}^*$ для всех подмножеств $C$, по определению, равна 0. Мы связываем $\bar{\Omega}$, $C$ с $\bar{\bar{\Omega}}$, сохраняя их топологии и $\mu^*$, но изолируем их друг от друга. Тогда $\bar{\bar{\Omega}}$ выступает в роли $\bar{\Omega}$ и $\bar{\bar{\Omega}}-\Omega\supset C$ имеет мощность континуума.

[9] См. [3, с. 106—107].

[10] См. [2, определение 2].

K I: Если $K$ — шар в $\bar{\Omega}$ с центром, принадлежащим $\Omega$, то $K \cdot \Omega$ — шар в $\Omega$, так что $\bar{\mu}^* (K) = \mu^* (K \cdot \Omega)$ конечна. Если центр $K$ не принадлежит $\Omega$, то $K$ является подмножеством множества с таким свойством и тем самым $\bar{\mu}^* (K)$ и в этом случае конечна.

K V: Это утверждение согласно примеч. 9 достаточно доказать только для борелевских множеств $O$. Если $\Omega$ — абсолютно борелевское, т. е. является борелевским в своем пополнении $\bar{\Omega}''$, то мы делаем следующее заключение: при $M \subset \subset \bar{\Omega}$, так как $M \cdot \Omega \subset \Omega$, существует борелевское $N \supset M \cdot \Omega$, принадлежащее $\Omega$ и $\bar{\Omega}$, такое, что $\mu^* (N) = \mu^* (M \cdot \Omega)$. Тогда $N + (\bar{\Omega} - \Omega) \supset M$ — тоже борелевское и его $\bar{\mu}^*$ равна $\mu^*(N) = \mu^* (M \cdot \Omega) = \bar{\mu}^* (M \cdot \Omega)$, что и требовалось доказать.

Итак, мы показали следующее.

Важные теоремы 1—3 работы [2] справедливы и в том случае, если понятие $m$-пространства переформулировать так: оно должно быть метризуемым и сепарабельным, но не обязано быть полным, требуется только, чтобы оно было абсолютно борелевским [11].

**2.** В связи с кругом проблем, касающихся эргодической теоремы, следует еще упомянуть о двух статьях Т. Карлемана, которые появились после цитируемой работы автора:

I. Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux équations différentielles de la dynamique.— Ark. Mat. Astr. Fys., 1932, bd 22B, N 7, s. 1—5.

II. Application.. aux systemes d'équations différentielles nonlinéaires.— Acta math., 1932, bd 59, s. 63—87.

В этих статьях Карлеман развивает независимо от Купмана операторный подход, близкий к использованному автором при доказательстве эргодической теоремы [12] при условии дифференцируемости потока. В этом случае для оператора $R$, принадлежащего семейству $U_t$, непосредственно применимы известные результаты (см. работу автора [1, с. 592] и его позапрошлую до этой работы с. 571[[13]], а также [5, с. 71]) и его инфинитезимальность легко может быть доказана. При этом не нужна теорема Стоуна, а непосредственно используется спектральная теория. Этот путь избрал Карлеман.

Поэтому его метод доказательства существенно недостаточен, так как его рассмотрение основано на формуле (4) из соответствующей работы, которая для большинства потоков неверна. Сравнение (4) с используемым автором спектральным разложением показало, что рассматриваемая там $\theta (p_0, q_0|\lambda)$ должна быть ядром оператора $1 - E (1/\lambda)$ $(\lambda > 0)$ и соответственно $-E (1/\lambda)$ $(\lambda < 0)$. Однако уже на поверхности постоянной энергии линейного гармонического осциллятора эти операторы не имеют интегрального ядра. (В обозначениях Карлемана тогда $n = 1$, $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $x_1 = 0$ отождествляются с $x_1 = 1$, $A_1 = 1$, т. е. $\Omega (u) = = idu/dx_1$, если единицы измерения выбраны подходящим образом. Таким образом, получается чисто точечный спектр при $1/\lambda = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$; 0 соответствует собственная функция, равная 1. Тогда $\theta \left(p_0, q_0 \middle| \frac{1}{\pi}\right) - \theta \left(p_0, q_0 \middle| -\frac{1}{\pi}\right) +$

---

[11] См. [3, с. 121, 208].

[12] См. [4, 5], а также [1, § II, п. 2].

$+1$ есть интегральное ядро $(1 - E(\pi)) - (-E(-\pi)) + P_{[1]} = 1 + P_{[1]} - (E(\pi) - E(-\pi)) = 1$, но единичный оператор 1 не имеет интегрального ядра. Здесь мы существенно использовали условие нормировки $\theta(p_0, q_0|0) = 0$, однако для других примеров это тоже неверно.)

В статье II в этом месте используется искусственный прием (введение вспомогательных переменных $\xi$, $\eta$ вместо $p_0$, $q_0$). Роль формулы (4) из статьи I в II играет формула (19), после чего доказательство становится верным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann J. von*. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. — Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 587—642. (Рус. пер. см. наст. кн.)
2. *Neumann J. von*. Einige Sätze über messbare Abbildungen.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 574—586.
3. *Hausdorff F*. Mengenlehre. Berlin; Leipzig: Gruyter, 1927. 285 S.
4. *Koopman B. O*. Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1931, vol. 17, p. 315—318.
5. *Neumann J. von*. Proof of the quasi-ergodic hypothesis.— Proc. Nat. Acad. Sci, US, 1932, vol. 18, p. 70—82.

# ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. II*

*Совместно с П. Р. Халмошем*

## ВВЕДЕНИЕ

Эта статья преследует две цели: построить отображения всех измеримых пространств, для которых это возможно, на единичный интервал и применить соответствующие теоремы об отображениях к изучению эргодических сохраняющих меру преобразований с чисто точечным спектром.

Отображения одного пространства с мерой на другое могут рассматриваться двояко: как отображения множеств и как точечные отображения. Соответственно мы приводим ниже две совокупности необходимых и достаточных условий для существования отображения данного пространства на интервал. Первая из них — для отображений множеств, или теорема об алгебраическом изоморфизме,— по-видимому, была известна, и, несмотря на то что никогда не была четко сформулирована, имеется много опубликованных доказательств для конкретных частных случаев. Мы приводим явное доказательство и используем проведенную в нем конструкцию для доказательства второй теоремы: о точечных отображениях, или теоремы о геометрическом изоморфизме. Вторая теорема основана на новом понятии нормального измеримого пространства. Это довольно искусственное понятие, которое тем не менее полезно по двум причинам. Во-первых, оно носит чисто теоретико-множественный (а не топологический) характер и, следовательно, применимо к пространствам с мерой, которые обычно рассматриваются в теории вероятностей. Во-вторых, оно наследует все обычные операции над измеримыми пространствами (такими, как образование прямых произведений, разложение в прямые суммы и т. д.).

Используя концепции и результаты описанных выше теорем об отображениях и теорему двойственности Понтрягина о компактных и дискретных абелевых группах, мы докажем, что любое эргодическое сохраняющее меру преобразование с чисто точечным спектром изоморфно вращению на компактной абелевой группе. Это есть теорема о «нормальной форме» для определенного класса сохраняющих меру преобразований. Она может помочь в ответе на многие вопросы о подобных преобразованиях, такие, как существование квадратных корней, коммутирующих преобразований и т. д.

Несмотря на то что данная статья является продолжением более ранней работы одного из нас [1], она в значительной степени не зависит от этой работы. Доказательства упоминавшихся выше основных теорем приведены здесь полностью. Только в некоторых приложениях, например при исследовании отношения между точечными отображениями и отображениями множеств, мы используем результаты [1].

---

* Ann. Math., 1942, vol. 43, N 2, p. 332—350.

[1] См. [1].

## 1. ОБЩИЕ ПРОСТРАНСТВА С МЕРОЙ; АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ

Пусть $X$ — произвольное множество, $\mathscr{X}$ — любое борелевское поле подмножеств $X$, а $m$ — неотрицательная, счетно-аддитивная конечная мера, определенная на $\mathscr{X}$. Система $\{X, \mathscr{X}, m\}$, которую мы будем обозначать просто через $X$ или, если необходимо указать на ее зависимость от $\mathscr{X}$ и $m$, через $X(\mathscr{X}, m)$, называется *пространством с мерой*. Множества $E \in \mathscr{X}$ будем называть *измеримыми*. Мы будем пользоваться также обычной в теории Лебега терминологией для определения измеримых, интегрируемых и т. д. функций. Пространство с мерой называется *полным*, если любое подмножество множества меры нуль является измеримым (и, разумеется, имеет меру нуль). Поскольку всегда можно распространить определение $m$ на борелевское поле $\mathscr{X}' \supset \mathscr{X}$ так, что $X(\mathscr{X}', m)$ полно, то, не теряя общности и для простоты, мы предполагаем с самого начала полноту пространства $X$.

Для любого измеримого пространства $X$ мы будем обозначать через $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathscr{X})$ булеву алгебру измеримых множеств, рассматриваемых по модулю множеств меры нуль. Для $\mathfrak{B}$ мы будем использовать обозначения теории множеств ($\subset$, $+$ и т. д.), и тот факт, что $m$ можно считать определенной на $\mathfrak{B}$.

Обсудим теперь для пространств с мерой понятие отделимости. Борелевское поле $\mathscr{X}$ (или пространство с мерой $X(\mathscr{X}, m)$) *строго сепарабельно*, если в нем можно найти такую счетную совокупность множеств, что содержащее их минимальное борелевское поле (*натянутое* на них борелевское поле) совпадает с $\mathscr{X}$. Два борелевских подполя $\mathfrak{A}$ и $\mathscr{B}$ борелевского поля $\mathscr{X}$ измеримых подмножеств пространства с мерой $X(\mathscr{X}, m)$ *эквивалентны*, если любому множеству $E$ в одном из них отвечает множество $F$ в другом, такое, что симметрическая разность $(E - F) + (F - E)$ имеет меру нуль. Пространство с мерой называется *сепарабельным*, если существует строго сепарабельное борелевское поле $\mathfrak{A}$, содержащееся в $\mathscr{X}$ и эквивалентное ему [2].

Понятие, которое лежит между сепарабельностью и строгой сепарабельностью и является более полезным, чем любое из них, есть собственно сепарабельность. Пространство с мерой $X(\mathscr{X}, m)$ собственно сепарабельно, если существует строго сепарабельное борелевское поле $\mathfrak{A} \subset \mathscr{X}$, такое, что каждому $E \in \mathscr{X}$ соответствует $F \in \mathfrak{A}$, такое, что $E \subset F$ и $m(F - E) = 0$[3]. Отметим, что это определение обладает свойством дуальности: применяя его к $X - E$, получаем множество $F \in \mathfrak{A}$, такое, что $F \subset E$ и $m(E - F) = 0$. Мы будем использовать тот факт, что если $X$ сепарабельно (или собственно сепарабельно), а $\mathfrak{A}$ — строго сепарабельное борелевское поле, описанное в предыдущем определении, то $\mathfrak{B}(\mathscr{X}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. Для (собственно) сепарабельного пространства с мерой необхо-

---

[2] Это определение дано в необычной форме. См., например, [2]. Эквивалентность нашего определения и обычно используемого была доказана Халмошем [3]. Отметим, что $X$ сепарабельно тогда и только тогда, когда булева алгебра $\mathfrak{B}(\mathscr{X})$ обладает счетной системой образующих.

[3] Понятие собственно сепарабельности, впервые введенное в [4], является фундаментальным понятием в теории меры. Хотя и можно привести примеры сепарабельных, но не собственно сепарабельных пространств с мерой, все такие примеры являются в какой-то степени патологическими. Одним из них является единичный интервал с борелевским полем $\mathscr{X}$ всех множеств лебеговой меры нуль и их дополнений.

димо указать в обозначениях используемое строго сепарабельное борелевское поле; мы будем писать $X = X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$.

Будем называть множества из $\mathfrak{A}$ *борелевскими*, а функции, измеримые относительно $\mathfrak{A}$, — *бэровскими*. (Действительно-значная функция $f(x)$ измерима относительно $\mathfrak{A}$, если прообраз любого действительного борелевского множества $S$, т. е. множество $\{x \mid f(x) \in S\}$, принадлежит $\mathfrak{A}$.)

Измеримое подмножество $E$ пространства с мерой $X(\mathscr{X}, m)$ называется *неразложимым*, если оно не содержит собственных измеримых подмножеств, отличных от пустого множества. Элемент $E \in \mathfrak{B}(\mathscr{X})$ называется *атомом*, если он не содержит отличных от 0 подэлементов $\mathfrak{B}(\mathscr{X})$. Пространство с мерой называется *неатомическим*, если $\mathfrak{B}(\mathscr{X})$ не содержит атомов, или, другими словами, если любое измеримое множество положительной меры содержит измеримые подмножества меньшей положительной меры. С точки зрения изучения структуры пространств с мерой неразложимые множества и атомы неинтересны. Мы будем обычно предполагать, что первые представляют собой в точности одноточечные подмножества, а вторые отсутствуют. Более точно наше предположение можно будет описать следующим образом.

Счетная последовательность $A_1, A_2, \ldots$ подмножеств является разделяющей последовательностью, если для любой пары точек $x \neq y$ можно найти целое $n$, такое, что $x \in A_n$ и $y \in X - A_n$. Если в $X$ существует разделяющая последовательность измеримых множеств, то каждое неразложимое множество состоит в точности из одной точки. Мы покажем теперь, что предположение о существовании разделяющей последовательности измеримых множеств влечет то же самое для атомов. Пусть $E$ — множество положительной меры, не содержащее подмножеств меньшей положительной меры. Тогда для любого $n$ одно из двух множеств $EA_n$ и $E(X - A_n)$ имеет меру нуль, а другое — меру $m(E)$ Слегка изменив обозначения, мы можем предположить, что $m(EA_n) = m(E)$ при $n = 1, 2, \ldots$ Если $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то $m(EA) = m(E)$. Так как при этом $A$ содержит максимум одну точку, то отсюда вытекает, что для некоторой точки $x \in E$ имеет место $m(E - x) = 0$ Другими словами, из существования разделяющей последовательности измеримых множеств вытекает, что вес атома сконцентрирован в одной точке. Если, например, мы предположим, что мера любой точки равна нулю, то пространство неатомично. Так как в пространстве с мерой, имеющем, по определению, конечную меру, может быть самое большое счетное множество точек положительной меры и их структура с точки зрения теории меры ясна, мы будем обычно предполагать неатомичность.

Если $X_1(\mathscr{X}_1, m_1)$ и $X_2(\mathscr{X}_2, m_2)$ — пространства с мерой, то *изоморфизм* множеств между $X_1$ и $X_2$ есть сохраняющий меру изоморфизм между булевыми алгебрами $\mathfrak{B}(\mathscr{X}_1)$ и $\mathfrak{B}(\mathscr{X}_2)$. Более точно, изоморфизм множеств есть взаимно однозначное отображение $T$ из $\mathfrak{B}(\mathscr{X}_1)$ на $\mathfrak{B}(\mathscr{X}_2)$, такое, что

$$T(X_1 - E) = X_2 - TE, \qquad T\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} TE_n, \qquad m_1(E) = m_2(TE).$$

Если такое отображение $T$ существует, то $X_1$ и $X_2$ изоморфны с точки зрения теории меры.

Сделав еще одно замечание относительно обозначений, мы сможем сформулировать наш первый результат. Так как единичный интервал играет основную роль

в наших рассмотрениях и используется как эталон, с которым сравниваются другие пространства с мерой, то удобно ввести для него специальное обозначение. Мы будем обозначать единичный интервал через $\tilde{X}$, совокупность измеримых по Лебегу и Борелю множеств — соответственно через $\tilde{\mathscr{X}}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$, а меру Лебега — через $\tilde{m}$. В нашей терминологии $\tilde{X} = \tilde{X}(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{m})$ есть собственно сепарабельное пространство с мерой [4].

Теорема 1. *Пространство с мерой, имеющее меру единица, с точки зрения теории меры изоморфно единичному интервалу тогда и только тогда, когда оно сепарабельно и неатомично.*

Доказательство. Так как единичный интервал сепарабелен и неатомичен и очевидно, что эти свойства инвариантны относительно изоморфизма, то отсюда вытекает необходимость наших условий. Перейдем к доказательству их достаточности. Пусть дано $X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$, $m(X) = 1$ и пусть $A_1, A_2, \ldots$ — счетная последовательность борелевских множеств, которая порождает все $\mathfrak{A}$. Мы можем предположить (добавив, если необходимо, избыточное множество к $\{A_n\}$), что $\Sigma_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Тогда каждому рациональному числу $r$, $0 \leqq r \leqq 1$, можно поставить в соответствие множество $B_r$ так, что:

i) объединения множеств из последовательностей $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ порождают одно и то же поле;

ii) из $r < s$ вытекает $B_r \subset B_s$;

iii) $\Pi_{r>s} B_r = B_s$;

iv) $\Pi_r B_r = 0$, $\Sigma_r B_r = X$ [5].

Мы определим теперь для любого действительного числа $a$, $0 \leqq a \leqq 1$, множество $B_a = \Pi_{r>a} B_r$. Ясно, что это определение $B_a$ соответствует его предыдущему определению в случае, когда $a$ рационально, и что семейство множеств $\{B_a\}$ удовлетворяет условиям ii)—iv) (где в iii) и iv) мы распространяем произведения и суммы на произвольное счетное множество действительных чисел $r$, для которого в iii) $\inf r = s$, а в iv) $\inf r = 0$ и $\sup r = 1$). Более, того из условия i) вытекает, что $B_a \in \mathfrak{A}$ при всех $a$ и что борелевское поле, натянутое на совокупность множеств $B_a$, есть $\mathfrak{A}$.

Если теперь дано семейство $B_a$, то мы можем найти (однозначно определенную) функцию $f(x)$, определенную для $x \in X$, $0 \leqq f(\bar{x}) \leqq 1$, для которой $\{x | f(x) \leqq \leqq a\} = B_a$. Мы можем, например, положить

$$f(x) = \inf \{a \,|\, x \in B_a\}. \tag{1}$$

Класс всех множеств вида

$$f^{-1}(\tilde{E}) = \{x \,|\, f(x) \in \tilde{E}\}, \tag{2}$$

где $\tilde{E}$ — произвольное борелевское множество из единичного интервала, есть борелевское поле, содержащееся в $\mathfrak{A}$. Так как оно содержит все $B_a$ и потому все $A_n$, то совпадает с $\mathfrak{A}$.

---

[4] В дальнейшем будем иногда использовать обозначение $\tilde{X}(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{m})$ для единичной окружности на комплексной плоскости; ясно, что это пространство имеет с точки зрения теории меры такую же структуру, как и единичный интервал. Мы будем всегда подчеркивать имеющийся в виду смысл символа $\tilde{X}$.

[5] См. [1, с. 602; 5, с. 91].

Пусть $F(a) = m\{x \mid f(x) \leqq a\} = m(B_a)$ есть функция распределения $f(x)$; $F(a)$ — монотонная, возрастающая от 0 до 1 при $a$, изменяющемся от 0 до 1, и непрерывная справа функция. (Это имеет место для произвольной функции распределения.) В нашем специальном случае $F(a)$ оказывается непрерывной. Действительно, если $a = a_0$ есть точка разрыва $F(a)$, то $\{x \mid f(x) = a_0\}$ есть множество положительной меры, которое в силу неатомичности имеет борелевские подмножества меньшей положительной меры. Такое подмножество не может быть представлено в виде $f^{-1}(\tilde{E})$, что противоречит доказанному выше.

Для любого $\tilde{x}$, $0 \leqq \tilde{x} \leqq 1$, мы определим $\tilde{f}(\tilde{x}) = \inf\{a \mid F(a) \geqq \tilde{x}\}$. Хорошо известно (и легко устанавливается), что $\tilde{f}(\tilde{x})$ строго монотонная (не обязательно непрерывная) функция $\tilde{x}$, возрастающая от 0 до 1 при $\tilde{x}$, изменяющемся от 0 до 1, и непрерывная слева. Более того, функция распределения функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ тоже совпадает с $F(a)$.

Для любого борелевского множества $\tilde{E} \subset \tilde{X}$ рассмотрим множество $\tilde{f}^{-1}(\tilde{E})$. Мы утверждаем, что совокупность всех множеств такого вида (которые, очевидно, образуют борелевское поле) совпадает с $\tilde{\mathfrak{A}}$. Это справедливо в силу того, что $\tilde{f}(\tilde{x})$ — возрастающая функция, и поэтому любой интервал $(0, \tilde{x})$ представим в виде $\tilde{f}^{(1)}(\tilde{E})$, где в качестве $\tilde{E}$ также можно взять интервал.

Предположим, что $f^{-1}(\tilde{E}_1) = f^{-1}(\tilde{E}_2)$. (Мы используем теперь тот факт, что для произвольной бэровской функции $g(x)$, $0 \leqq g(x) \leqq 1$, соответствие $\tilde{E} \rightarrow g^{-1}(\tilde{E}) = \{x \mid g(x) \in \tilde{E}\}$ является гомоморфизмом $\tilde{\mathfrak{A}}$ на $\mathfrak{A}$, т. е. $g^{-1}(\tilde{X} - \tilde{E}) = X - g^{-1}(\tilde{E})$ и $g^{-1}(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \ldots) = g^{-1}(\tilde{E}_1) + g^{-1}(\tilde{E}_2) + \ldots$) Если мы обозначим через $\tilde{E}' = (\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2) + (\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)$ симметрическую разность $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$, то из равенства функций распределения $f(x)$ и $\tilde{f}(\tilde{x})$ следует, что $m\{f^{-1}(\tilde{E}')\} = \tilde{m}\{\tilde{f}^{-1}(\tilde{E}')\} = 0$. Ясно, что обратное тоже верно, т. е. из $\tilde{f}^{-1}(\tilde{E}_1) = f^{-1}(\tilde{E}_2)$ следует тот же самый результат.

Следовательно, соответствие $f^{-1}(\tilde{E}) \rightleftarrows \tilde{f}^{-1}(\tilde{E})$ взаимно однозначно не обязательно между $\mathfrak{A}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$, но, во всяком случае, между $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathscr{X}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ и $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}(\tilde{\mathscr{X}}) = \mathfrak{B}(\tilde{\mathfrak{A}})$. Ясно, что это соответствие сохраняет меру. Далее, поскольку отображения $\tilde{E} \rightarrow f^{-1}(\tilde{E})$ и $\tilde{E} \rightarrow \tilde{f}^{-1}(\tilde{E})$ являются гомоморфными, то это есть также и алгебраический изоморфизм.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

## 2. НОРМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА; ТЕОРЕМА О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ИЗОМОРФИЗМЕ

Если $X_1(\mathscr{X}_1, m_1)$ и $X_2(\mathscr{X}_2, m_2)$ — пространства с мерой, то *точечным изоморфизмом* между $X_1$ и $X_2$ называется взаимно однозначное отображение почти всего $X_1$ на почти все $X_2$, такое, что $E_1 \in \mathscr{X}_1$, тогда и только тогда, когда $E_2 = TE_1 \in \mathscr{X}_2$

и при этом $m_1(E_1)=m_2(E_2)$. Если такое отображение $T$ существует, то $X_1$ и $X_2$ называются *точечно изоморфными*. Задача данного параграфа — найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство с мерой было изоморфно единичному интервалу. В этой связи понятие нормального пространства является фундаментальным.

Определение 1. *Пространство с мерой называется правильным, если оно полное, собственно сепарабельное и неатомическое и если оно содержит разделяющую последовательность борелевских множеств.*

Определение 2. *Правильное пространство с мерой называется нормальным, если для любой действительной однолистной*[11] *бэровской функции $f(x)$ найдется такое множество $X_0$ меры нуль, что образ $f(X - X_0)$ является борелевским множеством.*

В дальнейшем будут использоваться следующие леммы о правильных и нормальных пространствах.

Лемма 1. *На любом правильном пространстве с мерой $X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$ существуют действительно-значные ограниченные однолистные бэровские функции.*

Доказательство. Так как $X$ сепарабельно и неатомично, то применима конструкция из теоремы 1. Покажем, что действительная ограниченная бэровская функция, определенная при помощи соотношения (1), однолистна. Если множество $\{x|f(x) = a\}$ содержит более одной точки, то пересечение этого множества с борелевским множеством, разделяющим две его точки, не может быть представлено в виде $\{x|\, f(x) \in \tilde{E}\}$. Однако поскольку при доказательстве теоремы 1 устанавливается, что любое борелевское множество представимо в таком виде, то $f(x)$ обязана быть однолистной.

Лемма 2. *Если $X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$ — правильное пространство с мерой, такое, что условие определения 2 выполнено для любой ограниченной функции, то $X$ — нормальное.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — любая однолистная функция, а $G(y)$ — произвольная непрерывная функция, отображающая взаимно однозначно бесконечный интервал $-\infty < y < \infty$ на конечный интервал. Тогда $g(x) = G(f(x))$ — однолистная и ограниченная бэровская функция. Следовательно, согласно предположению существует множество $X_0$ меры нуль, такое, что $g(X - X_0)$ есть борелевское множество. Образ этого борелевского множества под действием взаимно однозначного и непрерывного отображения $G^{-1}(y)$ есть $f(X - X_0)$, которое, таким образом, тоже является борелевским множеством.

Лемма 3. *Если $X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$ — нормальное пространство, $B \subset X$ — борелевское множество и $f(x)$ — действительная однолистная бэровская функция, то существует множество $B_0 \subset B$ меры нуль, такое, что $f(B - B_0)$ есть борелевское множество. При этом $B_0$ может быть взято в виде $BX_0'$, где $X_0'$ — борелевское множество меры нуль, зависящее только от $f$ (и не зависящее от $B$).*

Доказательство. Разобьем доказательство на три этапа. Сначала установим существование требуемого множества $B_0$, соответствующего фиксированному $B$, затем покажем, что $B_0$ может быть выбрано из совокупности борелевских множеств, и, наконец, докажем на основании наших предположений об отделимости, что найдется $B_0$, имеющее структуру, описанную в формулировке леммы.

(i) Отметим, что в первом предложении утверждается, что борелевское множество, принадлежащее нормальному пространству, само есть нормальное пространство. Поэтому, используя лемму 2, мы можем предположить, что $f(x)$ ограничена. Пусть $f'(x)$ — ограниченная однолистная бэровская функция на $X$ (лемма 1). С помощью подходящих линейных преобразований мы можем добиться, чтобы всюду на $X$ имели место неравенства

$$0 \leqq f(x) \leqq 1 < f'(x).$$

Тогда функция $f^*(x)$, совпадающая с $f(x)$ на $B$ и с $f'(x)$ на $B' = X - B$, есть однолистная бэровская функция на $X$ и, следовательно, для подходящего множества $X_0$ меры нуль $f^*(X - X_0)$ есть борелевское множество. Пересечение этого борелевского множества с замкнутым интервалом (0, 1) тоже является борелевским множеством. Но это пересечение совпадает с $f(B - B_0)$, где $B_0 = BX_0$.

(ii) Пусть $B_1$ — борелевское множество меры нуль и $B_1 \supset B_0$. Применяя (i) к $X - B_1$, найдем множество $B_2 \supset B_1$ меры нуль, такое, что $f(X - B_2)$ — борелевское. Применяя индукцию, мы можем найти борелевские множества меры нуль $B_3 \supset B_2$, $B_4 \supset B_3$, такие, что $f(X - B_4)$ — борелевские и т. д. Итак, имеем $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$, где все $B_n$ имеют меру нуль, и если $n$ — нечетное, то $B_n$ — борелевское, а если $n$ — четное, то $f(X - B_n)$ — борелевское. Обозначим $B_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$. Множество $B_0^*$ имеет меру нуль, и в силу монотонности последовательности $\{B_n\}$ имеем $B_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}$, так что $B_0^*$ есть борелевское множество. Аналогично $X - B_0^* = X - \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} = \prod_{n=0}^{\infty} (X - B_{2n})$, и поэтому $f(X - B_0^*)$ — борелевское множество. Далее, $B(X - B_0^*) = (B - B_0)(X - B_0^*)$ и, следовательно, $f(B(X - B_0^*)) = f(B - B_0) f(X - B_0^*)$ есть борелевское множество. Мы можем соответственно изменить обозначения и обозначить через $B_0$ пересечение $B$ и $B_0^*$. Это новое $B_0$ есть борелевское множество меры нуль, обладающее тем свойством, что $f(B - B_0)$ является борелевским.

(iii) Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — такая последовательность множеств, что натянутое на нее пространство совпадает с $\mathfrak{A}$. Применив (ii), найдем для любого $n$ борелевское множество $A_n^0 \subset A_n$ меры нуль, такое, что $f(A_n - A_n^0)$ есть борелевское множество. Пусть $A^0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0$. Снова применим (ii), на сей раз к $X - A^0$, и получим борелевское множество $X_0' \supset A^0$ меры нуль, такое, что множество $f(X - X_0')$ — борелевское. Положим $A_n' = A_n - A_n^0$ и пусть $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ — борелевское поле, порожденное множествами $A_n'$. Тогда при всех $n$ $(X - X_0')A_n = (X - X_0')A_n'$ и, кроме того, каждому борелевскому множеству (т. е. любому множеству $B \in \mathfrak{A}$) соответствует множество $B' \in \mathfrak{A}'$, такое, что $(X - X_0')B = (X - X_0')B'$. Поскольку $f(A_n')$ — борелевское множество и совокупность множеств $A$, для которых $f(A)$ — борелевское, очевидно, является борелевским полем (так как $f$ — однолистная), то для любого $B' \in \mathfrak{A}'$ $f(B')$ есть борелевское множество. Отсюда при любом $B \in \mathfrak{A}$

$$f(B - BX_0) = f(B(X - X_0)) = f(B'(X - X_0)) = f(B') f(X - X_0),$$

так что $f(B - BX_0')$ — борелевское множество. Тем самым доказательство леммы 3 закончено.

Лемма 4. *Если $X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$ — правильное пространство с мерой и если для какой-нибудь действительной однолистной бэровской функции $g(x)$ существует множество $X_0$ меры нуль, такое, что $g(B - BX_0)$ — борелевское множество, если $B$ — борелевское, то $X$ — нормальное. Кроме того, в этом случае множество $X_0$ удовлетворяет условию определения 2 при любой действительной однолистной бэровской функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $Y = g(X - X_0)$. Для любого $y_0 \in Y$, $y_0 = g(x_0)$ положим $F(y_0) = f(x_0)$. Тогда $F(y)$ — действительно-значная однолистная функция действительного переменного $y \in Y$. Так как

$$\{y \mid F(y) < a\} = g[\{x \mid f(x) < a\}(X - X_0)] \tag{3}$$

и по предположению правая часть есть борелевское множество, то $F(y)$ — бэровская функция. Из $f(x) = F(g(x))$ получаем $f(X - X_0) = F(Y)$, и, следовательно, $f(X - X_0)$ — борелевское множество [6].

Важным классом пространств с мерой является класс $m$-пространств, где $m$-пространство есть полное пространство с мерой $X(\mathscr{X}, m)$, на котором определена метрика так, что с топологической точки зрения оно является полным сепарабельным пространством и удовлетворяет следующим двум условиям:

i) мера всякого открытого множества положительна;

ii) для любого измеримого множества $E$ $m(E) = \inf\{m(O) \mid E \subset O,\ O$—открытое$\}$.

Оснащенное борелевским полем $\mathfrak{A}$ борелевских множеств (в топологическом смысле) $X = X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$ становится правильным пространством с мерой. Из топологии известно, что оно даже является нормальным в используемом нами смысле этого слова и что исключительное множество $X_0$ меры нуль может быть выбрано пустым [7].

Мы будем использовать $m$-пространства несколько позднее. Пока мы упомянули о них только как о примерах нормальных пространств. Следующая теорема, являющаяся основной в этом параграфе, применима к $m$-пространствам, так как они являются нормальными. Она показывает, что с точки зрения теории меры они изоморфны единичному интервалу.

Теорема 2. *Для того чтобы пространство с мерой, имеющее меру единица, было точечно изоморфно единичному интервалу, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным.*

Доказательство. Необходимость нашего условия очевидна: единичный интервал нормален, а свойство нормальности инвариантно относительно точечного изоморфизма. Перед тем как дать доказательство достаточности, мы сделаем замечание относительно предположений. Так как различные условия в определении правильного пространства логически независимы, то они все являются необходимыми для доказательства достаточности. Возможно, что условие нормальности может быть заменено более слабым, но примеры показывают, что это есть лучший способ выражения того, что пространство «измеримо в себе».

---

[6] См. [6, с. 266].

[7] См. цит. книгу Хаусдорфа, с. 269.

Для доказательства достаточности мы используем обозначения из доказательства теоремы 1, и в частности определенные там функции $f(x)$ и $\tilde{f}(\tilde{x})$.

Обозначим через $D$ и $\tilde{D}$ соответственно области значений $f(x)$ и $\tilde{f}(\tilde{x})$. Исключая из $X$ множество меры нуль, мы можем в силу нормальности считать, что $D$ — борелевское множество; $\tilde{D}$ тоже является борелевским множеством. (Отметим, что выбрасывание множества меры нуль не меняет распределения $f$ и, следовательно, никак не влияет на $\tilde{f}$.) Рассмотрим множество $R = (D - \tilde{D}) + (\tilde{D} - D)$. Так как $f^{-1}(\tilde{D} - D) = f^{-1}(\tilde{D}) - f^{-1}(D)$ целиком лежит в дополнении $f^{-1}(D)$ и в силу того, что это дополнение пусто, получаем, что и $f^{-1}(\tilde{D} - D)$ пусто. Поскольку $\tilde{f}^{-1}(\tilde{D} - D)$ имеет такую же меру, как и $f^{-1}(\tilde{D} - D)$, то мера $\tilde{f}^{-1}(\tilde{D} - D)$ равна нулю. Аналогично можно доказать, что равны нулю меры $f^{-1}(D - \tilde{D})$ и $\tilde{f}^{-1}(D - \tilde{D})$ и, кроме того, последнее множество пусто. Следовательно, если мы исключим из $X$ и $\tilde{X}$ борелевские множества $f^{-1}(R)$ и $\tilde{f}^{-1}(\tilde{R})$, имеющие меру нуль, то на оставшихся множествах $f$ и $\tilde{f}$ являются однолистными бэровскими функциями, имеющими совпадающие (измеримые по Борелю) области значений.

Если любому $x \in X$ (после описанного исключения множества меры нуль) поставить в соответствие точку $\tilde{f}^{-1}(f(x)) \in \tilde{X}$, то это соответствие будет взаимно однозначно. Далее, если $B$ — произвольное борелевское множество в $X$ и $B' = f(B)$, то $B'$ — борелевское множество и $f^{-1}(B') = B$. Следовательно, при отображении множеств, описанном в доказательстве теоремы 1, элементу $B$ булевой алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{X})$ соответствует $\tilde{f}^{-1}(B') = \tilde{B} = \tilde{f}^{-1}(f(B))$. Таким образом, определенное выше точечное отображение индуцирует тот же самый изоморфизм множеств между $\mathfrak{B}$ и $\tilde{\mathfrak{B}}$. Следовательно, данное соответствие сохраняет меру. Тем самым доказательство теоремы 2 окончено.

## 3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ОТОБРАЖЕНИЯМИ МНОЖЕСТВ И ТОЧЕЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Если $T$ — сохраняющее меру преобразование (т. е. точечный изоморфизм) пространства $X(\mathscr{X}, m)$ на себя, то $T$ индуцирует отображение множеств ($\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathscr{X})$ на себя) при помощи сопоставления каждому множеству $E \in \mathscr{X}$ множества $TE \in \mathscr{X}$. Известно, что для $m$-пространств верно обратное: любой изоморфизм множеств индуцируется таким способом некоторым точечным изоморфизмом [8]. В связи с этим мы дадим следующее определение.

---

[8] См. [7, с. 582]. В определении 5 на с. 576 все описанные свойства преобразования (например, $M_1 + M_2 \to M_1' + M_2'$) могут быть дополнены фразой: «С точностью до множества меры нуль» [2].

Определение 3. *Пространство с мерой $X$ ($\mathscr{X}$, $m$) обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований, если любой изоморфизм $\mathfrak{B}$ на себя индуцируется точечным изоморфизмом $X$ на себя.*

Из теоремы 2 вытекает, что у любого нормального пространства существует достаточный набор сохраняющих меру преобразований. Однако имеются примеры с промежуточными между этими двумя понятиями (нормальные пространства и пространства с достаточным набором сохраняющих меру преобразований) свойствами. Такие примеры будут рассмотрены в следующем параграфе. Мы начнем с доказательства некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Если два точечных отображения пространства с мерой $X$, содержащего разделяющую последовательность измеримых множеств $E_1$, $E_2$, ..., индуцируют на $\mathfrak{B}$ одно и то же отображение, то они отличаются максимум на множестве меры нуль.*

Доказательство Достаточно рассмотреть случай, когда одно из этих отображений тождественно. Если тогда $TE_n$ и $E_n$ отличаются только на множество меры нуль при $n = 1, 2, \ldots$, то все $T^kE_n$ отличаются один от другого тоже только на множества меры нуль. Следовательно, инвариантное множество

$$F_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T^kE_n - \prod_{k=-\infty}^{\infty} T^kE_n$$

имеет меру нуль. Мы образуем инвариантное множество $X'$, исключая из $X$ множество $\Sigma_{n=1}^{\infty} F_n$, имеющее меру нуль. Если теперь $x \neq Tx$, то некоторое $E_n$ содержит только одну из точек $x$ и $Tx$, и поэтому $x$ содержится только в одном из множеств $E_n$ и $T^{-1}E_n$. Следовательно, $x \in F_n$, так что $x \notin X'$.

Лемма 6. *Пусть $X(\mathscr{X}, m)$ — пространство с мерой и пусть $X' \subset X$ — произвольное (не обязательно измеримое) подмножество $X$.* Пусть далее $\mathscr{X}'$ — совокупность всех множеств вида $E' = X'E$, где $E \in \mathscr{X}$. Для любого $E' \in \mathscr{X}'$, $E' = X'E$ положим $m'(E') = m(E)$. Этим равенством $m'$ определяется однозначно (так что $X'(\mathscr{X}', m')$ — пространство с мерой) тогда и только тогда, когда внешняя мера $X'$ в $X$ совпадает с мерой $X$ [9].

Лемма 7. *Если $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — полная ортонормированная система функций в $L_2(X)$, где $X(\mathscr{X}, m)$ — пространство с мерой, содержащее разделяющую последовательность $E_1$, $E_2$, ... измеримых множеств, то существует множество $N \in \mathscr{X}$ меры нуль, такое, что из $x, y \in N$ и $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$ при $n = 1, 2, \ldots$ вытекает, что $x = y$.*

Доказательство. Пусть $\psi_m(x)$ — характеристическая функция множества $E_m$. Имеем

$$\psi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}\varphi_n(x) \tag{4}$$

в смысле сходимости в среднем (или среднеквадратичном). Следовательно, при любом $m$ подпоследовательность частичных сумм ряда (4) сходится к $\psi_m(x)$ поч-

[9] Внешняя мера $m^*(E_0)$ множества $E_0$ определяется как $m^*(E_0) = \inf\{m(E) \mid E_0 \subset E \in \mathscr{X}\}$. Аналогично можно определить внутреннюю меру $m_*(E_0) = \sup\{m(E) \mid E_0 \supset E \in \mathscr{X}\}$. Если $X$ — полное, то $E_0$ измеримо (т. е. $E_0 \in \mathscr{X}$) тогда и только тогда, когда $m_*(E_0) = m^*(E_0) = m(E_0)$. Если $X$ — собственно сепарабельно, то достаточно брать верхнюю и нижнюю грани по всем борелевским множествам $E$. Доказательство леммы 6 см. в [8, с. 109—110].

ти всюду. Для каждого $m$ мы выбираем фиксированную подпоследовательность, обладающую этим свойством, и полагаем $N$ равным объединению всех множеств меры нуль, на которых эти подпоследовательности не сходятся к $\psi_m(x)$. Если $x$, $y \notin N$ и $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$ при всех $n$, то отсюда вытекает, что $\psi_m(x) = \psi_m(y)$ при всех $m$. Поэтому, используя, что $E_1$ $E_2$, ... — разделяющая последовательность, получаем, что $x = y$.

Лемма 8. *Пусть* $\tilde{X}(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{m})$ — *единичная окружность на комплексной плоскости и пусть* $\mu(\tilde{E})$ — *произвольная мера (т. е. счетно-аддитивная, неотрицательная функция множества и* $\mu(\tilde{X}) = 1$), *определенная на* $\tilde{E} \in \tilde{\mathfrak{A}}$. *Если для некоторого числа* $\lambda$, такого, что $|\lambda| = 1$ *и* $(\arg\lambda)/2\pi$ *иррационально*, $\mu$ *инвариантна относительно вращения на* $\arg\lambda$, *т. е.* $\mu(\lambda\tilde{E}) = \mu(\tilde{E})$ *для любого* $E \in \mathfrak{A}$, *то* $\mu(\tilde{E}) = \tilde{m}(\tilde{E})$.

Доказательство. Пусть $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ — два любых замкнутых интервала (дуги) в $\tilde{X}$ одной и той же длины. Так как последовательность $\{\lambda^n\}$ степеней $\lambda$ всюду плотна в $X$, то существует последовательность $\{n_j\}$ положительных целых чисел, такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \lambda^{n_j}\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 \quad (5)$$

[10]

и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} \mu(\lambda^{n_j}\tilde{A}_1) = \mu(\tilde{A}_2). \quad (6)$$

[11]

Так как $\mu(\lambda^{n_j}\tilde{A}_1) = \mu(\tilde{A}_2)$, то можно показать, что $\mu(\tilde{A}_1) = \mu(\tilde{A}_2)$.

Таким образом, $\mu(\tilde{A})$ есть функция длины дуги $\tilde{A}$, т. е. $\tilde{m}(\tilde{A})$. Очевидно, что эта числовая функция монотонна и аддитивна и, следовательно, пропорциональна $\tilde{m}(\tilde{A})$. Положим $\tilde{A} = \tilde{X}$, получаем, что коэффициент пропорциональности равен 1. Поэтому $\mu(\tilde{E})$ и $\tilde{m}(\tilde{E})$ совпадают для дуг и тем самым для всех борелевских множеств.

Как непосредственное следствие этой леммы получаем, что если для любого борелевского множества $\tilde{E}_0$ имеет место равенство $\tilde{E}_0 = \lambda\tilde{E}_0$, то $\tilde{m}(\tilde{E}_0) = 0$ или $\tilde{m}(\tilde{E}_0) = 1$, так как иначе, положив

$$\mu(\tilde{E}) = \tilde{m}(\tilde{E}\tilde{E}_0)/\tilde{m}(\tilde{E}_0),$$

получаем противоречие с доказанным только что утверждением.

Теперь мы в состоянии рассмотреть патологическую ситуацию, о которой говорилось в начале этого параграфа.

Определение 4. *Подмножество* $E$ *(не обязательно измеримое) измеримого пространства* $X$ *абсолютно инвариантно, если для любого сохраняющего меру преобразования* $T$ *пространства* $X$ *на себя симметрическая разность* $(E - TE) + (TE - E)$ *измерима и имеет меру нуль.*

[10] См. [9][3].

[11] См. [9, с. 8].

Лемма 9. *Если $E$ измеримо и $m(E)=0$ или $m(E)=m(X)$, то $E$ абсолютно инвариантно. Обратно, если $X$ — сепарабельное, неатомическое и $E \subset X$ измеримо и абсолютно инвариантно, то $m(E)=0$ или $m(E)=m(X)$. Если $X$ неизмеримо и абсолютно инвариантно, то $m_*(E)=0$, а $m^*(E)=m(X)$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства остальных утверждений отметим, что если $T$ — сохраняющее меру преобразование и $A$ — множество (почти) инвариантное относительно $T$ в том смысле, что $(A - TA) + (TA - A)$ измеримо и имеет меру 0, то любое измеримое покрытие $A^*$ и любое измеримое ядро $A_*$ множества $A$ тоже (почти) инвариантны относительно $T$[12]. Если $A \subset A^*$, то $TA \subset TA^*$, так как $TA$ и $A$ почти равны, $T$ сохраняет меру, $TA^*$ — измеримое покрытие $TA$ и поэтому $TA^* + (A - TA)$ — измеримое покрытие $A$. Отсюда следует (так как два измеримых покрытия $A$ почти равны), что $TA^*$ почти равно $A^*$, что и требовалось доказать. Аналогичные рассуждения применимы к измеримым ядрам.

Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что если $E$ абсолютно инвариантно, то тем же свойством обладают $E_*$ и $E^*$. Если известно, что измеримое абсолютно инвариантное множество должно иметь меру нуль или $m(X)$, то отсюда можно вывести, что для неизмеримого абсолютно инвариантного множества $E$ $m_*(E) = 0$ и $m^*(E) = m(X)$. В том случае, когда $X$ — единичная окружность, существует много примеров сохраняющих меру преобразований, таких, что все инвариантные относительно них измеримые множества имеют меру нуль или $m(X)$. Действительно, вращения, описанные в лемме 8, обладают этим свойством. Если множество инвариантно относительно всех сохраняющих меру преобразований, то оно a fortiori инвариантно относительно вращений, и, следовательно, если измеримо, то имеет меру, равную нулю или $m(X)$. Далее, общий случай согласно теореме 1 сводится к окружности.

Для того чтобы продемонстрировать содержательность понятия абсолютной инвариантности, мы покажем теперь, что неизмеримые абсолютно инвариантные множества существуют. При доказательстве существования будем использовать континуум-гипотезу и гипотезу о полном упорядочении.

Лемма 10. *Если $X = X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$ — собственное пространство с мерой, имеющее меру единица, то существует абсолютно инвариантное множество $E \subset X$, такое, что $m_*(E) = 0$ и $m^*(E) = 1$.*

Доказательство. Так как сепарабельное пространство с мерой обладает максимум $\mathfrak{L}$ (мощность континуума) преобразованиями множеств (в силу того, что преобразование множеств полностью определяется его поведением на счетной совокупности множеств, а множество всех отображений множества мощности $\aleph_0$ во множество мощности $\mathfrak{L}$ имеет мощность $\mathfrak{L}$), то из леммы 5 вытекает, что существует множество сохраняющих меру отображений $X$ на себя, имеющее мощность, не превосходящую $\mathfrak{L}$, обладающее тем свойством, что любое сохраняющее меру преобразование совпадает с точностью до множества меры нуль

12 $A^*$ (или $A_*$) — измеримое покрытие (или ядро) $A$, если $A \subset A^*$ (или $A_* \subset A$) и если $m^*(A) = m(A^*)$ (или $m_*(A) = m(A_*)$). Если $A_1^*$ и $A_2^*$ — измеримые покрытия $A$, то $(A_1^* - A_2^*) + (A_2^* - A_1^*)$ имеет меру 0.

с каким-нибудь преобразованием из данной совокупности. Пусть эта совокупность преобразований вполне упорядочена, так что каждому порядковому числу $\alpha < \Omega$ (первого несчетного порядкового) соответствует сохраняющее меру преобразование $T_\alpha$. Аналогично мы можем перенумеровать совокупность всех борелевских множеств положительной меры. Обозначим их через $E_\alpha$, $\alpha < \Omega$.

Для любого $x \in X$ и любого $\alpha < \Omega$ положим

$$C_\alpha(x) = \left\{\prod_{i=1}^{k} T_{\alpha_i}^{n_i} x \mid \alpha_i = \alpha, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

Множество $C_\alpha(x)$ является минимальным, содержащим $x$ и инвариантным при всех $\beta \leqq \alpha$ относительно $T_\beta$. Кроме того, $C_\alpha(x)$ обладает следующими свойствами: $C_\alpha(x)$ — счетное множество, при $\alpha \leqq \beta$ $C_\alpha(x) \subset C_\beta(x)$, и если $y \notin C_\alpha(x)$, то $C_\alpha(y)$ и $C_\alpha(x)$ не пересекаются.

Используя трансфинитную индукцию, определим точки $x_\alpha$ и $y_\alpha$; $x_1$ выбирается из $E_1$, $y_1$ — из $E_1$, но не принадлежащим $C_1(x_1)$. Так как $C_1(x_1)$ счетно, а $E_1$, являющееся борелевским множеством положительной меры, нет, то такое $y_1$ найдется. Если уже определены $x_\alpha$ и $y_\alpha$ при всех $\alpha < \beta$, то $x_\beta$ определяется следующим образом. Так как множество $\Sigma_{\alpha<\beta}\{C_\beta(x_\alpha) + C_\beta(y_\alpha)\}$ счетно, то можно выбрать $x_\beta \in E_\beta$ не принадлежащим этому множеству. Далее, мы можем добавить $C_\beta(x_\beta)$ к этому множеству и взять такое $y_\beta$, что $y_\beta \in E_\beta$, но не принадлежит расширенному множеству.

Относительно точек $x_\alpha$ и $y_\alpha$ мы можем теперь утверждать следующее: при любых $\alpha$ и $\beta$, $\alpha \neq \beta$, $C_\alpha(x_\alpha)$ и $C_\beta(y_\beta)$ не пересекаются. Если $\alpha \leqq \beta$, то, по определению, $y_\beta \notin C_\beta(x_\alpha)$, так что $C_\beta(y_\beta)$ и $C_\beta(x_\alpha)$ не пересекаются, a fortiori $C_\beta(y_\beta)$ и $C_\alpha(x_\alpha)$ тоже не пересекаются. Если $\alpha > \beta$, то аналогично $x_\alpha$ не принадлежит $C_\alpha(y_\beta)$, так что $C_\alpha(x_\alpha)$ и $C_\alpha(y_\beta)$ не пересекаются и поэтому не пересекаются и $C_\alpha(x_\alpha)$ и $C_\beta(y_\beta)$.

Если $A = \sum_{\alpha<\Omega} C_\alpha(x_\alpha)$ и $B = \sum_{\beta<\Omega} C_\beta(y_\beta)$, то $A$ и $B$ не пересекаются. Поскольку $A$ содержит $x_\alpha$, а $B$ содержит $y_\beta$, то $A$ и $B$ имеют хотя бы одну точку, принадлежащую всем борелевским множествам положительной меры. Следовательно, ни $X - A$, ни $X - B$ не могут содержать таких множеств. Таким образом, и $A$, и $B$ имеют внешнюю меру единица (так как их дополнения имеют внутреннюю меру нуль), и т. к. каждое из них содержится в дополнении другого, то они оба имеют внутреннюю меру нуль.

Теперь легко видеть, что $A$ (почти) инвариантно относительно любого сохраняющего меру преобразования $T$ Для данного $T$ мы можем найти $\beta < \Omega$, такое, что $T$ и $T_\beta$ отличаются не более чем на множестве меры нуль. Отсюда мы получаем, что

$$T_\beta A = \sum_{\alpha<\Omega} T_\beta C_\alpha(x_\alpha).$$

Поскольку при $\alpha \geqq \beta$ $C_\alpha(x_\alpha)$ инвариантно относительно $T_\beta$, то $A$ и $T_\beta A$ могут отличаться не более чем на счетное множество $\Sigma_{\alpha<\beta} T_\beta C_\alpha(x_\alpha)$. Поскольку $T_\beta A$ и $TA$ отличаются не более чем на множество меры нуль, то $A$ и $TA$ тоже отличаются максимум на множество меры нуль. Следовательно, мы можем взять в качестве множества $E$ в лемме 10 либо $A$, либо $B$.

В следующих двух леммах устанавливается связь между абсолютной инвариантностью и свойством наличия достаточного набора сохраняющих меру преобразований.

Лемма 11. *Пусть* $X(\mathscr{X}, m)$ — *пространство с мерой, имеющее меру единица и обладающее достаточным набором сохраняющих меру преобразований, и пусть* $X' \subset X$ — *произвольное подмножество* $X$, *такое, что* $m^*(X') = 1$. *Если* $X'$ *абсолютно инвариантно, то пространство с мерой* $X'$ $(\mathscr{X}', m')$ (*определенное в лемме* 6) *обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований.*

Доказательство. Соответствие $E \rightleftarrows E' = X'E$ есть изоморфизм множеств между $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathscr{X})$ и $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}(\mathscr{X}')$. При помощи этого изоморфизма любое отображение $X'$ на себя (т. е. любой изоморфизм множеств из $\mathfrak{B}'$ на себя) индуцирует отображение $X$ на себя. Так как согласно предположению $X$ обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований, то любому отображению множеств $T$, действующему на $X$, соответствует сохраняющее меру отображение $T$ пространства $X$ на себя, такое, что $T$ индуцирует то же самое отображение множеств, принадлежащих $X$, что и $T'$. Поскольку $X'$ абсолютно инвариантно, то $(X' - TX') + (TX' - X')$ имеет меру нуль. Пусть $N'$ — минимальное множество, инвариантное относительно $T$ и содержащее данное множество меры нуль. Мы можем переопределить $T$, положив его на $N'$ равным тождественному. Подмножество $X'$ строго инвариантно относительно получившегося $T'$, и поэтому $T$ может рассматриваться как сохраняющее меру преобразование $X'$ на себя. Ясно, что это сохраняющее меру преобразование индуцирует изоморфизм $T$ множеств из $X'$, и, следовательно, $X'$ обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований.

Лемма 12 *Пусть* $X(\mathscr{X}, m)$ — *пространство с мерой, имеющее меру единица и содержащее разделяющую последовательность измеримых множеств, и пусть* $X' \subset X$ — *произвольное подмножество* $X$, *такое, что* $m^*(X') = 1$. *Если пространство с мерой* $X'$ $(\mathscr{X}', m')$ (*определенное в лемме* 6) *обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований, то* $X'$ — *абсолютно инвариантное подмножество* $X$.

Доказательство. Мы будем использовать обозначения, введенные при доказательстве леммы 11. Пусть $T$ — произвольное сохраняющее меру преобразование $X$. При помощи соответствия $E \rightleftarrows E' = X'E$ $T$ индуцирует отображение множеств $T'$ на $X'$. Так как $X'$ обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований, то отображение множеств $T'$ на $X'$ индуцируется некоторым сохраняющим меру преобразованием $S$, отображающим $X'$ на себя. Мы докажем, что для почти любой точки $x \in X'$ $Sx = Tx$.

Мы знаем, что для любого $E \in \mathscr{X}$ множества $S^{-1}E' = S^{-1}(X'E)$ и $X' \cdot T^{-1}E$ отличаются не более чем на множество меры нуль (так как $S$ и $T$ индуцируют одно и то же отображение множеств на $X$). Обозначим это множество меры нуль через $N_E$, а через $N$ — объединение всех $N_E$, где $E$ пробегает разделяющую последовательность. Пусть $x$ — произвольная точка в $X' - N$. Докажем, что $Sx = Tx$. Если это не верно, то найдется множество $E$, принадлежащее использованной выше разделяющей последовательности, такое, что $Sx \in E$, а $Tx \notin E$. Поскольку $x \in X'$, $Sx \in X'$ и поэтому $x \in S^{-1}(X'E)$, то в силу $Tx \notin E$ a fortiori $x \notin X' \times$

$\times T^{-1}E$. Следовательно, $x \in N_E \subset N$. Но так как это противоречит выбору $x$, то должно выполняться равенство $Sx = Tx$.

Мы доказали, что $T$ почти любую точку из $X'$ переводит в $X'$. Другими словами, $X'$ почти инвариантно относительно $T$. Так как $T$ было выбрано произвольно, то отсюда вытекает, что $X'$ абсолютно инвариантно.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим теорему об изоморфизме, которая проясняет структуру пространств с мерой, обладающих достаточным набором сохраняющих меру преобразований.

Теорема 3. *Правильное пространство с мерой, имеющее меру, равную единице, обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований тогда и только тогда, когда оно точечно изоморфно абсолютно инвариантному подмножеству единичного интервала.*

Доказательство. Поскольку свойство наличия достаточного набора сохраняющих меру преобразований сохраняется при точечном изоморфизме и так как согласно лемме 11 абсолютно инвариантное множество обладает этим свойством, то необходимость очевидна

Для доказательства достаточности отметим прежде всего, что данное пространство с мерой $X(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, m)$ в силу теоремы 1 изоморфно $\tilde{X}(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{m})$. (В данном доказательстве удобно рассматривать $X$ как единичную окружность на комплексной плоскости.) Рассмотрим на $\tilde{X}$ сохраняющее меру преобразование $\tilde{x} \to \lambda\tilde{x}$, где $\lambda \in \tilde{X}$ — фиксированное число, для которого $(\arg \lambda)/2\pi$ иррационально. Изоморфизм множеств между $\tilde{X}$ и $X$ ставит в соответствие этому преобразованию $\tilde{X}$ некоторое сохраняющее меру преобразование $T$ пространства $X$. Изоморфизм множеств также может рассматриваться как отображение множества характеристических функций, определенных на $X$, на себя. Это отображение может быть продолжено на все $L_2(\tilde{X})$ и поэтому индуцирует изоморфизм между $L_2(\tilde{X})$ и $L_2(X)$. Пусть $\varphi(x)$ — функция на $X$, соответствующая функции $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \equiv \tilde{x}$ на $\tilde{X}$. Функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами:

(i) $|\varphi(x)| \equiv 1$;

(ii) $\varphi(Tx) \equiv \lambda\varphi(x)$;

(iii) $\{\varphi^n(x)\} = \{(\varphi(x))^n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — полная ортонормированная система в $L_2(X)$.

(Внесем некоторые уточнения: так как $\varphi(x)$ определена с точностью до множества меры нуль, то свойства (i) и (ii) должны выполняться только почти всюду. Ясно, тем не менее, что, изменив $\varphi(x)$ на множестве меры нуль, мы можем предположить, что (i) и (ii) имеют место всюду Можно предположить также, и мы так и поступим, что $\varphi(x)$ — бэровская функция.)

Применим лемму 7 к $\{\varphi^n(x)\}$ для получения множества $N$ меры нуль с описанными в этой лемме свойствами. Расширив $N$, если необходимо, мы можем предположить, что $N$ инвариантно относительно $T$. Исключим теперь $N$ из $X$. Мы покажем, что оставшееся множество (снова обозначаемое через $X$) имеет взаимно однозначное сохраняющее меру отображение на абсолютно инвариантное подмножество в $\tilde{X}$.

Функция $x' = \varphi(x)$ определяет отображение из $X$ в $\tilde{X}$. Нам известно, что это отображение измеримо по Борелю (т. е. прообраз множества, принадлежащего $\tilde{\mathfrak{A}}$ принадлежит $\mathfrak{A}$). Покажем, что оно однолистно. Если $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $\varphi^n(x) = \varphi^n(y)$ при всех $n$, и это обеспечивается тем, что мы исключили множество $N$.

Преобразование $T$ переводится отображением $\varphi$ в некоторое преобразование $T'$ образа $\varphi(X) = X' \subset \tilde{X}$ в себя. Так как $T'x' = \varphi(T\varphi^{-1}(x')) = \lambda x'$, то $X'$ инвариантно относительно вращения $\tilde{X} \to \lambda\tilde{X}$.

Для любого борелевского множества $\tilde{E} \subset \tilde{X}$ (т. е. $\tilde{E} \in \tilde{\mathfrak{A}}$) положим $\mu(\tilde{E}) = m(\varphi^{-1}(\tilde{E}))$. Так как $\varphi(T\varphi^{-}(\tilde{E})) = X' \cdot \lambda\tilde{E}$, то $T\varphi^{-1}(\tilde{E}) = \varphi^{-1}(X' \cdot \lambda\tilde{E}) = \varphi^{-1}(\lambda\tilde{E})$. Поскольку $T$ сохраняет меру, то

$$\mu(\tilde{E}) = m(\varphi^{-1}(\tilde{E})) = m(T\varphi^{-1}(\tilde{E})) = m(\varphi^{-1}(\lambda\tilde{E})) = \mu(\lambda\tilde{E}).$$

Следовательно, согласно лемме 8 $\mu(\tilde{E}) = \tilde{m}(\tilde{E})$.

Предположим, наконец, что $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$ — борелевские подмножества $\tilde{X}$, для которых $X'\tilde{E}_1 = X'\tilde{E}_2$. Пусть $\tilde{E} = (\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2) + (\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)$. Тогда $X'\tilde{E}$ — пустое множество и, следовательно, $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ тоже пусто. Поэтому $\mu(\tilde{E}) = m(\varphi^{-1}(\tilde{E})) = \tilde{m}(\tilde{E}) = 0$. Отсюда вытекает. что $\tilde{m}(\tilde{E}_1) = \tilde{m}(\tilde{E}_2)$, а из леммы 6 — что $\tilde{m}^*(X') = 1$.

Итак, мы доказали, что $X$ точечно изоморфно подмножеству $X'$ (возможно, неизмеримому) пространства $\tilde{X}$, такому, что $\tilde{m}^*(X') = 1$. Так как $X$ обладает достаточным набором сохраняющих меру преобразований, то это имеет место и для $X'$. Теперь, применяя лемму 12, получаем, что $X'$ абсолютно инвариантно, и тем самым теорема доказана.

## 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ИЗОМОРФИЗМЕ К СОХРАНЯЮЩИМ МЕРУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

В данном параграфе будут использоваться некоторые факты о сохраняющих меру преобразованиях и теория двойственности Понтрягина. Мы опишем кратко нужные нам сведения из этих теорий. Далее мы везде будем рассматривать только нормальные пространства, имеющие меру единица.

Два сохраняющих меру отображения $T_1$ и $T_2$, определенных соответственно на $X_1$ и $X_2$, (точечно) *изоморфны* [13], если существует точечный изоморфизм $T$, переводящий $X_1$ в $X_2$, такой, что $TT_1T^{-1}$ почти всюду совпадает с $T_2$. Каждому со-

[13] Так как это единственный тип изоморфизма сохраняющих меру преобразований, который мы будем использовать, то слово «точечный» в дальнейшем опускается.

храняющему меру преобразованию $T$ сопоставим унитарное преобразование $U$, определенное на $L_2(X)$ при помощи равенства $Uf(x) = f(Tx)$. Сохраняющее меру преобразование $T$ имеет *чисто точечный спектр*, если такой спектр имеет $U$, или, другими словами, если существуют полная ортонормальная система $\{f_n(x)\}$ функций из $L_2(X)$ и последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ (по модулю равных единице), такие, что $f_n(Tx) = \lambda_n f_n(x)$ почти всюду при $n = 1, 2, \ldots$ Преобразование $T$ *эргодично*, если из $f(Tx) = f(x)$ почти всюду, где $f \in L_2(X)$, вытекает, что $f(x)$ почти всюду постоянна. Спектр $\Lambda$ эргодического сохраняющего меру преобразования с чисто точечным спектром есть подгруппа мультипликативной группы комплексных чисел, по модулю равных единице. Более того, числа $\lambda_n \in \Lambda$ являются полной системой инвариантов преобразования $T$ в том смысле, что если два сохраняющих меру преобразования с чисто точечным спектром имеют одно и то же множество $\Lambda$ собственных значений с одинаковыми кратностями, то они изоморфны [14].

Нам понадобятся следующие сведения о группах. Компактная абелева сепарабельная топологическая группа $X$ есть $m$-пространство, так как мы можем определить на ней инвариантную метрику $d(x, y)$ и (единственную) инвариантную меру Хаара $m(E)$ [15]. Пусть $\Lambda'$ — группа характеров $X$, т. е. $\Lambda'$ есть множество всех комплекснозначных непрерывных функций $f(x)$, таких, что $|f(x)| \equiv 1$ и $f(xy) = f(x)f(y)$. Тогда $\Lambda'$ — счетная и функции $f(x) \in \Lambda'$ образуют полное ортонормированное множество в $L_2(X)$. Обратно, пусть $\Lambda$ — произвольная счетная абелева группа, а $X$ — ее группа характеров, т. е. $X$ — множество всех комплекснозначных функций $x(\lambda)$, определенных на $\Lambda$, таких, что $|x(\lambda)| \equiv 1$ и $x(\lambda\mu) = x(\lambda)x(\mu)$. В группе $X$ можно ввести топологию таким образом, что она станет компактной сепарабельной (и, конечно, абелевой) группой. Если любому $\lambda \in \Lambda$ мы поставим в соответствие функцию $f(x)$ на $X$, определенную равенством $f(x) = x(\lambda)$, то это соответствие будет изоморфизмом между $\Lambda$ и полной группой характеров $\Lambda'$ на $X$[16].

Инвариантность меры Хаара означает, что вращение $x \to ax$, где $a$ — произвольный фиксированный элемент группы, является сохраняющим меру преобразованием. Причина привлечения кажущихся экзотическими компактных групп к изучению сохраняющих меру преобразований состоит в том, что вращения являются нормальными формами для широкого класса преобразований.

Теорема 4. *Эргодическое сохраняющее меру преобразование нормального пространства, имеющее чисто точечный спектр, изоморфно вращению компактной сепарабельной абелевой группы.*

Доказательство. Пусть $\Lambda$ — спектр данного сохраняющего меру преобразования, $X$ — группа характеров $\Lambda$ и $\Lambda'$ — группа характеров $X$. Если для любого $\lambda \in \Lambda$ мы положим $a(\lambda) \equiv \lambda$, то $a = a(\lambda)$ принадлежит $X$. Для любого $x \in X$ положим $Tx = ax$. Мы утверждаем, что $T$ имеет чисто точечный спектр

---

[14] Все эти утверждения доказаны в [1] для потоков, однако их легко перенести с непрерывного однопараметрического случая на дискретный.

[15] Инвариантность означает, что для всех точек $x$, $y$ и $a$ и всех измеримых множеств $E$ $d(x, y) = d(ax, ay)$ и $m(aE) = m(E)$. Будем считать все группы мультипликативными, даже если они абелевы.

[16] Доказательство всех этих утверждений см. в [10][4].

и его спектр является простым и совпадает с $\Lambda$. Оно имеет чисто точечный спектр, так как характеры $f(x) \in \Lambda'$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(X)$; любая такая функция является собственной для $T$, отвечающей собственному значению $f(a)$ и $f(ax) = f(a) f(x)$. Далее, отсюда вытекает, что спектр $T$, включая кратности, получается путем образования чисел $f(a)$ для всех $f \in \Lambda'$. Поскольку любой $f$ соответствует (согласно описанному выше изоморфизму) элемент $\lambda \in \Lambda$, для которого $f(x) = x(\lambda)$ при всех $x$, то можно вместо $f(a)$ рассматривать числа $a(\lambda)$, т. е. $\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Следовательно, $T$ эргодично и из отмеченного выше результата работы [1] вытекает, что $T$ изоморфно нашему преобразованию.

В силу того что в данном доказательстве мы использовали только группу $\Lambda$ собственных значений, а не непосредственно само преобразование, имеет место

Следствие 1. *Любая счетная группа комплексных чисел, по модулю равных единице, является спектром некоторого эргодического сохраняющего меру преобразования с чисто точечным спектром.*

Теорема 4 дает нам также возможность охарактеризовать множество всех преобразований, коммутирующих с данным эргодическим преобразованием с чисто точечным спектром. Эта задача для случая сохраняющего меру преобразования общего вида, по-видимому, очень сложна.

Следствие 2. *Если $x \to ax = Tx$ — эргодическое вращение компактной абелевой группы $X$ и если $S$ — произвольное сохраняющее меру преобразование $X$, для которого $ST = TS$, то $S$ тоже является вращением.*

Доказательство. Имеем $S(ax) = a S(x)$. Поэтому если $b(x) = Sx \cdot x^{-1}$, то

$$b(Tx) = S(ax)(ax)^{-1} = Sx \cdot x^{-1} = b(x).$$

Другими словами, $b(x)$ инвариантно относительно $T$. Поскольку $T$ эргодично, то $b(x) = b = \text{const}$ [17] и $Sx = bx$, что и требовалось доказать.

Мы будем называть сохраняющее меру преобразование $R$ *инволюцией*, если $R^2 = I$ (тождественному преобразованию).

Инволюцию будем называть *фактором* данного преобразования $T$, если $S = RT$ тоже есть инволюция (т. е. $T = SR$).

Следствие 3. *Если $x \to ax = Tx$ — произвольное вращение компактной абелевой группы $X$, то $T$ может быть факторизовано $T = SR$, где $S^2 = R^2 = I$. Если $T$ эргодично, то любой фактор $R$ преобразования $T$ является отражением $Rx = bx^{-1}$.*

Доказательство. Ясно, что если $Rx = bx^{-1}$, то $R$ есть инволюция. Поэтому $Sx = RTx = R(ax) = ba^{-1} \cdot x^{-1}$ — тоже инволюция. Обратно, если $T$ эргодично и если $T = SR$, где $S^2 = R^2 = I$, то $TRT = SR \cdot R \cdot SR = R$, так что $aR(ax) = Rx$. Так же как в доказательстве следствия 2, отсюда вытекает, что $b(x) = x \cdot R(x)$ инвариантна относительно действия $T$ (т. е. $b(ax) = ax \times R(ax) = x \cdot R(x) = b(x)$). Следовательно, $b(x) = b = \text{const}$ и $Rx = bx^{-1}$.

[17] Определение эргодичности гласит, что числовые инвариантные функции являются константами. Легко проверить, что отсюда вытекает аналогичный результат для функций (таких, как $b(x)$) со значениями в группе $X$.

Следствие 4. *Любое эргодическое сохраняющее меру преобразование $T$ с чисто точечным спектром изоморфно своему обратному $T^{-1} = RTR^{-1}$, где в качестве $R$ можно взять инволюцию.*

Доказательство. Из следствия 3 нам известно, что $T = SR$, где $S^2 = R^2 = I$. Так как $T^{-1} = R^{-1}S^{-1} = RS$, то $T^{-1} = R \cdot SR \cdot R = R \cdot T \cdot R^{-1}$.

Нам представляется, что есть основания для высказывания гипотезы о том, что результаты следствий 3 и 4 справедливы для произвольного сохраняющего меру преобразования [5].

Мы выяснили, что любое вращение является сохраняющим меру преобразованием с чисто точечным спектром. В связи с этим возникает вопрос о том, когда вращение является эргодическим. Следующая теорема устанавливает, что для вращений эргодичность (т. е. метрическая транзитивность) эквивалентна региональной транзитивности [18].

Теорема 5. *Если $a$ — фиксированный элемент компактной абелевой группы $X$, то вращение $x \to ax$ эргодично тогда и только тогда, когда последовательность $\{a^n\}$ всюду плотна в $X$.*

Доказательство. Если $x \to ax$ эргодично, то траектория некоторой точки $x_0$ всюду плотна [19]. Так как преобразование $x \to x \cdot x_0^{-1}$ есть изоморфизм, то оно переводит $\{a^n x_0\}$ во всюду плотную последовательность. Но $a^n x_0 x_0^{-1} = a^n$.

Обратно, предположим, что последовательность $\{a^n\}$ всюду плотна. Мы уже показали, что для произвольного вращения любая функция $f$ из группы характеров $\Lambda'$ пространства $X$ является собственной и что функции, принадлежащие $\Lambda'$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(X)$. Поскольку собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, то любая инвариантная относительно вращения $x \to ax$ функция обязана быть линейной комбинацией инвариантных функций, принадлежащих $\Lambda'$, ибо если единственной инвариантной функцией в $\Lambda'$ является $f(x) \equiv 1$, то вращение эргодично. Предположим теперь, что для какой-то $f \in \Lambda'$ $f(ax) = f(x)$. Тогда, положив $x$ равным единице группы $X$, получаем, что $f(a^n) = f(1) = 1$ при всех $n$. Так как последовательность $\{a^n\}$ плотна и $f$ непрерывна, то $f(x) = 1$.

Перед тем как перейти к последнему утверждению настоящей работы, отметим, что из теоремы 4 и существования инвариантной метрики на любой компактной сепарабельной группе вытекает, что любое эргодическое сохраняющее меру преобразование с чисто точечным спектром изоморфно изометрии некоторого $m$-пространства. Обратно, имеет место

Теорема 6. *Если $T$ — эргодическое сохраняющее меру преобразование $m$-пространства $X$ $(\mathfrak{X}, m)$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$, при котором из $d(x, y) < \delta$ вытекает, что $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (другими словами, если семейство преобразований $\{T^n\}$ равномерно непрерывно), то $T$ имеет чисто точечный спектр. В действительности при этом можно определить в $X$ умножение таким образом, что оно станет (в первоначальной топологии определенной на $X$) компактной абелевой группой, а $T$ — вращением.*

Прежде всего мы обсудим предположения теоремы. Так как изометрическое преобразование обладает описанным свойством равномерной непрерывности,

[18] Обсуждение различных типов транзитивности можно найти в [11].

[19] См. [12, с. 29] [6].

то наши условия слабее, чем предположение об изометрии. Но если наше предположение выполнено, то можно ввести в $X$ новую метрику $d'(x, y)$, где

$$d'(x, y) = \sup\{\min(1, d(T^n x, T^n y)) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Легко проверить, что $d$ и $d'$ порождают на $X$ одну и ту же топологию и что $d'(Tx, Ty) = d'(x, y)$. Мы можем (и так и сделаем) поэтому сразу считать $T$ изометрией.

Выведем утверждение теоремы 6 из следующих двух лемм, представляющих самостоятельный интерес.

Лемма 13. *Если на $m$-пространстве $X$ существует эргодическое и изометрическое сохраняющее меру преобразование, то $X$ компактно.*

Доказательство. Пусть $T$ эргодично и изометрично. Так как $X$ — полное пространство, то нам нужно доказать только, что оно вполне ограничено. Если это не так, то существует $\varepsilon > 0$ и бесконечная последовательность точек $x_1$, $x_2$, ... в $X$, такая, что открытые сферы $S_n$ радиуса $\varepsilon$ с центрами в $x_n$ попарно не пересекаются. Пусть $x_0$—произвольная точка из $X$, траектория которой $\{T^k x_0\}$ всюду плотна в $X$. Возьмем для любого $n = 1, 2, \ldots$ целое $k = k(n)$, такое, что $d(x_n, T^k x_0) < \varepsilon/2$. Если мы обозначим через $S_0$ открытую сферу радиуса $\varepsilon/2$ с центром в $x_0$, то для любого $n$ $T^{k(n)} S_0 \subset S_n$, так что $m(S_n) \geqq m(S_0) > 0$. Поскольку, по определению, пространство с мерой имеет конечную меру, то не может существовать бесконечной последовательности попарно непересекающихся множеств, имеющих меру, ограниченную снизу положительным числом. Следовательно, $X$ вполне ограничено и потому компактно.

Лемма 14. *Пусть $X$ — любая компактная группа (не обязательно сепарабельная или абелева) и пусть $m(E)$ — произвольная конечная мера, определенная (хотя бы) на всех борелевских подмножествах $X$, такая, что мера открытого множества положительна и мера любого измеримого множества является нижней гранью мер содержащих его открытых множеств. Тогда множество $X_0$, состоящее из $x \in X$, для которых $m(xE) = m(E)$ при всех измеримых множествах $E$, является замкнутой подгруппой $X$.*

Доказательство. Так как при $x \in X$ и $y \in X_0$

$$m(xy^{-1}E) = m(y^{-1}E) = m(y(y^{-1}E)) = m(E),$$

то $X_0$ и, следовательно, его замыкание $\tilde{X}_0$ являются подгруппами. Мы докажем, что $\tilde{X}_0 \subset X_0$.

Возьмем $x \in \tilde{X}_0$, и пусть $E$ — произвольное замкнутое (и, следовательно, компактное) подмножество $X$. Пусть $O$ — любое открытое множество, такое, что $O \supset xE$, а $N$ — окрестность 1 (единичного элемента в $X$), такая, что при $a \in N$ : $axE \subset O$. Тогда $Nx$ — окрестность $x$, так что пересечение $Nx$ с $X_0$ непусто. Пусть, например, $y = ax$, $a \in N$, $y \in X_0$.

Тогда

$$m(E) = m(yE) = m(axE),$$

и так как $axE \subset O$, то $m(E) \leqq m(O)$. Другими словами, из $xE \subset O$ вытекает, что $m(E) \leqq m(O)$. Из нашего условия на $m$ следует, что $m(E) \leqq m(xE)$. Применяя этот результат к компактному множеству $xE$ и к точке $x^{-1} \in \tilde{X}_0$ (вместо $E$ и

$x$), получаем $m(xE) \leqq m(E)$, так что $m(xE) = m(E)$ для всех замкнутых множеств $E$. Следовательно, $m(xE) = m(E)$ для всех измеримых множеств $E$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 6. Пусть $x_0$ — любая точка в $X$, для которой $\{T^n x_0\}$ всюду плотна. Положим $x_n = T^n x_0$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Для $x = x_n$ и $y = x_m$ положим $p(x, y) = x_{n+m}$ и $r(x) = x_{-n}$. Если $x' = x_{n'}$, $x'' = x_{n''}$, $y' = x_{m'}$, $y'' = x_{m''}$, то

$$d(p(x', y'), p(x'', y'')) = d(x_{n'+m'}, x_{n''+m''}) \leqq$$
$$\leqq d(x_{n'+m'}, x_{n'+m''}) + d(x_{n'+m''}, x_{n''+m''}) = d(x_{m'}, x_{m''}) + d(x_{n'}, x_{n''}) =$$
$$= d(y', y'') + d(x', x'').$$

Тем самым $p(x, y)$ равномерно непрерывна на всей ее области определения. Аналогично, поскольку $d(r(x), r(y)) = d(x_{-n}, x_{-m}) = d(x_{-n+n+m}, x_{-m+n+m}) = d(y, x)$, получаем, что $r(x)$ равномерно непрерывна на всей своей области определения. Область определения $p(x, y)$ есть всюду плотное подмножество произведения пространства $X$ на себя, а область определения $r(x)$ — всюду плотное подмножество $X$. Следовательно, обе эти функции имеют единственное непрерывное продолжение соответственно на $X \times X$ и на $X$.

Дальнейшее просто. Положим для любых $x$ и $y$ в $X$ $xy = p(x, y)$ и $x^{-1} = r(x)$. Ясно, что при этих определениях $X$ превращается в абелеву топологическую группу. Для любого $x = x_n$ и произвольного $y$ $p'(x, y) = T^n y$. Тогда $p'(x, y)$ есть непрерывное расширение $p(x, y)$, и поэтому (в силу единственности расширения) $T^n y = x_n y$. (При $n = 1$ мы получаем, в частности, что $Ty = x_1 y$ при всех $y$. Выбранный вначале элемент $x_0$ является теперь единицей группы.) Если $E$ — произвольное измеримое множество, то $T^n E = x_n E$ имеет ту же самую меру, что и $E$, так что мера сохраняется при $x$, принадлежащих всюду плотному множеству. Так как согласно лемме 13 $X$ компактно, то из леммы 14 вытекает, что для всех $x$ и всех измеримых множеств $E$ $m(xE) = m(E)$. Из единственности меры Хаара следует, что $m$ есть мера Хаара на группе $X$. Тем самым доказано, что $T$ — вращение и, следовательно, имеет чисто точечный спектр.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Neumann J. von.* Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. — Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 587—642. (Рус. пер. см. наст. кн.)
2. *Doob J. L.* One-parameter families of transformation.— Duke Math. J., 1938, vol. 4, N 4, p. 752.
3. *Halmos P. R.* The decomposition of measures.— Duke Math. J., 1941, vol. 8, N 2, p. 386—392.
4. *Ambrose W., Kakutani S.* Structure and continuity of measurable flows.— Duke Math. J., 1942, vol. 9, p. 25—42.
5. *Doob J. L.* Stochastic processes with an integral parameter.— Trans. Amer. Math. Soc., 1938. vol. 44, N 1, p. 87—150.
6. Hausdorff F. Mengenlehre. Berlin; Leipzig: Gruyter, 1927. 285 S.
7. *Neumann J. von.* Einige Sätze über messbare Abbildungen.—Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 574.
8. *Doob J. L.* Stochastic processes depending on a continuous parameter.— Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 42, N 1, p. 107—140.
9. *Saks S.* Theory of the integral. Warszawa; Lwow, 1937. 347 s.
10. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.; Л.: Гостехиздат, 1938. 316 с.
11. *Hedlund G. A.* The dynamics of geodesic flows.— Bull. Amer. Math. Soc., 1939, vol. 45, p. 241.
12. *Hopf E.* Ergodentheorie. B.: Spring., 1937. 83 S.

# ВВЕДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ*

## ВВЕДЕНИЕ

**1.** В 1900 г. Д. Гильберт сформулировал следующий вопрос[1]. Пусть $G$— $n$-параметрическая непрерывная группа непрерывных преобразований некоторого $m$-параметрического многообразия $M$. Возможно ли ввести в $G$ и $M$ такие параметры, что в результате все функции, описывающие эти преобразования, стали бы непрерывно дифференцируемыми или даже аналитическими[2]? В другой формулировке: применима ли к такой группе $G$ при соответствующем выборе параметров теория Ли (см. примеч. 1, 2)?

При помощи сложных и остроумных топологических рассмотрений [3] всех $G$, $M$-типов для $m = 1$ и 2 Л. Брауэр в 1909—1910 гг. дал положительный ответ на вопрос Гильберта для $m = 1$, а для $m = 2$ существенно продвинулся в этом направлении.

Приводимый далее в этой статье контрпример показывает, что ответ на вопрос Гильберта при нетранзитивном действии $G$ на $M$, вообще говоря, отрицателен. (Брауэр показал, что для $m = 1$ существуют только транзитивные группы, наш контрпример соответствует простейшему из остальных случаев: $n = 1$, $m = 2$.) Поэтому в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $G$ действует на $M$ транзитивно.

При этом предположении мы покажем, что для всех замкнутых (в топологической терминологии — компактных) $G$ ответ на вопрос Гильберта положителен. Для некомпактных $G$ пока что нет подобного рода окончательных результатов [1].

Настоящее исследование было стимулировано цитируемой в примеч. 13 работой А. Хаара и основано на ее результатах. Автор выражает благодарность господину Хаару за предоставленную возможность ознакомления с этими результатами до их опубликования.

**2.** Важный специальный случай проблемы Гильберта возникает при $G = M$. Обозначим элементы $G$ через $a$, $b$, $x$, $y$, а закон композиции в $G$ — через $a \cdot b$. Тогда каждый фиксированный элемент $a$ из $G$ определяет отображение $G: x \to x \cdot a$ [4]. Теперь проблема звучит так: возможно ли ввести в $G$ $n$ подходящих параметров так, чтобы функции, описывающие закон композиции, в результате стали непрерывно дифференцируемыми или соответственно аналитическими? (Разумеется,

---

*Ann. Math., 1933, vol. 34, N 1, p. 170—190.

[1] Доклад на Международном математическом конгрессе в Париже, 1900 г. (см. [1]). Там этот вопрос упомянут как «Проблема 5».

[2] Ф. Шур [2] доказал, что для всех $G$, которые действуют на $M$ транзитивно, параметры выбраны так, что все функции дважды непрерывно дифференцируемы, и параметры можно выбрать и так, что функции станут аналитическими.

[3] См. [3].

[4] Если сначала применить $x \to x \cdot a$, а затем $x \to x \cdot b$, то получим $x \to x \cdot (a \cdot b)$. Очевидно, что $G$ действует на себе самой транзитивно.

параметры всегда рассматриваются «в малом», т. е. в некоторой подходящим образом выбранной окрестности единицы $G$ или соответственно произвольно заданной точки в $M$.) Мы сначала решим эту задачу, а затем сведем к ней общую проблему (для произвольного $M$).

Разумеется, достаточно показать, что $G$ можно гомеоморфно [5] и изоморфно [6] отобразить на группу $G'$, обладающую рассматриваемыми свойствами.

Произвольное подмножество $G'$ множества $k$-мерных комплексных матриц с определителем, отличным от нуля ($k = 1, 2, \ldots$), содержащее единичную матрицу $E_k$ и одновременно с $A$, $B$ содержащее $A^{-1}$ и их произведение $A \cdot B$, является группой с законом композиции $A \cdot B$. Ее можно сделать топологической, если рассматривать матрицу $A$ как точку $k^2$-мерного комплексного или $2k^2$-мерного действительного евклидова пространства (см. с. 5, 6 работы, цитируемой в примеч. 7). Далее, мы считаем, что каждая предельная точка (т. е. предельная матрица) для матриц из $G'$ тоже принадлежит $G'$, если ее детерминант не обращается в 0. Тогда можно подходящим образом выбранную окрестность единицы в $G'$ гомеоморфно отобразить на окрестность точки 0 в $n$-мерном ($n = 0, 1, \ldots, 2k^2$) действительном пространстве параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ [7], при этом матричные элементы матриц из $G'$ являются аналитическими функциями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поэтому закон композиции в $G'$ (т. е. произведение матриц, которое является алгебраической функцией матричных элементов) аналитически зависит от параметров $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$. Следовательно, такая группа $G'$ обладает требуемыми свойствами.

Если $G$ замкнута (т. е. компактна) и обладает непрерывным представлением $a \to D(a)$ в множестве $k$-мерных матриц, которое является точным (т. е. взаимно однозначным), то имеет место следующее утверждение. Множество $G'$ всех $D(a)$, где $a$ пробегает всю $G$, замкнуто, так как $G$ компактна, и, кроме того, обратное отображение непрерывно. Таким образом, данное представление является гомеоморфным отображением. Ясно, что оно есть изоморфизм. Так как наше утверждение согласно предыдущему верно для $G'$[8], то оно имеет место и для $G$.

Таким образом, нам требуется только доказать существование точного непрерывного представления для замкнутой группы $G$. Эта сама по себе небезынтересная теорема будет теперь главной темой нашего рассмотрения.

Требуемое представление $D(a)$ будет состоять из унитарных матриц. Поэтому, принимая во внимание теорему, упоминаемую в примеч. 7, мы можем последнюю теорему сформулировать так: единственными (в малом) $n$-параметрическими ($n = 0, 1, 2, \ldots$) замкнутыми (т. е. компактными) группами являются замкнутые группы унитарных матриц $k$-мерного (комплексного) евклидова пространства ($k = 0, 1, 2, \ldots$) и их гомеоморфно-изоморфные образы.

3. Для того чтобы наглядно пояснить своеобразный аналитико-тополого теоретико-групповой характер применяемых методов, мы приводим сводку тех результатов из новых публикаций по теории групп и топологии, на которых будет основано проводимое нами доказательство. А именно:

---

[5] То есть взаимно однозначно, непрерывно и так, что обратное отображение тоже непрерывно.

[6] То есть закон композиции в $G$ переходит в закон композиции в $G'$.

[7] Это доказал автор в [4]. В особенности следует обратить внимание на теорему 1 на с. 27 [2].

[8] Собственно говоря, еще требуется, чтобы $\mathrm{Det}(D(a)) \neq 0$. Так как $D(a) \cdot D(a^{-1}) = D(1)$, то утверждение имеет место, если $D(1)$ есть единичная матрица. Это всегда достижимо (см., например, работу, цит. в примеч. 7, и с. 28 работы, цит. в примеч. 12).

A. Хаар недавно доказал, что в каждой сепарабельной [9] и локально-компактной[10] топологической группе[11] можно ввести правоинвариантную лебегову внешнюю меру[12]. Поэтому при помощи известного процесса можно определить[13] и правоинвариантный интеграл Лебега [14] $\int_G f(x)\, dv_x$ ($dv_x$ — элемент объема в точке). Отметим здесь, что Ф. Петер и Г. Вейль при помощи модификации метода Гурвица построили такой интеграл для $n$-параметрических групп, в которых закон композиции задается с помощью непрерывно дифференцируемых функций параметров [15]. Важность конструкции Хаара состоит в том, что она очень обща и является чисто теоретико-множественной без какой-либо связи с параметрическим представлением, приводя прямо к построению меры. Поэтому наш подход, ведущий от меры Хаара к аналитическим параметрам, можно рассматривать как обратный подходу Петера—Вейля, при котором возникают другого рода трудности.

B. Легко видеть, что в случае замкнутой (компактной) $G$ мера Хаара всей группы $G$ конечна и может быть нормирована на 1. Тогда применимы операторные и спектральные методы и теоремы, которые использовали Петер и Вейль и откуда вытекает вся теория (непрерывных) представлений $G$ при помощи конечных унитарных многомерных матриц.

C. До сих пор использовалось только, что $G$ — топологическая группа. При помощи того факта, что она может быть отображена (в малом) на $n$-параметрическое множество, на основе топологических рассмотрений будет показано, что определенные в B представления должны быть точными. Для этого в первую очередь используются теоремы теории размерности. Это теорема Брауэра об инвариантности областей, теорема Лебега о «замощении» и связанная с ними общая теорема о разложении К. Менгера и П. Урысона [16].

D. При топологических рассмотрениях мы будем также многократно использовать цитируемые в примеч. 7 результаты автора о введении параметров в группы унитарных матриц.

Содержание настоящей работы таково: в § I доказывается существование точного непрерывного представления, в § II оно применяется к проблеме Гильберта и приводится контрпример для нетранзитивной (на $M$) $G$.

---

[9] См. с. 125 и формулу (10) на с. 229 цит. в примеч. 11 книги Хаусдорфа.

[10] То есть каждая точка обладает окрестностью, замыкание которой компактно. Для группы достаточно потребовать выполнения этого свойства для единицы, так как отображение $x \to x \cdot a$ является гомеоморфизмом.

[11] То есть в группе, для которой определено понятие окрестности, такое, что композиция $a \cdot b$ и переход к обратному элементу $a^{-1}$ являются непрерывными функциями соответственно от $a$ и $b$ и от $a$. О фундаментальном покрытии некоторой топологии см. [5, § 40, с. 226—230].

[12] См. [6, с. 237—274] или (для произвольного топологического пространства) [7, с. 574, 576, определения 2, 4]. «Правоинвариантность» означает, что отображение $x \to x \cdot a$ сохраняет меру.

[13] См. [8, § 3].

[14] Например, как интеграл Стилтьеса $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\, (\text{Ma}\beta_x\, [f(x) \leq \lambda])^{[3]}$.

[15] См. [9, с. 737].

[16] См. [10—12; 13, с. 251—266].

## I. ВВЕДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В $n$-ПАРАМЕТРИЧЕСКУЮ ЗАМКНУТУЮ ГРУППУ

1. Пусть $G$ — топологическая группа, т. е. в ней определено понятие окрестности так, что $a \cdot b$ и $a^{-1}$ непрерывно зависят от $a$, $b$ и от $a$ соответственно (см. примеч. 11). Мы назовем $G$ $n$-параметрической ($n = 1, 2, \ldots$), если любой элемент $a$ из $G$ обладает окрестностью $U(a)$, которая гомеоморфна открытому множеству $K(a)$ в $n$-мерном (действительном) евклидовом пространстве $R_n$ (состоящем из наборов $n$ чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Согласно примеч. 11 достаточно потребовать этого только для $a = 1$ (т. е. единицы группы), принимая во внимание, что $x \to x \cdot a$ — гомеоморфное отображение.

По этой же самой причине мы можем выбрать все $K(a)$ идентичными одно другому. При отображении $K(a)$ в $R_n$ требуется, чтобы образом $a$ была точка $0, \ldots, 0$. Естественное упрощение — взять в качестве $K(a)$ круг с центром в точке $0, \ldots, 0$ и затем сделать преобразование подобия в $R_n$ так, чтобы радиус $K(a) = 1$. Тогда $K(a)$ совпадает с $K_1 : \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 < 1$. Мы будем рассматривать еще и (замкнутый) круг $\overline{K}_{1/2} : \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \leqq 1/2$. Образ $\overline{K}_{1/2}$ при отображении $U(a) \to K(a) = K_1$ обозначим через $\overline{V}(a)$.

Множество $\overline{V}(a)$ компактно и сепарабельно, так как $\overline{K}_{1/2}$ обладает этими свойствами. Поэтому если $G$ можно покрыть конечным числом множеств $\overline{V}(a)$, то она компактна и сепарабельна; если она покрыта счетным числом таких множеств, то она является объединением счетного числа компактных множеств и сепарабельна. Обратно, если $a$ — внутренняя точка $\overline{V}(a)$, то для покрытия компактной $G$ достаточно покрытия конечным числом множеств $\overline{V}(a)$, а для сепарабельной — счетным числом. Итак, мы доказали, что *$G$ является компактной (сепарабельной) тогда и только тогда, когда она может быть покрыта конечным (счетным) числом множеств $\overline{V}(a)$. Если она сепарабельна, то всегда представима в виде объединения счетного числа компактных множеств.*

В дальнейшем вопрос об аналитичности для «замкнутых», т. е. компактных, групп $G$ мы не будем рассматривать, для «открытых», т. е. только сепарабельных, $G$ он остается открытым. Таким образом, далее всегда будет предполагаться, что $G$ — $n$-параметрическая компактная группа.

2. Непрерывные комплекснозначные функции, определенные на $G$, мы будем обозначать через $f(x)$, $g(x)$, $k(x, y)$, $\varphi(x)$; интеграл, построенный по мере Хаара,— через $\int_G f(x)\, dv_x$ (см. п. 3 введения, в особенности А и примеч. 12 и 14). Мы будем говорить, что мера $G$ конечна, если для любого компактного множества это верно. Умножая значения всех мер (и интегралов) на постоянный множитель $1/\mathrm{Ma\beta}\, G$, получим, что $\mathrm{Ma\beta}\, G = 1$ [17]. Теперь мы можем результаты Петера и Вейля, сформулированные в п. 3, В введения, перенести на нашу группу $G$ (см. также [8, с. 167—169]).

Каждому непрерывному ядру $k(x, y)$ мы сопоставим интегральный оператор $I_k$ следующим образом:

$$I_k f(x) = \int_G k(x, y) f(y)\, dv_y.$$

[17] Это единственное место, где существенно используется компактность $G$.

Если такой оператор эрмитово симметричен, т. е. $k(y, x) = \overline{k(x, y)}$, то к нему непосредственно применимы методы, разработанные в диссертации Е. Шмидта [18]. Поэтому, в частности, имеет место следующее утверждение:

*Отличные от 0 различные собственные значения $I_k$ представляют собой последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (число ее элементов равно 0, 1, 2, ... или бесконечно, но счетно). Для каждого $\lambda_\nu$ существует только конечное число линейно независимых собственных функций, т. е. решений уравнения $I_k f = \lambda_\nu f$. Их максимальное число обозначим через $N_\nu (= 1, 2, \ldots)$. Эти $N_\nu$ собственных функций $f_1^{(\nu)}, \ldots, f_{N_\nu}^{(\nu)}$ можно даже выбрать ортонормированными* [19]. *Каждая функция вида $I_k f$ ($f$ — произвольная) может быть как угодно хорошо равномерно аппроксимирована линейными комбинациями конечного числа $f_l^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots; \ l = 1, \ldots, N_\nu$).*

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция на $G$. Положим $k(x, y) = \varphi(xy^{-1})$, $I_k = T_\varphi$ и применим только что сказанное к $T_\varphi$. При этом, конечно, необходимо, чтобы всюду $\varphi(yx^{-1}) = \overline{\varphi(xy^{-1})}$, т. е. $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$.

Оператор $T_\varphi$ обладает следующим свойством: если $f(x)$ переводится им в $g(x)$, то $f(x \cdot a)$ переходит в $g(x \cdot a)$ (нужно вместо $y$ подставить $y \cdot a^{-1}$ в формулу, определяющую $I_k = T_\varphi$, и использовать правоинвариантность и равенство $x \cdot (y \cdot a^{-1})^{-1} = (x \cdot a) \cdot y^{-1}$. Поэтому, если $f(x)$ — собственная функция $T_\varphi$, то и $f(x \cdot a)$ — тоже его собственная функция, соответствующая тому же собственному значению. Следовательно, $f_l^{(\nu)}(x \cdot a)$ есть линейная комбинация функций $f_1^{(\nu)}(x), \ldots, f_{N_\nu}^{(\nu)}(x)$.

Мы будем называть любую конечную ортонормированную систему функций $f_1(x), \ldots, f_N(x)$, для которой каждая $f_l(x \cdot a)$ ($l = 1, \ldots, N$; $a \in G$) является линейной комбинацией $f_1(x), \ldots, f_N(x)$, представительной. Тогда $f_1^{(\nu)}(x), \ldots, f_{N_\nu}^{(\nu)}(x)$ образуют представительную систему. Следовательно, мы можем заключить, что существует последовательность (состоящая из 0, 1, 2, ... или бесконечного счетного числа) представительных систем, так что любая функция $T_\varphi f$ ($\varphi$ фиксирована, $f$ — произвольная) может быть как угодно хорошо аппроксимирована линейными комбинациями конечного числа функций из этой последовательности

Если дана последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, такая, что любая $f$ как угодно хорошо аппроксимируется функциями вида $T_{\varphi_s} g$ ($s = 1, 2, \ldots$; $g$ — любая), то, объединяя последовательность представительных систем для $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, получаем новую последовательность представительных систем, обладающую тем свойством, что любая $f$ может быть как угодно хорошо приближена линейной комбинацией конечного числа функций из этой системы. Отсюда вытекает также, что эта последовательность должна быть непустой и не может быть конечной.

Последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, для которой $T_{\varphi_s} f$ при $s \to \infty$ равномерно в $G$ сходится к $f$ (для любой непрерывной $f$), обладает указанным выше свойством.

[18] См. [14].

[19] Система функций называется ортонормированной, если

$$\int_G f_j(x) \overline{f_l(x)} \, dv_x = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$$

Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — окрестности 1 (единицы группы $G$). Пусть $\varphi_s(x)$ всюду действительна и неотрицательна, вне $U_s$ равна 0 и $\int_G \varphi_s(x)\,dv_x = 1$. Кроме того, естественно, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)\,(=\overline{\varphi(x)})$. Тогда последовательность таких $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ будет искомой. Эти $\varphi_s$ слабо зависят от $U_s$: например, достаточно, чтобы $\int_G \varphi_s(x)\,dv_x > 0$ (а не был бы обязательно равен 1), так как мы можем заменить $\varphi_s(x)$ на $\varphi_s(x)/\int_G \varphi_s(x)\,dv_x$. Далее, равенства $\varphi_s(x^{-1}) = \varphi_s(x)$ не требуется, так как мы можем $\varphi_s(x)$ заменить на $\varphi_s(x) + \varphi_s(x^{-1})$. При этом $U_s$ может быть так велика, что при всех $x$ из новой $U_s$ $x$ и $x^{-1}$ оба принадлежат старой. Далее, мы можем выбрать все $U_s$ принадлежащими $\overline{V}(1)$. Пусть $\overline{U}_s$ — образ при отображении $\overline{V}(1) \to \overline{K}(1/2)$; $\overline{U}_s$ обязательно содержит некоторый круг радиуса $\varepsilon_s > 0$ с центром в точке $0, \ldots, 0$. Для любого $x$ из $U_s$ обозначим через $d_s(x)$ расстояние от его образа, лежащего в $\overline{K}(1/2)$, до $0, \ldots, 0$. Тогда, если положить

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \operatorname{Max}(\varepsilon_s - d_s(x), 0) & \text{для } x \text{ из } U_s, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то выполняются все оставшиеся условия.

Итак, существует последовательность представлений с описанными выше свойствами. Мы обозначим их через $f_1^{(\mu)}(x), \ldots, f_{M_\mu}^{(\mu)}(x)$, $\mu = 1, 2, \ldots$

3. Представление $f_l^{(\mu)}(x \cdot a)$ является линейной комбинацией $f_1^{(\mu)}(x), \ldots, f_{M_\mu}^{(\mu)}(x)$, так что $f_l^{(\mu)}(x \cdot a) = \sum_{l=1}^{M_\mu} a_{il}^{(\mu)}(a)\, f_l^{(\mu)}(x)$, $\mu = 1, 2, \ldots$; $l = 1, \ldots; M_\mu$, $a \in G$. Поскольку $f_l^{(\mu)}(x)$ ортонормированы, то, если положить

$$\alpha_{il}^{(\mu)}(a) = \int_G f^{(\mu)}(x \cdot a)\, \overline{f_l^{(\mu)}}(x)\, dv_x,$$

получим, что $\alpha_{il}^{(\mu)}(a)$ непрерывно зависит от $a$. Далее, матрица $A^{(\mu)}(a) = \{a_{il}^{(\mu)}\}_{i,l=1,\ldots,M_\mu}$ унитарна и, очевидно, $A^{(\mu)}(a \cdot b) = A^{(\mu)}(a)\,A^{(\mu)}(b)$. Поэтому матрицы $A^{(\mu)}(a)$ ($\mu$ фиксировано) образуют непрерывное представление $G$.

Если для $a$, $b$ из $G$ при всех $\mu = 1, 2, \ldots$ $A^{(\mu)}(a) = A^{(\mu)}(b)$, то, по определению, всюду $f_l^{(\mu)}(x \cdot a) = f_l^{(\mu)}(x \cdot b)$. Отсюда для всех $f$, являющихся линейными комбинациями конечного числа функций $f_l^{(\mu)}$ или как угодно хорошо аппроксимирующихся такими комбинациями, т. е. любой непрерывной $f$, должно выполняться равенство $f(x \cdot a) = f(x \cdot b)$. Пусть $x = b^{-1}$. Тогда для любой непрерывной $f$ имеем $f(b^{-1}a) = f(1)$. Поэтому должно выполняться равенство $b^{-1}a = 1$, т. е. $a = b$[20]. Таким образом, объединение представлений $A_1(a)$, $A_2(a)$, ... является точным, и тем самым мы получили требуемое (конечномерное!) представление.

[20] Для $C \neq 1$ пусть $U$ — не содержащая $C$ окрестность 1. Тогда если мы построим $f$ для $U$ так же, как выше $\varphi_s$ по $U_s$, то получим $f(1) > 0$, $f(C) = 0$.

Пусть $M_1 + \ldots + M_\mu = L_\mu$. Мы поставим $A^{(1)}(a), \ldots, A^{(\mu)}(a)$ на диагонали $L_\mu$-мерной матрицы один за другим и положим остальные элементы равными нулю. При этом получится $L_\mu$-мерная матрица $B^{(\mu)}(a)$ (см. таблицу).

| Номер строки | $B^{(\infty)}(a)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B^{(1)}(a)$ | $B^{(2)}(a)$ | ... | $B^{(\mu)}(a)$ | ... |
| $1 = 1$ ........<br>$2 = 2$ ........<br>⋮<br>$L_1 = M_1$ ........ | $A^{(1)}(a)$ | 0 | ... | | ... |
| $L_1 + 1 = M_1 + 1$ ........<br>$L_1 + 2 = M_2 + 2$ ........<br>⋮<br>$L_2 = M_1 + M_2$ ........ | 0 | $A^{(2)}(a)$ | ⋱ | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋱ | | ... |
| $L_{\mu-1} + 1 = M_1 + \ldots + M_{\mu-1} + 1$ ...<br>$L_{\mu-1} + 2 = M_1 + \ldots + M_{\mu-1} + 2$ ...<br>⋮<br>$L_\mu = M_1 + \ldots + M_{\mu-1} + M_\mu$ ... | 0 | | | $A^{(\mu)}(a)$ | ⋱ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋱ | ⋱ |

Поступив так со всеми $A^{(1)}(a)$, $A^{(2)}(a), \ldots$, мы получим бесконечномерную матрицу $B^\infty(a)$ (см. таблицу), но с конечномерными строками и столбцами. Матрицы $B^{(\mu)}(a)$ и $B^\infty(a)$ определяют, очевидно, унитарные представления $G$; $B^{(\mu)}(a)$ непрерывно зависит от $a$. Аналогично и для $B^{(\infty)}(a)$, если для бесконечных матриц определить сходимость через сходимость всех их матричных элементов[21]. Наконец, $B^{(\mu)}(a)$ есть $L_\mu$-й отрезок $B^{(\infty)}(a)$. Множество всех $B^{(\mu)}(a)$ ($a$ пробегает всю $G$) обозначим через $\mathfrak{G}^{(\mu)}$, всех $B^{(\infty)}(a)$ — через $\mathfrak{G}^{(\infty)}$, при этом

[21] Эта топология для бесконечных матриц $\{\alpha_{j,l}\}_{j,l=1,2,\ldots}$ может быть получена при различных определениях расстояния (см. примеч. 11), например при

$$\mathrm{Entf}\,(\{\alpha_{jl}\},\ \{\beta_{jl}\}) = \underset{L=1,2,\ldots}{\mathrm{Min}} \left\{ \mathrm{Max} \left[ \underset{j,l=1,\ldots,L}{\mathrm{Max}} (|\alpha_{jl} - \beta_{jl}|),\ \frac{1}{L} \right] \right\}.$$ [4]

$\mathfrak{G}^{(\mu)}$ является непрерывным образом $G$, а $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ согласно доказанному выше есть взаимно однозначный и непрерывный образ $G$. Так как $G$ компактна, то обратное к этому отображению обязано тоже быть непрерывным.

В дальнейшем мы покажем, что уже некоторое $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ является взаимно однозначным образом $G$, т. е. и некоторое $B^{(\mu)}(a)$ является точным. Тем самым программа, намеченная в п. 2 введения, будет выполнена. Для этого мы должны существенно использовать до сих пор почти не привлекавшуюся связь $G$ с $n$-мерным (действительным) евклидовым пространством, т. е. отображение $U(1)$ на $K(1)$ (до сих пор на самом деле использовалось только то, что $G$ — топологическая, сепарабельная и компактная группа).

4. Так как $B^{(\mu)}(a)$ является представлением, то оно отображает группу $G$ на некоторую группу. Тем самым $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ является матричной группой. Поскольку $1^2 = 1$, то образ 1 совпадает с собственным квадратом, а так как он, кроме того, унитарен, то обязан совпадать с $L_\mu$-мерной единичной матрицей $E_{L_\mu}$.

Далее, $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ является замкнутым множеством матриц, так как $B^{(\mu)}(a)$ непрерывно, а $G$ компактна, и, следовательно, компактен ее образ. Поэтому цитируемые в примеч. 7 результаты автора применимы к $\mathfrak{G}^{(\mu)}$. В частности, имеет место следующее утверждение (см. [4, с. 27, теорема 1]):

*Существует* $P_\mu$ $(= 0, 1, \ldots, 2L_\mu^2)$ *линейно независимых* $L_\mu$*-мерных матриц* $U_1^{(\mu)}, \ldots, U_{P_\mu}^{(\mu)}$ *(их матричные элементы комплексны, однако линейная независимость имеет место с действительными коэффициентами), таких, что все матрицы* $\exp(\alpha_1 U_1^{(\mu)} + \ldots + \alpha_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\mu)})$[22] *принадлежат* $\mathfrak{G}^{(\mu)}$. *Если* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{P_\mu}$ *пробегают соответствующим образом выбранную окрестность* $K^{(\mu)}$ *точки* $0, \ldots, 0$, *то*

$$\exp(\alpha_1 U_1^{(\mu)} + \ldots + \alpha_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\mu)})$$

*совпадает с некоторой окрестностью* $\mathfrak{K}^{(\mu)}$ *единичной матрицы* $E_{L_\mu}$ *в* $\mathfrak{G}^{(\mu)}$.

Возьмем некоторое $U_P^{(\mu)}$. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — сходящаяся к 0 последовательность чисел, больших 0. Множество $\exp(\varepsilon_s U_P^{(\mu)})$ принадлежит $\mathfrak{G}^{(\mu)}$. Поэтому оно имеет вид $B^{(\mu)}(a)$ при $a = a_p$. Множество $B^{(\mu+1)}(a_p)$ лежит в $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ и поэтому имеет предельную точку. Выберем подпоследовательность из $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, так что $B^{(\mu+1)}(a_p)$ сходятся. Если взять монотонную последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, то и выбранная из нее подпоследовательность будет монотонна. Возьмем первоначальную последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ именно с таким свойством. Тогда

$$\varepsilon_s - \varepsilon_{s+1} \to 0, \quad \varepsilon_s - \varepsilon_{s+1} > 0$$

---

[22] Если $A$ — конечная многомерная матрица, то $\exp(A)$ определяется как $\lim_{h\to\infty} \sum_{s=0}^{h} \frac{A^s}{s!}$ (см. [4, с. 7 — 15]).

и

$$B^{(\mu)}(a_s a_{s+1}^{-1}) = B^{(\mu)}(a_s)B^{(\mu)}(a_{s+1})^{-1} =$$
$$= \exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)})\exp(\varepsilon_{s+1}U_p^{(\mu)}) = \exp((\varepsilon_s - \varepsilon_{s+1})U_p^{(\mu)}),$$
$$B^{(\mu+1)}(a_s a_{s+1}^{-1}) = B^{(\mu+1)}(a_s)B^{(\mu+1)}(a_s)^{-1} \to E_{L_{\mu+1}}.$$

Поэтому если мы заменим $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ на $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots$, то в качестве $a_s$ надо взять $a'_s = a_s a_{s+1}^{-1}$, и тогда $B^{(\mu+1)}(a'_s) \to E_{L_{\mu+1}}$. Следовательно, можно считать, что $B^{(\mu+1)}(a_s) \to E_{L_{\mu+1}}$ уже для первоначально выбранной последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

Таким образом, почти все $B^{(\mu+1)}(a_s)$ и $B^{(\mu)}(a_s)$ принадлежат $\mathfrak{K}^{(\mu+1)}$ и $\mathfrak{K}^{(\mu)}$ соответственно. Для них имеет место равенство

$$B^{(\mu+1)}(a_s) = \exp(\alpha_{s,1}U_1^{(\mu+1)} + \ldots + \alpha_{s,P(\mu+1)}U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}),$$

где $\alpha_{s,1}, \ldots, \alpha_{s,P_{(\mu+1)}}$ принадлежат $K^{(\mu+1)}$. При $s \to \infty$ это выражение стремится к $E_{L_{\mu+1}}$. Поэтому $\alpha_{s,1}, \ldots, \alpha_{s,P_{\mu+1}}$ сходятся к $0, \ldots, 0$. Кроме того,

$$\alpha_s = |\alpha_{s,1}| + \ldots + |\alpha_{s,P_{\mu+1}}| > 0$$

(если $\alpha_s = 0$, то $\alpha_{s,1} = \ldots = \alpha_{s,P_{\mu+1}} = 0$, $B^{(\mu+1)}(a_s) = E_{L_{\mu+1}}$, тем более $\exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)}) = B^{(\mu)}(a_s) = E_{L_\mu}$, и поэтому $\varepsilon_s = 0$, что противоречит предположению) тоже стремится к 0. Пусть

$$\beta_{s,1} = \alpha_{s,1}/\alpha_s, \ldots, \beta_{s,P_{\mu+1}} = \alpha_{s,P_{\mu+1}}/\alpha_s,$$

тогда

$$|\beta_{s,1}| + \ldots + |\beta_{s,P_{\mu+1}}| = 1.$$

Для некоторой подпоследовательности $\beta_{s,1}, \ldots, \beta_{s,P_{\mu+1}}$ сходятся. Мы можем так осуществить выбор, что это будет выполняться уже для первоначальной последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Пусть пределы соответственно равны $\bar\beta_1, \ldots, \bar\beta_{P_{\mu+1}}$, тогда

$$|\bar\beta_1| + \ldots + |\bar\beta_{P_{\mu+1}}| = 1.$$

Обозначим $L_\mu$-часть $U_q^{(\mu+1)}$ через $\tilde U_q^{(\mu+1)}$. Так как $B^{(\mu)}(a_s)$ есть $L_\mu$-часть $B^{(\mu+1)}(a_s)$, то $\exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)})$, равная $\exp(\alpha_s(\beta_{s,1}U_1^{(\mu+1)} + \ldots + \beta_{s,P_{\mu+1}}U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}))$, может быть записана в виде

$$\exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)}) = \exp(\alpha_s(\beta_{s,1}\tilde U_1^{(\mu+1)} + \ldots + \beta_{s,P_{\mu+1}}\tilde U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)})).$$

Если только $\varepsilon_s$ и $\alpha_s$ достаточно малы, то для почти всех $s$ отсюда вытекает, что

$$\varepsilon_s U_p^{(\mu)} = \alpha_s(\beta_{s,1}\tilde U_1^{(\mu+1)} + \ldots + \beta_{s,P_{\mu+1}}\tilde U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}).$$

Тогда $\varepsilon_s U_p^{(\mu)}/\alpha_s$ сходится при $s\to\infty$ к

$$\overline{\beta}_1\tilde{U}_1^{(\mu+1)}+\ldots+\overline{\beta}_{P_{\mu+1}}\tilde{U}_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}.$$

Так как $U_p^{(\mu)}$ и соответствующий предел не равны нулю, то $\varepsilon_s/\alpha_s$ сходится к пределу $\gamma\neq 0$. Далее, должно выполняться равенство

$$U_p^{(\mu)}=\frac{\overline{\beta}_1}{\gamma}\tilde{U}_1^{(\mu+1)}+\ldots+\frac{\overline{\beta}_{P_{\mu+1}}}{\gamma}\tilde{U}_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)},$$

т. е. $U_p^{(\mu)}$ является $L_\mu$-частью матрицы

$$\frac{\overline{\beta}_1}{\gamma}U_1^{(\mu+1)}+\ldots+\frac{\overline{\beta}_{P_{\mu+1}}}{\gamma}U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}.$$

При этом каждая $U_p^{(\mu)}$, $p=1,\ldots,P_\mu$, есть $L_\mu$-часть некоторой линейной комбинации $U_q^{(\mu+1)}$, $q=1,\ldots,P_{\mu+1}$. Эти линейные комбинации должны быть линейно независимы, так как это имеет место уже для их $L_\mu$-отрезков $U_p^{(\mu)}$. Поэтому $P_\mu\leqq P_{\mu+1}$. Далее, мы можем $U_q^{(\mu+1)}$, $q=1,\ldots,P_{\mu+1}$, так переобозначить (а именно линейно преобразовать), что эти $P_\mu$ линейных комбинаций будут совпадать с $U_1^{(\mu+1)},\ldots,U_{P_\mu}^{(\mu+1)}$. Если мы проведем это преобразование последовательно для $\mu=1,2,\ldots$, то получим, что для всех $\mu$ $U_p^{(\mu)}$ есть $L_\mu$-часть $U_p^{(\mu+1)}$. В дальнейшем будем предполагать, что это выполнено.

5. Рассмотрим для каждого $\nu\geqq\mu$ $\exp(x_1U_1^{(\nu)}+\ldots+x_{P_\mu}U_{P_\mu}^{(\nu)})$. Обозначим $a$, при котором $B^{(\nu)}(a)$ совпадает с этим выражением, через $a_\nu(x_1\ldots x_{P_\mu})$. Так как $G$ компактна, то $a_\nu(x_1\ldots x_{P_\mu})$ имеют предельную точку $a(x_1\ldots x_{P_\mu})$. Далее, для $\nu\geqq\mu_1\,(\geqq\mu)$ $L_{\mu_1}$-часть $B^{(\infty)}(a_\nu(x_1\ldots x_{P_\mu}))$ совпадает с $L_{\mu_1}$-частью $B^{(\nu)}(a_\nu(x_1\ldots$ $\ldots x_{P_\mu}))=\exp(x_1U_1^{(\nu)}+\ldots+x_{P_\mu}U_{P_\mu}^{(\nu)})$ и поэтому совпадает с $B^{(\mu_1)}(a_{\mu_1}(x_1\ldots x_{P_\mu}))=$ $=\exp(x_1U_1^{(\mu_1)}+\ldots+x_{P_\mu}U_{P_\mu}^{(\mu_1)})$ и тем самым не зависит от $\nu$. Таким образом, она является также $L_{\mu_1}$-частью $B^{(\infty)}(a(x_1\ldots x_{P_\mu}))$, т. е. почти все $B^{(\infty)}(a_\nu(x_1\ldots$ $\ldots x_{P_\mu}))$ имеют ту же $L_{\mu_1}$-часть, что и $B^{(\infty)}(a(x_1\ldots x_{P_\mu}))$. Согласно $L_{\mu_1}\to\infty$ это означает, что при $\nu\to\infty$ $B^{(\infty)}(a_\nu(x_1\ldots x_{P_\mu}))$ сходится к $B^{(\infty)}(a(x_1\ldots x_{P_\mu}))$ (см. конец п. 3 и примеч. 21). Поэтому $a_\nu(x_1\ldots x_{P_\mu})$ тоже сходится к $a(x_1\ldots x_{P_\mu})$ (см. там же). Так как $L_{\mu_1}$-часть $B^{(\infty)}(a(x_1\ldots x_{P_\mu}))$ есть $\exp(x_1U_1^{(\mu_1)}+\ldots+x_{P_\mu}U_{P_\mu}^{(\mu_1)})$, т. е. непрерывна по $x_1,\ldots,x_{P_\mu}$, то и каждый матричный элемент в $B^{(\infty)}(a(x_1\ldots$ $\ldots x_{P_\mu}))$ непрерывен по $x_1,\ldots,x_{P_\mu}$. Поэтому (см. конец п. 3) $B^{(\infty)}(a(x_1\ldots x_{P_\mu}))$ непрерывно зависит от $a(x_1\ldots x_{P_\mu})$. Если $x_1,\ldots,x_{P_\mu}$ принадлежат $K^{(\mu)}$, то уже

$L_\mu$-часть $B^{(\infty)}(a(x_1 \dots x_{P_\mu}))$ взаимно однозначно соответствует $x_1, \dots, x_{P_\mu}$ и аналогично $a(x_1 \dots x_{P_\mu})$. Так как каждая $L_{\mu_1}$-часть $B^{(\infty)}(a(0 \dots 0))$ совпадает с $E_{L_{\mu_1}}$, то $B^{(\infty)}(a(0 \dots 0))$ — единичная матрица и $a(0 \dots 0) = 1$. Если мы рассмотрим $x_1, \dots, x_{P_\mu}$, принадлежащие достаточно малой окрестности $\overline{K}^{(\mu)}$ точки $0, \dots, 0$, то получим, что $a(x_1 \dots x_{P_\mu})$ принадлежит $U(1)$ (в $G$).

Таким образом, совокупность $a(x_1 \dots x_{P_\mu})$ отображает область $\overline{K}^{(\mu)}$ $P_\mu$-мерного евклидова пространства взаимно однозначно и непрерывно на подмножество $U(1)$, которое, в свою очередь, является взаимно однозначным и непрерывным образом некоторой области $K(1)$ $n$-мерного евклидова пространства. Поэтому из теоремы Брауэра об инвариантности областей (см. [10]) вытекает, что $P_\mu \leqq n$. Итак, $P_1 \leqq P_2 \leqq \dots \leqq n$. Поэтому при некотором $\bar{\mu}$ $P_{\bar{\mu}}$ — константа, т. е. $P_{\bar{\mu}} = P_{\bar{\mu}+1} = \dots = P \leqq n$.

6. Пусть $\mu \geqq \bar{\mu}$. Тогда $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ гомеоморфно некоторой окрестности точки $E_{L_\mu}$ области $K^{(\mu)}$ $P$-мерного пространства и тем самым $P$-мерно. В силу группового свойства это выполняется для всех точек, и, следовательно, $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ как топологическое пространство $P$-мерно (см. [13, с. 79 — 80]). Будучи компактным $P$-мерным множеством в $2L_\mu^2$-мерном евклидовом пространстве $L_\mu$-мерных матриц, оно удовлетворяет «общей теореме о разложении» теории размерности (см. [13, с. 156]): для любого $\varepsilon > 0$ можно найти конечное число таких множеств $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_t$ (естественно зависящих от $\mu$ и $\varepsilon$), что: 1) диаметр каждого $\mathfrak{H}_t \leqq \varepsilon$[23]; 2) любые $P+2$ множества $\mathfrak{H}_t$ не имеют общей точки; 3) $\mathfrak{H}_1 + \dots + \mathfrak{H}_t = \mathfrak{G}^{(\mu)}$.

Обозначим через $\mathfrak{H}_t'$ множество всех $B^{(\infty)}(a)$, для которых $B^{(\mu)}(a)$ принадлежит $\mathfrak{H}_t$. Тогда имеет место: 2') любые $P+2$ множества $\mathfrak{H}_t'$ не имеют общей точки; 3') $\mathfrak{H}_1' + \dots + \mathfrak{H}_t' = \mathfrak{G}^{(\infty)}$ = множеству всех $B^{(\infty)}(a)$. Далее, расстояние в смысле примеч. 21 между $B^{(\infty)}(a)$ и $B^{(\infty)}(b)$ не превосходит $\mathrm{Max}(1/\mu, d)$, где $d$ — расстояние между $L_\mu$-частями $B^{(\mu)}(a)$ и $B^{(\mu)}(b)$. При этом диаметр $\mathfrak{H}_t' \leqq$ $\leqq \mathrm{Max}(1/\mu, \bar{d}_t)$, где $\bar{d}_t$ — диаметр $\mathfrak{H}_t$, т. е. $\leqq \mathrm{Max}(1/\mu, \varepsilon)$. Для достаточно больших $\mu$ ($\mu \geqq 1/\varepsilon$) имеет место также: 1') диаметр любого $\mathfrak{H}_t' \leqq \varepsilon$. Согласно обратной теореме к «общей теореме о разложении» (см. [13, с. 157]) $\mathfrak{G}^{(\infty)} \leqq P$-мерно. Но так как $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ гомеоморфно $G$, то оно, как и $G$, $n$-мерно. Отсюда $P \geqq n$. Таким образом, $P = n$, т. е. $P_{\bar{\mu}} = P_{\bar{\mu}+1} = \dots = n$.

7. Описанное в п. 5 гомеоморфное отображение $x_1, \dots, x_{P_\mu}$ на $a(x_1, \dots, x_{P_\mu})$ согласно доказанному выше отображает $x_1, \dots, x_n$ при $\mu \geqq \bar{\mu}$ (мы фиксируем $\mu$)

[23] Для лучшего соответствия с определенным в примеч. 21 расстоянием для бесконечномерных матриц мы определим расстояние для $P$-мерных матриц следующим образом (оно топологически эквивалентно используемому в примеч. 7 и обычно вводимой топологии):

$$\mathrm{Entf}(\{\alpha_{jl}\}, (\beta_{jl}\}) = \mathop{\mathrm{Max}}_{j,l=1,\dots,P} (|\alpha_{jl} - \beta_{jl}|).$$

на $a(x_1 \ldots x_n)$. Кроме того, область $\overline{K}(\mu)$ $n$-мерного евклидова пространства отображается при этом на подмножество $U$ множества $U(1)$, которое тем самым гомеоморфно области $n$-мерного евклидова пространства. Из теоремы Брауэра об инвариантности областей вытекает (см. примеч. 16), что у образа $U$ найдется внутренняя точка.

Пусть $a$, $b$ — точки из $U$, $B^{(\mu)}(a) = B^{(\mu)}(b)$ $(\mu \geqq \overline{\mu})$. Имеем

$$a = a(x_1 \ldots x_n), \qquad B^{(\mu)}(a) = \exp(x_1 U_1^{(\mu)} + \ldots + x_n U_n^{(\mu)}),$$

аналогично

$$b = b(x_1 \ldots x_n), \qquad B^{(\mu)}(b) = \exp(y_1 U_1^{(\mu)} + \ldots + y_n U_n^{(\mu)}).$$

Отсюда

$$\exp(x_1 U_1^{(\mu)} + \ldots + x_n U_n^{(\mu)}) = \exp(y_1 U_1^{(\mu)} + \ldots + y_n U_n^{(\mu)}),$$

и так как $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ принадлежат $\overline{K}^{(\mu)}$, то $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. Поэтому $a = b$, и если $a \neq b$, то $B^{(\mu)}(a) \neq B^{(\mu)}(b)$.

Множество всех элементов вида $x \cdot c$, где $x \in U$, обозначим $U \cdot c$. Если $\bar{a}$ — внутренняя точка $U$, то $a$ — внутренняя точка $U(\bar{a}^{-1} \cdot a)$. Таким образом, каждая точка из $G$ является внутренней для некоторого $U \cdot c$. Так как $G$ компактна, достаточно выбрать конечное число множеств вида $U \cdot c$, чтобы покрыть всю $G$. Пусть это будут множества $U \cdot c_1, \ldots, U \cdot c_{\bar{r}}$. Далее, в $U \cdot c$ из $a \neq b$ вытекает $B^{(\mu)}(a) \neq B^{(\mu)}(b)$ (так как $a \cdot c^{-1}$, $b \cdot c^{-1}$ принадлежат $U$, то каждое последующее неравенство в приводимой ниже цепочке следует из предыдущего: $a \cdot c^{-1} \neq b \cdot c^{-1}$, $B^{(\mu)}(a \cdot c^{-1}) \neq B^{(\mu)}(b \cdot c^{-1})$, $B^{(\mu)}(a) \cdot B^{(\mu)}(c)^{-1} \neq B^{(\mu)}(b) \cdot B^{(\mu)}(c)^{-1}$, $B^{(\mu)}(a) \neq B^{(\mu)}(b)$). Итак, мы получили следующее: в каждом $U \cdot c_r$ $(r = 1, \ldots, \bar{r})$ есть максимум одно $a$, для которого $B^{(\mu)}(a) = E_{L_\mu}$, и тем самым существует не более $\bar{r}$ таких $a$.

Обозначим через $\mathfrak{E}_\mu$ множество тех $a$, для которых $B^{(\mu)}(a) = E_{L_\mu}$. Очевидно, что оно является подгруппой $G$ и $\mathfrak{E}_1 \supseteqq \mathfrak{E}_2 \supseteqq \ldots$ Согласно предыдущему при $\mu \geqq \overline{\mu}$ это множество конечно. Число элементов в конечных подгруппах $\mathfrak{E}_{\overline{\mu}} \supseteqq \mathfrak{E}_{\overline{\mu}+1} \supseteqq \ldots$ монотонно не возрастает. Поэтому, начиная с какого-то $\mu = \overline{\overline{\mu}}$, оно постоянно. Подгруппы $\mathfrak{E}_{\overline{\overline{\mu}}} \supseteqq \mathfrak{E}_{\overline{\overline{\mu}}+1} \supseteqq \ldots$ имеют одно и то же число элементов и, следовательно, совпадают, т. е. $\mathfrak{E}_{\overline{\overline{\mu}}} = \mathfrak{E}_{\overline{\overline{\mu}}+1} = \ldots$ Если $a$ принадлежит $\mathfrak{E}_{\overline{\overline{\mu}}}$, то оно обязано принадлежать всем $\mathfrak{E}_\mu$ с $\mu \geqq \overline{\overline{\mu}}$. Тем самым все $B^{(\mu)}(a) = E_{L_\mu}$ (при $\mu \geqq \overline{\overline{\mu}}$, т. е. при всех $\mu$). Отсюда следует, что $B^{(\infty)}(a)$ — единичная матрица, т. е. равна $B^{(\infty)}(1)$. Но $B^{(\infty)}(x)$ взаимно однозначно (см. п. 3), поэтому $a = 1$. Таким образом, $\mathfrak{E}_{\overline{\overline{\mu}}}$ содержит только 1, отсюда при $a \neq 1$ $B^{(\overline{\overline{\mu}})}(a) \neq E_{L_\mu}$, т. е. при $a \neq b$ $B^{(\overline{\overline{\mu}})}(a) \neq B^{(\overline{\overline{\mu}})}(b)$. Следовательно, $B^{(\overline{\overline{\mu}})}(a)$ взаимно однозначно, т. е. точное.

Отсюда вытекает, что $\bar{\bar{B}}^{(\mu)}(a)$ есть гомеоморфное отображение, $G$ гомеоморфна и изоморфна $\bar{\bar{\mathfrak{G}}}^{(\mu)}$. Таким образом, $\bar{\bar{B}}^{(\mu)}(a)$ и $\bar{\bar{\mathfrak{G}}}^{(\mu)}$ обладают свойствами, обсуждавшимися в п. 2 введения, и соответствуют рассматриваемым там $D(a)$ и $G'$. Сформулируем полученный результат:

Теорема I. *Единственными n-параметрическими и компактными* (в смысле I.1) *топологическими группами являются замкнутые группы конечных унитарных матриц над конечномерными* (*комплексными*[24]) *евклидовыми пространствами и гомеоморфно-изоморфные им группы.*

## II. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ $G$ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ $M$

**1.** Топологическая группа $G$ называется группой непрерывных преобразований пространства $M$, если каждому $a \in G$ сопоставляется гомеоморфное (т. е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное) отображение $F_a(\xi)$ ($\xi$ пробегает $M$) $M$ на $M$. При этом должны выполняться следующие условия.

1. Имеет место функциональное равенство

$$F_b(F_a(\xi)) = F_{a \cdot b}(\xi).$$

2. $F_a(\xi)$ есть непрерывная функция $a$ (при фиксированном $\xi$).

В дальнейшем мы предполагаем, что $G$ $n$-параметрическая, компактная группа и действует на $M$ транзитивно. Относительно $M$ не делается никаких дополнительных предположений

Таким образом, $G$ гомеоморфна и изоморфна замкнутой группе унитарных преобразований конечномерного (пусть $k$-мерного) пространства (теорема I), и мы в дальнейшем идентифицируем ее с такой группой. Далее, мы выделим некоторый элемент $\xi_0$ из $M$ и обозначим для любого $\xi$ из $M$ через $H(\xi)$ множество всех $a$ из $G$, таких, что $F_a(\xi_0) = \xi$. Очевидно, что $H(\xi)$ замкнуто и вследствие транзитивности непусто Множество $H(\xi_0)$ обладает групповым свойством и, следовательно, является замкнутой подгруппой $G$; $H(\xi)$ являются правыми смежными классами $H(\xi_0)$. Каждое $a$ из $G$ принадлежит в точности одной $H(\xi)$, а именно той, для которой $\xi = F_a(\xi_0)$. Следовательно, $\xi$ непрерывно зависит от $a$.

Применим теорему, доказанную в § 1, п. 4 для $\mathfrak{G}^{(\mu)}$, к $G$ и $H(\xi_0)$, вследствие чего возникают ($k$-мерные) матрицы $U'_1, \ldots, U'_n$ и $U_1, \ldots, U_l$. Из теоремы Брауэра об инвариантности числа измерений [10] вытекает, что если $G$ одновременно является $n$- и $n'$-параметрической, то $n = n'$ Так как $H(\xi_0)$ — подгруппа $G$, то $U_1, \ldots, U_l$ являются линейными комбинациями $U'_1, \ldots, U'_n$. При этом $l \leqq n$ и мы можем так переобозначить $U'_1, \ldots, U'_n$ (а именно линейно преобразовать), что

$$U'_1 = U_1, \ldots, U'_l = U_l.$$

---

[24] Можно ограничиться и действительными пространствами. Для этого нужно удвоить размерность рассматриваемого пространства, где в качестве мнимой единицы $i$ следует взять матрицу $\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{Vmatrix}$

Поэтому мы можем всюду в дальнейшем считать, что $U_1, \dots, U_n$ принадлежат $G$, а $U_1, \dots, U_l$ $(l \leq n)$ принадлежат $H(\xi_0)$.

2. Рассмотрим $k$-мерные матрицы: $\exp(u_1 U_{l+1} + \dots + u_{n-l} U_n)$ $(u_1, \dots, u_{n-l}$ — действительные). Имеет место следующее утверждение: существует окрестность $U^*$ точки $0, \dots, 0$ в (действительном) $(n-l)$-мерном евклидовом пространстве, такая, что если $u_1, \dots, u_{n-l}$ и $v_1, \dots, v_{n-l}$ принадлежат $U^*$, а $a, b$ принадлежат $H(\xi_0)$, то из

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \dots + u_{n-l} U_n) \cdot a = \exp(v_1 U_{l+1} + \dots + v_{n-l} U_n) \cdot b$$

вытекает

$$u_1 = v_1, \dots, u_{n-l} = v_{n-l}$$

(и при этом $a = b$). Предыдущее равенство можно также записать в виде

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \dots + u_{n-l} U_n)^{-1} \exp(v_1 U_{l+1} + \dots + v_{n-l} U_n) = a \cdot b^{-1},$$

т. е. это означает, что левая часть принадлежит $H(\xi_0)$.

Если сформулированное выше утверждение неверно, то существуют две сходящиеся к $0, \dots, 0$ последовательности $u_1^{(\nu)}, \dots, u_{n-l}^{(\nu)}$ и $v_1^{(\nu)}, \dots, v_{n-l}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots$, такие, что ни при каком $\nu$ не выполняются одновременно равенства

$$u_1^{(\nu)} = v_1^{(\nu)}, \dots, u_{n-l}^{(\nu)} = v_{n-l}^{(\nu)}$$

и для любого $\nu$

$$\exp(u_1^{(\nu)} U_{l+1} + \dots + u_{n-l}^{(\nu)} U_n)^{-1} \exp(v_1^{(\nu)} U_{l+1} + \dots + v_{n-l}^{(\nu)} U_n)$$

принадлежит $H(\xi_0)$. Так как это выражение сходится к $E_k$, то согласно теореме из п. 4 § 1 для почти всех $\nu$ его можно записать в виде $\exp(w_1^{(\nu)} U_1 + \dots$ $\dots + w_l^{(\nu)} U_l)$, где $w_1^{(\nu)}, \dots, w_l^{(\nu)}$ тоже сходятся к $0, \dots, 0$. Соответствующее равенство можно написать в такой форме:

$$\exp(w_1^{(\nu)} U_{l+1} + \dots + w_{n-l}^{(\nu)} U_n) \exp(w_1^{(\nu)} U_1 + \dots + w_l^{(\nu)} U_l) =$$
$$= \exp(v_1^{(\nu)} U_{l+1} + \dots + v_{n-l}^{(\nu)} U_n),$$

т. е. выражение

$$\exp(x_{l+1} U_{l+1} + \dots + x_n U_n) \exp(x_1 U_1 + \dots + x_l U_l)$$

при подстановке вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ $w_1^{(\nu)}, \dots, w_l^{(\nu)}$, $u_1^{(\nu)}, \dots, u_{n-l}^{(\nu)}$ и $0, \dots$ $\dots, 0$, $v_1^{(\nu)}, \dots, v_{n-l}^{(\nu)}$ имеет то же самое значение. Если оно в достаточно малой окрестности точки $0, \dots, 0$ однозначно определяет $x_1, \dots, x_n$, то для почти всех $\nu$ $u_1^{(\nu)} = v_1^{(\nu)}, \dots, u_{n-l}^{(\nu)} = v_{n-l}^{(\nu)}$. Таким образом, получено противоречие со сформулированным выше предположением.

Мы разложим приведенное выше выражение в (всюду сходящийся) степенной ряд[25] и все члены степени, не меньшей 2, заменим на многоточие. При этом мы получим

$$1 + x_1 U_1 + \dots + x_n U_n + ***.$$

---

[25] Рассмотрения с помощью степенного ряда можно избежать, но в конце п. 3 он все равно появится.

Матрицы $U_1, \ldots, U_n$ линейно независимы (над полем действительных чисел). Мы расширим этот набор до полной линейно независимой системы, добавив произвольным образом $U_{n+1}, \ldots, U_{2k^2}$, и представим рассмотренное выше выражение минус 1 как линейную комбинацию $U_1, \ldots, U_{2k^2}$. Соответствующие коэффициенты определяются однозначно. Так как мы для $U_1, \ldots, U_n$ все члены степени, не меньшей 2, заменили на многоточие, то получим

$$x_1 + ***, \ldots, x_n + ***.$$

Нам осталось показать, что уравнения

$$x_1 + *** = y_1, \ldots, x_n + *** = y_n$$

можно разрешить относительно $x_1, \ldots, x_n$ (если ограничить их на достаточно малую окрестность точки 0, ..., 0). Очевидно, что они могут быть решены и $x_1, \ldots$ ..., $x_n$ являются степенными рядами относительно $y_1, \ldots, y_n$. Тем самым доказано, что существует окрестность $U^*$ точки 0, ..., 0, обладающая требуемым свойством.

Это свойство можно сформулировать также следующим образом. Если $u_1, \ldots$ $\ldots, u_{n-l}$ принадлежат $U^*$, то каждое $\exp(u_1U_{l+1} + \ldots + u_{n-l}U_l)$ лежит в некотором своем множестве $H(\xi)$. Соответствующее $\xi = \xi(u_1, \ldots, u_{n-l})$ является на $M$ взаимно однозначной н непрерывной функцией от $u_1, \ldots, u_{n-l}$, так как оно непрерывно зависит от $\exp(u_1U_{l+1} + \ldots + u_{n-l}U_n)$.

3. В сформулированной в п. 4, § 1 теореме рассматривались окрестность $\mathfrak{K}^{(\mu)}$ элемента 1 в $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ и окрестность $K^{(\mu)}$ точки $0, \ldots, 0$ в $P_\mu$-мерном пространстве. Теперь мы заменим $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ на $H(\xi_0)$, $P_\mu$ на $n-l$ и обозначим $\mathfrak{K}^{(\mu)}$ и $K^{(\mu)}$ через $\mathfrak{H}$ и $H$. Если $u_1, \ldots, u_{n-l}$ принадлежат $U^*$, а $w_1, \ldots, w_l$ — $H$, то выражение

$$a(u_1 \ldots u_{n-l} w_1 \ldots w_l) = \exp(u_1U_{l+1} + \ldots + u_{n-l}U_n)\exp(w_1U_1 + \ldots + w_lU_l)$$

не принимает никакое значение дважды. При этом $\exp(u_1U_{l+1} + \ldots + u_{n-l}U_n)$ лежит в своем $H(\xi)$, так что $u_1, \ldots, u_{n-l}$ те же самые. При этом $\exp(w_1U_1 + \ldots$ $\ldots + w_lU_l)$ должно иметь то же значение, так что и $w_1, \ldots, w_l$ те же самые. При этом описанное $u_1, \ldots, u_{n-l}$, $w_1, \ldots, w_l$-множество гомеоморфно отображается на некоторое подмножество $G$. Первое множество есть область $n$-мерного (действительного) евклидова пространства, и его образ есть подмножество некоторой окрестности 1 в $G$, которое гомеоморфно рассматриваемой области ($G$ — $n$-параметрическая!). Поэтому по теореме Брауэра об инвариантности областей (см. [10]; впрочем, она здесь в силу аналитичности рассматриваемого отображения очевидна), образ открыт (в $G$). При этом он является окрестностью (принадлежащей ему) 1.

Если $\xi$ в $M$ достаточно близко к $\xi_0$, то его можно записать в виде $\xi(u_1 \ldots u_{n-l})$, где $u_1, \ldots, u_{n-l}$ лежит в $U^*$. Пусть существует сходящаяся к $\xi_0$ последовательность $\xi^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, для которой это не так. Имеем $\xi^{(\nu)} = F_{a^{(\nu)}}(\xi_0)$, и так как $G$ компактна, некоторая подпоследовательность $a^{(\nu)}$ сходится. Можно считать, что сходится сама последовательность $a^{(\nu)}$. Пусть ее предел есть $a_0$, тогда $F_{a_0}(\xi_0)$ есть предел $\xi^{(\nu)} = F_{a^{(\nu)}}(\xi_0)$, равный $\xi_0$. Поэтому $a_0$ принадлежит $H(\xi_0)$. Таким образом, $\xi^{(\nu)} = F_{a^{(\nu)}a_0^{-1}}(\xi_0)$ и $a^{(\nu)}a_0^{-1}$ сходится к 1. Мы можем считать,

что это верно для самой $a^{(\nu)}$, т. е. $a_0 = 1$. Далее, почти все $a^{(\nu)}$ принадлежат множеству

$$\exp(u_1U_{l+1} + \ldots + u_{n-l}U_n)\exp(w_1U_1 + \ldots + w_lU_l),$$

где $u_1, \ldots, u_{n-l}$ принадлежат $U^*$, $w_1, \ldots, w_l$—$H$, $a^{(\nu)}$ и $\exp(u_1U_{l+1} + \ldots + u_{n-l}U_{n-l})$—принадлежат $H(\xi^{(\nu)})$. Поэтому

$$\xi^{(\nu)} = \xi(u_1, \ldots, u_{n-l}),$$

что противоречит предположению.

При этом $\xi(u_1, \ldots, u_{n-l})$ отображает $U^*$ гомеоморфно на некоторое подмножество $M$, внутренней точкой которого является $\xi_0$. Пусть $O$ — содержащаяся в нем окрестность $\xi_0$. В силу гомеоморфности отображения прообраз $U_0$ множества $O$ есть (относительная) окрестность 0, ..., 0 в $U^*$, т. е. окрестность 0, ..., 0.

При этом окрестность $O$ точки $\xi_0$ в $M$ отображается на $(n-l)$ параметров $u_1, \ldots, u_{n-l}$ в $U_0$. Как нам известно, некоторая окрестность $R$, содержащая 1, в $G$ отображается гомеоморфно при помощи отображения $a = \exp(\alpha_1U_1 + \ldots + \alpha_nU_n)$ на $n$-параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в $K$. Из закона композиции в $G$ вытекает

$$\exp(\alpha_1U_1 + \ldots + \alpha_nU_n)\exp(\beta_1U_1 + \ldots + \beta_nU_n) = \exp(\gamma_1U_1 + \ldots + \gamma_nU_n)$$

(все рассматривается в $K$). Достаточно близко к 0, ..., 0 это равенство однозначно разрешимо относительно $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Согласно описанию отображения $G$ в $M$ имеем (если левая часть принадлежит $K$)

$$\exp(u_1U_{l+1} + \ldots + u_{n-l}U_n)\exp(\alpha_1U_1 + \ldots + \alpha_nU_n) = \exp(v_1U_{l+1} + \ldots$$
$$\ldots + v_{n-l}U_n)\exp(w_1U_1 + \ldots + w_lU_l)$$

($u_1, \ldots, u_{n-l}$ и $v_1, \ldots, v_{n-l}$ принадлежат $U^*, w_1, \ldots, w_l$ — $H$). Далее, это равенство вблизи 0, ..., 0 тоже может быть однозначно разрешено относительно $v_1, \ldots, v_{n-l}$, $w_1, \ldots, w_l$ (нас интересуют только $v_1, \ldots, v_{n-l}$). Мы покажем, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ являются аналитическими функциями от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, а $v_1, \ldots, v_{n-l}, w_1, \ldots$ $\ldots, w_l$ — от $u_1, \ldots, u_{n-l}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Первое утверждение есть частный случай второго: при $l = 0$ и замене $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на $u_1, \ldots, u_n$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — на $v_1, \ldots, v_n$. Поэтому достаточно рассмотреть это последнее. Если мы в предыдущем равенстве заменим обе части на соответствующие (всюду сходящиеся) степенные ряды и все члены степени, не меньшие 2,— на ***, то получим матричное равенство

$$1 + \alpha_1U_1 + \ldots + \alpha_lU_l + (\alpha_{l+1} + u_1)U_{l+1} + \ldots + (\alpha_n + u_{n-l})U_n + \ldots$$
$$\ldots + *** = 1 + w_1U_1 + \ldots + w_lU_l + v_1U_{l+1} + \ldots + v_{n-l}U_n + ***,$$

откуда (так как $U_1, \ldots, U_n$ линейно независимы) вытекают следующие числовые равенства:

$$\alpha_1 + *** = w_1 + ***, \ldots, \alpha_l + *** = w_l + ***,$$

$$\alpha_{l+1} + u_1 + *** = v_1 + ***, \ldots, \alpha_n + u_{n-l} + *** = v_{n-l} + ***.$$

Очевидно, что они могут быть разрешены относительно $v_1, \ldots, v_{n-l}, w_1, \ldots, w_l$ через степенные ряды от $u_1, \ldots, u_{n-l}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тем самым аналитичность этих величин доказана.

Наш результат звучит так:

Теорема II. *Пусть топологическая группа $G$ является (в смысле п. 1, § I) $n$-параметрической и компактной и (в смысле п. 1, § II) группой непрерывных преобразований пространства $M$*[26]. *Далее, пусть $G$ на $M$ действует транзитивно. Тогда существуют $W$-окрестность 1 в $G$ и окрестность $U_0$ произвольной точки $\xi_0$ в $M$, такие, что $W$ и $U_0$ гомеоморфны соответственно $n$- и $m$-параметрической ($m = 0, 1, \ldots, n$)*[27] *области (пробегают определенные окрестности точки $0, \ldots$ $\ldots, 0$ соответственно в $n$- и $m$-мерном действительном евклидовом пространстве) и при этом закон композиции в $G$ и преобразования из $G$ пространства $M$ являются аналитическими функциями этих параметров.*

4. Мы снимаем теперь предположение о компактности $G$ и ее транзитивности на $M$. Вместо этого мы сделаем следующее предположение: существует окрестность некоторой точки в $M$, которая гомеоморфна области $m$-параметрического пространства, и $F_a(\xi)$ непрерывна по $a$, $\xi$ как функция двух переменных [28]. Нужно показать, что при известных обстоятельствах невозможно так выбрать параметризацию для $a$ и $\xi$, что $a \cdot b$ и $F_a(\xi)$ в результате окажутся аналитическими или всего лишь непрерывно дифференцируемыми

Пусть, как упоминалось в п. 1 введения, $n = 1$, $m = 2$ и $G$ — действительная числовая прямая, т. е. $a$ — произвольное действительное число и закон композиции — сложение $a + b$; $M$ — действительная $u, v$-плоскость; $\varphi(r)$ — определенная при всех $r > 0$ непрерывная (действительная) функция. Соответствующее $a$ преобразование $M$ есть поворот с центром в точке $0, \ldots, 0$ на угол, зависящий от $r$. А именно, на каждой окружности $u^2 + v^2 = r^2$ — на $\varphi(r)\,a$, т. е.

$$F_a(u, v) = \begin{cases} u\cos\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\,a\} - v\sin\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\,a\}, \\ u\sin\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\,a\} + v\cos\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\,a\}. \end{cases}$$

Нужный пример будет построен при помощи подходящего выбора $\varphi(r)$.

Если $\varphi(r) = 0$ при всех $r_0 \geqq r > 0$ ($r_0 > 0$ фиксировано), но ни при каком $r > r_0$, то в каждой окрестности точки $\xi_0$, лежащей на окружности радиуса $r_0$, есть область 0, в которой $F_a(\xi) = \xi$, и такая область, в которой это равенство не выполняется. Так как для аналитической функции не может иметь места подобная ситуация, то выбрать парамегр так, чтобы $F_a(\xi)$ была аналитической, невозможно. Итак, положив, например, $\varphi(r) = \mathrm{Max}\,(0, r - r_0)$, мы заканчиваем рассмотрение гипотезы об аналитичности.

Несколько труднее исследуется случай непрерывной дифференцируемости. Мы предположим, что в некоторой окрестности $O$ точки 0,0 введены такие параметры $a'$ для $a$ и $u'$, $v'$ для $u$, $v$, что $a' \cdot b'$ и $F_a(u', v')$ непрерывно дифференцируемы. Мы покажем, что тогда $\varphi(r)$ должна обладать определенным свойством. Потом мы выберем $\varphi(r)$ так, чтобы она не обладала этим свойством. Тогда не будет выполняться и предположение о непрерывной дифференцируемости.

---

[26] Следует отметить, что возможность параметризации $M$ не предполагается, она будет доказана.

[27] В доказательстве вместо $m$ использовалось $n - l$.

[28] В случае компактности и транзитивности оба эти условия вытекают из теоремы 1. В частности, непрерывность по $a$, $\xi$ вытекает из того, что $F_a(\xi)$ может быть выбрана даже аналитической.

5. Закон композиции для $a'$ обозначим через $a' \circ b'$. Отображение $a$ на $a'$ осуществляется с помощью взаимно однозначной и непрерывной функции $a = f(a')$. Тогда $f(a')$ является монотонной (возрастающей или убывающей). По теореме Лебега [29] существуют точки, в которых она дифференцируема.

Обе функции $a' \circ b'$ и $a' \circ b'^{-1}$ дифференцируемо зависят от $a'$. Поэтому если $a' \circ b'$ имеет при $a' = a_0$ производную 0, то при этом и $(a' \circ b') \circ b'^{-1} = a'$ имеет производную 0. Однако этого не может быть, так как $a'$ всюду имеет производную 1. Если $f(a')$ при $a' = a_1'$ дифференцируема, то $f(a' \circ b') = f(a') + f(b')$. Так как $a' \circ b'$ имеет производную по $a'$, не равную 0, то $f(a')$ при $a' = a_1 \circ b'$ дифференцируема. Таким образом, $f(a')$ всюду дифференцируема. При этом

$$\frac{\partial}{\partial a'} f(a')\Big|_{a'=a_1 \cdot b'} = \frac{\frac{\partial}{\partial a'} f(a')\Big|_{a'=a_1}}{\frac{\partial}{\partial a'} (a' \circ b')\Big|_{a'=a_1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial a'} f(a')\Big|_{a'=\bar{a}'} = \frac{\frac{\partial}{\partial a'} f(a')\Big|_{a'=a_1}}{\frac{\partial}{\partial a'} (\bar{a}' \circ [\bar{a}' \circ a_1'^{-1}])\Big|_{a'=a_1}}$$

и тем самым $f(a')$ непрерывно дифференцируема. В силу того что всюду $\frac{\partial}{\partial a'} f(a') \neq 0$ $\Big($если $\frac{\partial}{\partial a'} f(a') = 0$ где-нибудь, то из приведенной выше формулы вытекает, что это равенство выполняется всюду, т. е. $f(a')$ константа$\Big)$, то у нее существует обратная. Поэтому мы можем вместо $a'$ ввести параметр $a$. При этом $F_a(u', v')$ остается непрерывно дифференцируемой, т. е. мы можем считать далее всюду $a' = a$.

Если обе компоненты $\frac{\partial}{\partial a} F_a(u', v')$[30] при $a = \bar{a}$ и некоторых $u', v'$ обращаются в нуль, то в силу $F_{a+b}(u', v') = F_b(F_a(u', v'))$ это должно выполняться и для $a = \bar{a} + b$, т. е. для всех $a$. В таком случае $F_a(u', v')$ не зависит от $a$, откуда вытекает, что $u, v = 0, 0$, и поэтому $u', v' = 0, 0$. Таким образом, при $u', v' \neq 0, 0$ обе компоненты $\frac{\partial}{\partial a} F_a(u', v')$ всюду не равны 0. Далее, $\varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ непрерывна по $u, v$ и тем самым по $u', v'$. Мы будем предполагать, что она всюду больше нуля. Тогда $2\pi/\varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ непрерывна по $u', v'$. Так как имеет место тождество

$$F_{\frac{2\pi}{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})}}(u', v') = u', v',$$

---

[29] См., например, [8, с. 573, теорема 7].
[30] Так как $F_a(u', v')$ есть точка $u'$, $v'$-плоскости, то она состоит из двух действительных функций.

то из только что установленного свойства $\frac{\partial}{\partial a} F_a(u, v)$ вытекает, что $2\pi/\varphi(\sqrt{u^2+v^2})$ при $u', v' \neq 0, 0$ непрерывно дифференцируема (по $u', v'$) и тем самым то же имеет место для $\varphi(\sqrt{u^2+v^2})$.

Окружности $u^2 + v^2 = r^2$ ($r_1 > r > 0$, где $u^2 + v^2 < r_1^2$ — окрестность точки 0,0, в которой не будет иметь места параметрическое представление) должна соответствовать на $u', v'$-плоскости некоторая жорданова кривая $J_r$. Из определения окружности вытекает, что точка 0,0 и все $J_s$ с $s < r$ лежат внутри $J_r$. Функция $\varphi(\sqrt{u^2+v^2})$ постоянна на $J_r$.

Пусть $C$ — максимум из $\frac{\partial}{\partial u'} \varphi(\sqrt{u^2+v^2})$ и $\frac{\partial}{\partial v'} \varphi(\sqrt{u^2+v^2})$ во внутренности $J_{r_1/2}$. Пусть, далее, $0 < r_2 < r_3 < r_1/2$, где $r_2, r_3$ фиксированы. Возьмем $u_2', v_2'$ на $J_{r_2}$ и $u_3', v_3'$ на $J_{r_3}$ и обозначим соединяющий их отрезок через $S$. Пусть теперь даны $\nu - 1$ произвольных чисел $\rho_1, \ldots, \rho_{\nu-1}$, таких, что $r_2 < \rho_1 < \ldots < \rho_{\nu-1} < r_3$. Мы положим также $\rho_0 = r_2$, $\rho_\nu = r_3$. Пусть $S$ пересекает каждую $J_{\rho_\mu}$ ($\mu = 1, \ldots, \nu - 1$) в точке $u'^{(\mu)}, v'^{(\mu)}$, и мы можем $u^{(\mu)}, v^{(\mu)}$ выбрать между $u^{(\mu-1)}, v^{(\mu-1)}$ и $u_3, v_3$ для всех $\mu = 2, 3, \ldots, \nu$. Разумеется,

$$u'^{(0)}, v'^{(0)} = u_2', v_2', \qquad u'^{(\nu)}, v'^{(\nu)} = u_3', v_3'.$$

Тогда $u^{(\mu)}, v^{(\mu)}$ расположены на $S$ в последовательности, соответствующей номеру $\mu$. Имеем

$$|\varphi(\rho_\mu) - \varphi(\rho_{\mu-1})| \leqq 2C \cdot \mathrm{Entf}\,(u'^{(\mu)}, v'^{(\mu)}; u'^{(\mu-1)}, v'^{(\mu-1)}),$$

$$\Sigma_{\mu=1}^{\nu} |\varphi(\rho_\mu) - \varphi(\rho_{\mu-1})| \leqq 2C\Sigma_{\mu=1}^{\nu} \mathrm{Entf}\,(u'^{(\mu}, v'^{(\mu)}; u'^{(\mu-1)}, v'^{(\mu-1)}) =$$
$$= 2C \cdot \mathrm{Entf}\,(u'^{(\nu)}, v'^{(\nu)}; u'^{(0)}, v'^{(0)}) = C \cdot \mathrm{Entf}\,(u_3, v_3'; u_2', v_2').$$

Итак, мы получили при предположении, что при всех $r_1 > r > 0$ функция $\varphi(r) > 0$ и существуют $r_2, r_3$, $0 < r_2 < r_3 < r_1/2$, такие, что для любой системы $\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_\nu$, такой, что $r_2 = \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_{\nu-1} < \rho_\nu = r_3$, сумма $\Sigma_{\mu=1}^{\nu} |\varphi(\rho_\mu) - \varphi(\rho_{\mu-1})|$ ограничена сверху числом, не зависящим от $r_2, r_3$. Следовательно, теперь достаточно найти непрерывную $\varphi(r)$, такую, что всюду $\varphi(r) > 0$ и для любых $r_2 < r_3$ верхняя грань суммы

$$\Sigma_{\mu=1}^{\nu} |\varphi(\rho_\mu) - \varphi(\rho_{\mu-1})| \qquad (r_2 = \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{\nu-1} < \rho_\nu = r_3)$$

равна $\infty$. Таким образом, нам нужна непрерывная положительная функция $\varphi(r)$, имеющая на любом интервале бесконечную вариацию. Пример такой $\varphi(r)$ известен [31].

[31] См., например, работы, цит. в примеч. 12. С помощью построенной там нигде не дифференцируемой функции Вейерштрасса $w(x)$ получаем $\varphi(r) = 1 + w(r)$. По поводу бесконечности ее вариации см. там же.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hilbert D.* Mathematische Probleme.— Gött. Nachr., 1900, S. 253—297.
2. *Schur F.*— Math. Ann., 1893, Bd. 41, S. 509—538.
3. *Brouwer L. E. J.*— Math. Ann., 1909, Bd. 67, S. 246—247; 1910, Bd. 69, S. 181—203.
4. *Neumann J. von.* Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen.— Math. Ztschr., 1929, Bd. 30, S. 3—42.
5. *Hausdorff F.* Mengenlehre. Berlin; Leipzig: Gruyter, 1927. 285 S.
6. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reelle Funktionen. Berlin; Leipzig : Teubner, 1918. 704 S.
7. *Neumann J. von.* Einige Sätze über messbare Abbildungen.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 574—586.
8. *Haar A.* Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.—Ann. Math., 1933, vol. 34, § 3.
9. *Peter F., Weyl H.* Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.— Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 737—755.
10. *Brouwer L. E. J.*— Math. Ann., 1913, Bd. 70, S. 161—165.
11. *Lebesgue H.* Sur les correspondances entre les points de deux espaces.— Fund. math., 1921, t. 2, s. 256—285.
12. *Sperner E.* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionzahl und des Gebietes.— Abh. Math. Semin. Univ., Hamburg, 1928, Bd. 6, S. 265—272.
13. *Menger K.* Dimensionstheorie. Berlin; Leipzig: Teubner, 1928. 318 S.
14. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.— Math. Ann., 1907, Bd. 63, S. 433—476.

# ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ. I*

## ВВЕДЕНИЕ

**1.** Задача настоящей статьи — перенести известную теорию почти периодических функций Х. Бора [4, 1] [1] на произвольные группы и показать, что этим достигается максимальная общность результатов теории представлений Фробениуса—Шура [21, 22, 30] и ее развития Ф. Петером и Г. Вейлем [32]. Мы увидим, в частности, что все ограниченные линейные представления группы эквивалентны унитарным представлениям и принадлежат этому классу. Другой важный аспект состоит в том, что мы полностью освобождаем себя от каких бы то ни было топологических предположений (таких, как непрерывность и т. д.) за счет использования понятия почти периодичности, принадлежащего С. Бохнеру [2]. При этом оказывается, что общая теория, применимая к любой группе $\mathfrak{G}$, не использует никаких топологических предположений, но все ее результаты (например, все разложения в ряды) обладают свойством замыкания, т. е., будучи примененными к функциям, непрерывным в некоторой топологии, они приводят только к функциям того же самого типа. Примечательно, что мы обнаружили в классическом случае Бора новые почти периодические функции в дополнение к известным ранее. Даже элементарные функции $f(a) = e^{2\pi\lambda a i}$ могут быть обобщены (это связано с результатами Урселла [28]). С другой стороны, для некоторых групп (например, для всех полупростых групп Ли) из почти периодичности автоматически следует непрерывность (это будет доказано с помощью теоремы Ван-дер-Вардена [29]).

**2.** Принципиальная трудность в построении общей теории почти периодических функций состоит в нахождении обобщения понятия интегрального среднего, введенного Бором:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

—для случая, когда числа $x$ и $T$ заменяются элементами произвольной группы $\mathfrak{G}$, которая не обязана быть даже топологической. Более того, функция $f(x)$ может быть разрывной. Мы преодолеваем эту трудность за счет введения совершенно нового определения (см. определения 4 и 5), которое, как можно показать, удовлетворяет условиям, налагаемым на «среднее», во всех случаях. Концепция среднего в нашем смысле очень проста и будет подробно обсуждаться в части I.

* Trans. Amer. Math. Soc., 1934, vol. 36, N 3, p. 445—492.

[1] Цифры в квадратных скобках относятся к библиографии, помещенной в конце статьи.

Это среднее есть обобщение понятия интеграла на компактных группах, введенного автором ранее [19]. Оно определяется совершенно иначе, чем среднее, использующееся при построении интеграла Хаара [11], с которым наше среднее совпадает для компактных групп, но сильно отличается в случае некомпактных групп. Во-первых, потому что для таких групп оно является интегральным средним, а не интегралом. Во-вторых, потому что на него не накладывается никаких топологических ограничений, в то время как интеграл Хаара определяется только для локально-компактных и сепарабельных групп. В-третьих, потому что оно определяется для почти периодических функций, а интеграл Хаара — для измеримых и, вообще говоря, ни один из этих классов функций не содержит другого.

3. Содержание частей I—V таково. В части I излагается наша общая теория среднего. В части II эта теория применяется (с использованием мощного метода Вейля [31]) для доказательства фундаментальных теорем теории Бора, формулы Парсеваля и теоремы аппроксимации. Так как мы комбинируем конструкции из двух работ Вейля [30, 31], то имеет смысл привести полные доказательства, несмотря на то что эта часть приводит к их дословному повторению. В части III воспроизводятся основные результаты Фробениуса—Шура и Петера—Вейля в теории представлений и устанавливается связь с теорией почти периодических функций. Эта связь является основной для утверждения, что развиваемая нами общая теория почти периодических функций есть наиболее широкая область применения теории представлений во всем ее объеме. В части IV наша теория связывается с топологическими и другими ограничивающими условиями. При помощи детального исследования восьми примеров мы демонстрируем основные типы комбинаций этих понятий, которые, по-видимому, встречаются в приложениях. В конце мы обсуждаем вопрос о том, сколько почти периодических функций существует на данной группе. Часть V целиком посвящена доказательству того, что максимальное их число существует на абелевых группах (при определенных топологических ограничениях). Здесь используется интеграл Хаара в комбинации с некоторыми теоремами автора об операторах и функциях операторов [17]. Особенно важны для этих исследований обобщения некоторых результатов Хаара на счетные бесконечные абелевы группы [10].

4. Вероятно, что большинство дальнейших результатов в теории Бора применимо также к нашей общей теории. Среди этих результатов изящные теоремы о сходимости, теоремы о суммируемости, обобщения, полученные В. В. Степановым (для которых оказались необходимыми некоторые топологические ограничения, так как применялся интеграл Хаара). В этой связи имеет смысл указать на необходимость обобщения важного понятия теории Бора, а именно того факта, что произведение двух элементарных почти периодических функций есть функция такого же типа: $e^{2\pi\lambda ai} e^{2\pi\mu ai} = e^{2\pi(\lambda+\mu)ai}$. Это имеет место для абелевых групп и приводит к важной группе характеров. Но для неабелевых групп ситуация такова, что прямое произведение двух неприводимых представлений (элементы которых $D_{\rho\sigma}(a; \mathfrak{C})$ являются аналогами $e^{2\pi\lambda ai}$; см. определения 11 и 12 и теоремы 24 и 25) есть сумма конечного числа неприводимых представлений, так что имеет место так называемая формула композиции

$$D_{\rho\sigma}(a; \mathfrak{C}) D_{\tau\nu}(a; \mathfrak{D}) = \sum_{\mathfrak{E},\xi,\eta} \Gamma_{\xi,\eta,\mathfrak{E}}(\rho, \sigma; \mathfrak{C} \mid \tau, \nu; \mathfrak{D}) D_{\xi\eta}(a; \mathfrak{E}) \quad (*).$$

Другим важным понятием в теории Бора является независимость функций $e^{2\pi\lambda ai}$, $e^{2\pi\mu ai}$, ..., по которым проводится разложение (т. е. линейная независимость над целыми числами соответствующих показателей степени), так как почти периодические функции с такими разложениями обладают, в частности, простыми свойствами сходимости. Соответствующее требование в нашей общей теории состоит в том, что правая часть соотношения (*) не должна содержать члена, начинающегося с представления $D(a;\mathfrak{C}) \equiv 1$, если левая часть есть произвольное произведение степеней $D(a;\mathfrak{C})$, $D(a;\mathfrak{D})$, ...

## Часть I

## СУЩЕСТВОВАНИЕ СРЕДНЕГО, ОБЩИЕ СВОЙСТВА

5. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, т. е. множество, в котором определены операции $ab$ и $a^{-1}$, удовлетворяющие групповым постулатам. Хотя $\mathfrak{G}$ может быть топологической [2], мы не будем делать пока такого предположения, так как это свойство не используется в частях I—III. Элементы $\mathfrak{G}$ будут обозначаться через $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$, ..., действительные или комплексные числа — через $m$, $n$, $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, $\xi$, $\eta$, ..., а комплекснозначные функции на $\mathfrak{G}$ — через $f(x)$, $g(x)$, ...

Расстояние [3] между такими функциями мы определим следующим образом:

$$D(f, g) = \text{l. u. b.}_x |f(x) - g(x)|^{[1]}.$$

Множество $\mathfrak{M}$ таких функций называется условно компактным (у. к.), если любая последовательность принадлежащих $\mathfrak{M}$ функций $f_1, f_2, \ldots$ содержит подпоследовательность $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$, такую, что $D(f_{n_\mu}, f_{n_\nu}) \to 0$ при $\mu, \nu \to \infty$ (т. е. «фундаментальную» подпоследовательность [13, с. 107]). Это означает, что существует функция $f$ (не обязательно принадлежащая $\mathfrak{M}$), такая, что $D(f_{n_\mu}, f) \to 0$ при $\mu \to \infty$.

Теперь можно перенести введенное Бором понятие почти периодических функций [4; 2, § 5] на все $f(x)$, заданные на $\mathfrak{G}$, но мы предпочитаем обобщить определение, данное Бохнером [2], что позволит нам полностью избавиться от топологических условий, налагаемых на $f(x)$ (от непрерывности и т. д.).

Определение 1. *Функция (комплекснозначная) $f(x)$, заданная на $\mathfrak{G}$, называется правой почти периодической (п.п.п.), если множество $R_f$ всех функций вида $f(xa)$ ($x$ — переменное, $a$ — параметр, пробегающий всю $\mathfrak{G}$) является у. к. Она называется левой почти периодической (л.п.п.), если множество $L_f$ всех функ-*

---

[2] То есть топологическим множеством в смысле Ф. Хаусдорфа [13, с. 226—230]. Топологию в ней можно выбрать, основываясь на понятии окрестности, при помощи аксиом 1—3 (или A—C) и одной из аксиом отделимости 4—8, например 5-й. Далее, нужно сделать предположение о непрерывности $ab$ и $a^{-1}$. В частях I—III нам вообще не нужна топология. В части IV мы должны предположить непрерывность $ab$ по $a$ при фиксированном $b$ и по $b$ при фиксированном $a$. В части V мы должны будем предположить, что $ab$ непрерывно по $(a, b)$ и $a^{-1}$ непрерывно зависит от $a$.

[3] Будем рассматривать только ограниченные функции. Через l. u. b.$_x$ обозначается верхняя грань по всем $x$ из $\mathfrak{G}$.

*ций вида $f(ax)$ является у.к. Она называется почти периодической (п.п.), если она п.п.п. и л.п.п.*

Эквивалентность этого определения очевидному обобщению определения Бора доказывается обычным способом, если $f(x)$ непрерывна. Равномерная непрерывность $f(x)$ в этом случае тоже имеет место. Но так как мы не хотим вводить топологию в $\mathfrak{G}$, то мы не будем входить в детали анализа подобных свойств. С другой стороны, очень важны следующие теоремы.

Теорема 1. *Каждое из трех понятий п.п.п., л.п.п. и п.п. инвариантно относительно следующих операций: $f(xa)$, $f(ax)$, $\overline{f(x)}$, $\alpha f(x)$ ($\alpha$ — любое комплексное число), $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и операции перехода от $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... к $f(x)$, если $f_n(x)$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $n \to \infty$. Переход от $f(x)$ к $f(x^{-1})$ переводит п.п.п и л.п.п. функции друг в друга и оставляет инвариантными п.п*

Утверждение, касающееся $f(x^{-1})$, очевидно. Для остальных утверждений нам достаточно рассмотреть только п.п.п. функции, так как л.п.п. получаются, например, если заменить $ab$ на $ba$ в определении $\mathfrak{G}$, а п. п. получаются как пересечение п.п.п. и л.п.п. То, что $f(xa)$ — п.п.п., видно, если заменить $a_1$, $a_2$, ... (см. определение 1) на $a_1a$, $a_2a$, ... То, что $f(ax)$ — п.п.п., получается при замене $x$ на $ax$. Относительно $f(x)$ и $\alpha f(x)$ все очевидно. П.п.п. $f(x) \pm g(x)$ и $f(x)g(x)$ доказывается при помощи применения определения 1 сначала к $f(x)$ и $a_1$, $a_2$, ... и затем к $g(x)$ и выбранной подпоследовательности. Очевидное и простое применение диагонального процесса доказывает инвариантность п.п.п. относительно перехода от $f_n(x)$ к $f(x)$.

Теорема 2. *Каждая* п.п.п. *или* л.п.п. *функция $f(x)$ ограничена.*

Снова достаточно рассмотреть п.п.п. функции Если $f(x)$ не ограничена, мы можем выбрать последовательность $a_1$, $a_2$, ..., такую, что $|f(a_n)| \to \infty$ при $n \to \infty$ и, следовательно, никакая подпоследовательность $f(xa_1)$, $f(xa_2)$, ... не может иметь конечного предела при $x = 1$

Определение 2. *Если $\mathfrak{M}$ есть множество функций, определенных на $\mathfrak{G}$, то мы назовем множество всех функций вида $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — неотрицательные действительные числа, такие, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$; $f_1, \ldots, f_n$ — любые элементы из $\mathfrak{M}$) выпуклой оболочкой $\mathfrak{M}$ и обозначим через* $\mathrm{Co}(\mathfrak{M})$.

6. Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если одно из множеств $\mathfrak{M}$ или $\mathrm{Co}(\mathfrak{M})$ у. к., то и другое у. к.*

Если $\mathrm{Co}(\mathfrak{M})$ у. к., то его подмножество $\mathfrak{M}$ у. к. Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ у. к. Свойство у. к. множества $\mathfrak{N}$ эквивалентно следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $\bar f_1, \ldots, \bar f_m$, принадлежащих $\mathfrak{N}$ ($m = m(\varepsilon)$), таких, что для любой $f \in \mathfrak{N}$ некоторое $D(f, \bar f_\mu) \leqq \varepsilon$, $\mu = 1, \ldots, m$ [13, с. 108—109]. Если теперь задано $\varepsilon > 0$, выберем функции $\bar f_1, \ldots, \bar f_m$ из $\mathfrak{M}$, положим

$$\max_{\mu} \text{l. u. b.} |\bar f_\mu(x)| = C$$

и возьмем целое число $N \geqq Cm\varepsilon^{-1}$. Тогда любая функция вида $\beta_1 \bar f_1 + \ldots + \beta_m \bar f_m$ ($\beta_1, \ldots, \beta_m$ — неотрицательные рациональные числа со знаменателем $N$,

такие, что $\beta_1 + \ldots + \beta_m = 1$) может быть представлена как конечная последовательность $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_M$ и Co ($\mathfrak{M}$) обладает описанным выше свойством для числа $2\varepsilon$.

Определение 3. *Если $f(x)$ — действительная ограниченная функция на $\mathfrak{G}$, то назовем величину* l. u. b.$_{x,y} |f(x) - f(y)|$ *($x$ и $y$ независимо пробегают $\mathfrak{G}$) колебанием $f(x)$ и обозначим ее через* $\mathrm{Osc}_x f(x)$. *Если $f(x)$ не есть константа, то* $\mathrm{Osc}\, f(x) > 0$. *В противном случае* $\mathrm{Osc}_x f(x) = 0$.

Теорема 4. *Для любой действительной функции $g \in \mathrm{Co}\, R_f$ имеет место неравенство* $\mathrm{Osc}_x g(x) \leqq \mathrm{Osc}_x f(x)$. *Если строгое неравенство* $\mathrm{Osc}_x g(x) < \mathrm{Ocs}_x f(x)$ *никогда не выполняется и если $f(x)$ — л.п.п., то $f(x)$ — константа.*

Первое утверждение очевидно. Предположим, что выполняются все предположения, сделанные для второго утверждения. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — любые элементы из $\mathfrak{G}$. Тогда

$$\frac{1}{n}[f(xa_1') + \ldots + f(xa_n')] \subset \mathrm{Co}\, R_f,$$

и поэтому

$$\mathrm{Osc}_x \frac{1}{n}[f(xa_1') + \ldots + f(xa_n')] = \mathrm{Osc}_x f(x).$$

Отсюда следует, что

$$\text{l. u. b.}_x \frac{1}{n}[f(xa_1') + \ldots + f(xa_n')] = \text{l. u. b.}_x f(x).$$

Положим l. u. b.$_x f(x) = C$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $x'$, такой, что

$$\frac{1}{n}[f(x'a_1') + \ldots + f(x'a_n')] \geqq C - \varepsilon.$$

Так как все $f(x'a_\nu') \leqq C$, то они все обязаны быть $\geqq C - n\varepsilon$.

Возьмем теперь $\delta > 0$ и выберем конечное число элементов из $L_f$, таких, что любой из элементов в $L_f$ удален на расстояние $\leqq \delta$ хотя бы от одного из них (ср. с доказательством теоремы 3), т. е. возьмем конечное число элементов $a_1, \ldots, a_n$ в $\mathfrak{G}$, таких, что для любого $a$ из $\mathfrak{G}$ существуют $\nu = 1, 2, \ldots, n$, для которых одновременно $|f(a_\nu x) - f(ax)| \leqq \delta$. Возьмем теперь $b$ из $\mathfrak{G}$ и повторим только что проведенное рассуждение для случая, когда $\varepsilon = \delta/n$, $a_1' = a_1^{-1}b, \ldots$ $\ldots, a_n' = a_n^{-1}b$. Тогда существует $x'$, для которого все $f(x'a_\nu^{-1}b) \geqq C - \delta$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому можно так выбрать $\mu = 1, 2, \ldots, n$, что $f(a_\mu a_\nu^{-1}b) \geqq C - 2\delta$. Если $\nu = \mu$, то $f(b) \geqq C - 2\delta$.

С другой стороны, $f(b) \leqq C$, и поскольку $\delta$ — произвольно, то отсюда вытекает, что $f(b) = C$. Окончательно $f(x)$ — константа, так как $b$ — произвольный элемент. Тем самым теорема полностью доказана.

Теорема 5. *Если $f(x)$ — п.п. функция, то существует константа $A$, к которой некоторая последовательность из $\mathrm{Co}\, R_f$ равномерно сходится.*

Так как $f(x)$ — п. п. п. функция, то $R_f$ и $\mathrm{Co}\, R_f$ у. к. Обозначив через $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{I}$ вещественную и мнимую части соответственно, рассмотрим неотрицательные числа $\mathrm{Osc}_x \mathfrak{R} g(x) + \mathrm{Osc}_x \mathfrak{I} g(x)$, где $g \subset \mathrm{Co}\, R_f$. Обозначим их наибольшую нижнюю грань через $\omega$. Можно выбрать в $\mathrm{Co}\, R_f$ последовательность $g_1(x), g_2(x), \ldots$, такую, что $\mathrm{Osc}_x \mathfrak{R} g_n(x) + \mathrm{Osc}_x \mathfrak{I} g_n(x) \to \omega$ при $n \to \infty$, а из этой последова-

тельности — подпоследовательность $g_{n_1}(x)$, $g_{n_2}(x), \ldots$, равномерно сходящуюся к функции $g(x)$. Следовательно, $\mathrm{Osc}_x \Re g(x) + \mathrm{Osc}_x \Im g(x) = \omega$. Очевидно, что если $f(x)$ л. п. п., то каждый элемент $f(xa)$ из $R_f$ л. п. п. Поэтому любой элемент в $\mathrm{Co}\, R_f$ л. п. п. и их равномерный предел $g(x)$, а также действительные функции $\Re g(x)$ и $\Im g(x)$ л. п. п. Если мы покажем, что $\mathrm{Osc}_x \Re g(x) = \mathrm{Osc}_x \Im g(x) = 0$, то $\Re g(x) = \mathrm{const}$, $\Im g(x) = \mathrm{const}$, т. е. $g(x) = \mathrm{const}$, откуда следует наше утверждение.

Предположим, что $\mathrm{Osc}_x \Re g(x) > 0$. Тогда согласно теореме 4 существует $h \subset \mathrm{Co}\, R_{\Re g}$, такая, что $\mathrm{Osc}_x h(x) < \mathrm{Osc}_x \Re g(x)$. При этом $h(x) = \alpha_1 \Re g(xa_1) + \ldots + \alpha_n \Re g(xa_n)$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$). Положив $k(x) = \alpha_1 g(xa_1) + \ldots + \alpha_n g(xa_n)$, получим $h(x) = \Re k(x)$, так что $\mathrm{Osc}_x \Re k(x) < \mathrm{Osc}_x \Re g(x)$. Однако, очевидно, что $\mathrm{Osc}_x \Im k(x) \leqq \mathrm{Osc}_x \Im g(x)$. Поэтому $\mathrm{Osc}_x \Re k(x) + \mathrm{Osc}_x \Im k(x) < \omega$. Теперь $g(x)$ может быть равномерно приближена функциями $l \subset \mathrm{Co}\, R_f$, так что $l(x) = \beta_1 f(xb_1) + \ldots + \beta_m f(xb_m)$, где $\beta_1, \ldots, \beta_m \geqq 0$, $\beta_1 + \ldots + \beta_m = 1$. Следовательно, $k(x)$ может быть равномерно приближена функциями вида $q(x) = \alpha_1\beta_1 f(xa_1b_1) + \alpha_1\beta_2 f(xa_1b_2) + \ldots + \alpha_n\beta_m f(xa_nb_m)$, т. е. функциями $q \subset \mathrm{Co}\, R_f$ Так как $\mathrm{Osc}_x \Re k(x) + \mathrm{Osc}_x \Im k(x) < \omega$, то $\mathrm{Osc}_x \Re q(x) + \mathrm{Osc}_x \Im q(x) < \omega$. Это противоречит определению $\omega$. Аналогично приводится к противоречию предположение $\mathrm{Osc}_x \Im g(x) > 0$.

Замечание. *Если задано конечное число п. п. функций $f_1(x), \ldots, f_t(x)$, то существует конечное множество констант $A_1, \ldots, A_t$, к которым равномерно сходятся $t$ последовательностей функций, взятых соответственно из $\mathrm{Co}\, R_{f_1}, \ldots, \mathrm{Co}\, R_{f_t}$ с одними и теми же $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $a_1, \ldots, a_n$ (т. е. последовательностей вида*

$$\alpha_1^{(\nu)} f_1(xa_1^{(\nu)}) + \ldots + \alpha_{n_\nu}^{(\nu)} f_1(xa_{n_\nu}^{(\nu)}), \ldots,$$

$$\alpha_1^{(\nu)} f_t(xa_1^{(\nu)}) + \ldots + \alpha_{n_\nu}^{(\nu)} f_t(xa_{n_\nu}^{(\nu)}),$$

*где* $\nu \to \infty$, $\alpha_1^{(\nu)} \geq 0, \ldots, \alpha_{n_\nu}^{(\nu)} \geqq 0$ *и* $\alpha_1^{(\nu)} + \ldots + \alpha_{n_\nu}^{(\nu)} = 1$).

Для доказательства утверждения, сформулированного в замечании, следует применить рассуждения, с помощью которых была доказана теорема 5, к $\mathrm{Osc}_x \Re f_1(x) + \mathrm{Osc}_x \Im f_1(x) + \ldots + \mathrm{Osc}_x \Re f_t(x) + \mathrm{Osc}_x \Im f_t(x)$ вместо $\mathrm{Osc}_x \Re f(x) + \mathrm{Osc}_x \Im f(x)$.

Определение 4. *Действительное число $A$, которое может быть равномерно приближенно функциями из $\mathrm{Co} R_f$ или $\mathrm{Co}\, L_f$, т. е. такое число $A$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n = 1, 2, \ldots$, числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все $\geqq 0$, такие, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, и элементы $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{G}$, такие, что неравенство $|\alpha_1 f(xa_1) + \ldots + \alpha_n f(xa_n) - A| \leqq \varepsilon$ или $|\alpha_1 f(a_1x) + \ldots + \alpha_n f(a_n x) - A| \leqq \varepsilon$ выполняется всюду в $\mathfrak{G}$, называется правым средним или соответственно левым средним функции $f(x)$.*

Теорема 6. *Если $f(x)$ п.п., то у нее есть в точности одно правое среднее, одно левое среднее и эти средние совпадают.*

Существование правого среднего было доказано в теореме 5. Если мы заменим закон умножения $ab$ в $\mathfrak{G}$ на $ba$, то все понятия остаются неизменными, кроме перемены местами «право» и «лево». Таким образом, левое среднее также должно существовать.

Пусть теперь $A$ — правое среднее, $B$ — левое среднее и $\varepsilon > 0$. Возьмем $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$[2], $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$, такие, что

$$|\alpha_1 f(xa_1) + \ldots + \alpha_n f(xa_n) - A| \leqq \varepsilon,$$

$$|\beta_1 f(b_1 x) + \ldots + \beta_m f(b_m x) - B| \leqq \varepsilon.$$

Если мы заменим в первом неравенстве $x$ последовательно на $b_1 x, \ldots, b_m x$ и сложим, то получим

$$|\alpha_1\beta_1 f(b_1 x a_1) + \alpha_1\beta_2 f(b_2 x a_1) + \ldots + \alpha_n\beta_m f(b_m x a_n) - A| \leqq \varepsilon.$$

Аналогично, если мы заменим $x$ во втором неравенстве последовательно на $xa_1, \ldots, xa_n$, то получим

$$|\alpha_1\beta_1 f(b_1 x a_1) + \alpha_1\beta_2 f(b_2 x a_1) + \ldots + \alpha_n\beta_m f(b_m x a_n) - B| \leqq \varepsilon.$$

Поэтому $|A - B| \leqq 2\varepsilon$ и, так как $\varepsilon$ можно взять как угодно малым, $A = B$.

Определение 5. *Если $f(x)$ п.п., то общее значение ее однозначно определяемых правого и левого средних назовем средним $f(x)$ и обозначим его через $M_x f(x)$* [4].

Мы установим теперь наиболее важные свойства среднего.

Теорема 7. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — п.п. функции, то и все функции $f(xa)$, $f(ax)$, $f(x^{-1})$, $\overline{f(x)}$, $\alpha f(x)$, $f(x) \pm g(x)$ ($\alpha$ — комплексное число, $a$ — элемент $\mathfrak{G}$) п.п.* (*см. теорему* 1). *Кроме того, имеет место*:

(1) $M_x[\alpha f(x)] = \alpha M_x f(x)$;

(2) $M_x[f(x) \pm g(x)] = M_x f(x) \pm M_x g(x)$;

(3) $M_x 1 = 1$;

(4) *если $f(x)$ действительна и всюду на $\mathfrak{G}$ неотрицательна, то $M_x f(x) \geqq 0$, и если, кроме того, $f(x) \not\equiv 0$, то $M_x f(x) > 0$*;

(5) $|M_x[f(x)]| \leqq M_x[|f(x)|]$;

(6) $M_x[\overline{f(x)}] = \overline{M_x[f(x)]}$;

(7) $M_x f(xa) = M_x f(x)$;

(8) $M_x f(ax) = M_x f(x)$;

(9) $M_x f(x^{-1}) = M_x f(x)$.

Равенства (1), (3), (5), (6) и первая половина утверждения (4) очевидны. Так как каждое левое среднее $f(x)$ является левым средним $f(xa)$ и каждое правое среднее $f(x)$ есть правое среднее $f(ax)$, то справедливы (7) и (8). Поскольку любое правое среднее $f(x)$ является левым средним $f(x^{-1})$, то имеет место (9). Таким образом, нуждаются в доказательстве только (2) и вторая половина (4).

Для доказательства (2) положим $M_x f(x) = A$, $M_x g(x) = B$. Пусть $\varepsilon > 0$, и возьмем $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$) и $a_1, \ldots, a_n$, такие, что

$$|\alpha_1 f(xa_1) + \ldots + \alpha_n f(xa_n) - A| \leqq \varepsilon.$$

[4] Определения 3—5 и утверждения теорем 3—6 очень близки к конструкции автора меры Хаара—Лебега на компактных группах [19]. Заслуживает внимания то обстоятельство, что для некомпактных групп Хаар доказал своим методом существование интеграла [11], а наш метод приводит к интегральному среднему.

Воспользуемся тем, что $\alpha_1 g(xa_1) + \ldots + \alpha_n g(xa_n)$ имеет то же левое среднее, что и $g(x)$, т. е. $B$. Поэтому мы можем взять $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (все $\beta_1, \ldots, \beta_m \geqq 0$, $\beta_1 + \ldots + \beta_m = 1$) и $b_1, \ldots, b_m$, такие, что

$$|\alpha_1\beta_1 g(xb_1a_1) + \alpha_1\beta_2 g(xb_2a_1) + \ldots + \alpha_n\beta_m g(xb_ma_n) - B| \leqq \varepsilon.$$

Если мы в первом неравенстве заменим $x$ последовательно на $xb_1, \ldots, xb_m$ и сложим полученные неравенства, то получим

$$|\alpha_1\beta_1 f(xb_1a_1) + \alpha_1\beta_2 f(xb_2a_1) + \ldots + \alpha_n\beta_m f(xb_ma_n) - A| \leqq \varepsilon.$$

Обозначим $nm$ через $p$; $\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \ldots, \alpha_n\beta_m$ — через $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ (все $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \geqq 0$, $\gamma_1 + \ldots + \gamma_p = 1$) и $b_1a_1, b_2a_1, \ldots, b_ma_n$ — через $C_1, \ldots, C_p$. Тогда, складывая и вычитая (некоторые) наши неравенства, получим

$$|\gamma_1(f(xC_1) \pm g(xC_1)) + \ldots + \gamma_p(f(xC_p) \pm g(xC_p)) - (A \pm B)| \leqq 2\varepsilon.$$

Так как мы можем взять $\varepsilon$ как угодно малым, то отсюда вытекает, что $M_x[f(x) \pm \pm g(x)] = A \pm B$. (Другой способ доказательства (2) состоит в применении замечания, следующего за теоремой 5, к $f(x)$ и $g(x)$.)

Для доказательства второй половины (4) предположим, что $f(x) \geqq 0$ всюду и $f(x_0) > 0$ в некоторой точке $x_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число таких элементов в $R_f$, что любой элемент из $R_f$ находится на расстоянии, не превышающем $\varepsilon$, от одного из выделенных элементов (см. доказательство теоремы 3). Следовательно, найдется конечное число элементов $a_1, \ldots, a_n$, таких, что для любого $a$ существует $\mu = 1, 2, \ldots, n$, такое, что для всех $x$ имеет место неравенство $|f(xa_\mu) - f(xa)| \leqq \varepsilon$. Положим теперь $\varepsilon = f(x_0)/2$. Подставив $x = x_0a_\mu^{-1}$, получим $f(x_0a_\mu^{-1}a) \geqq f(x_0)/2$. Следовательно, для любого $a$ имеем $f(x_0a_\nu^{-1}a) \geqq 0$ при всех $\nu = 1, \ldots, n$ и $f(x_0a_\nu^{-1}a) \geqq f(x_0)/2$ хотя бы при одном $\nu$. Поэтому $f(x_0a_1^{-1}a) + \ldots + f(x_0a_n^{-1}a) \geqq f(x_0)/2$, т. е. функция $g(y) = f(x_0a_1^{-1}y) + \ldots + f(x_0a_n^{-1}y) - f(x_0)/2$ всюду неотрицательна. Следовательно, из первой половины (4) имеем $M_y g(y) \geqslant 0$. Из (2), (3), (6) — (8) вытекает, что $M_y g(y) = nM_y f(y) - f(x_0)/2$, откуда получаем

$$M_y f(y) \geqq f(x_0)/2n > 0.$$

Теорема 8. *Формальные свойства* (1)—(9) *однозначно определяют* $M_x f(x)$. *В действительности, для этого достаточны* (1)—(3), *первая половина* (4) *и* (7) *или* (8).

Достаточно рассмотреть (1) — (3), первую половину (4) и (7), так как (8) можно получить заменой $ab$ в $\mathfrak{G}$ на $ba$. Итак, предположим, что задан функционал $M_x f(x)$, определенный для всех п. п. $f(x)$ и удовлетворяющий (1) — (3), первой половине (4) и (7).

Для любого $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a_1, \ldots, a_n$ (все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$), такие, что $|\alpha_1 f(xa_1) + \ldots + \alpha_n f(xa_n) - M_x f(x)| \leqq \varepsilon$ или, если $f(x)$ действительна,

$$M_x f(x) - \varepsilon \leqq \alpha_1 f(xa_1) + \ldots + \alpha_n f(xa_n) \leqq M_x f(x) + \varepsilon.$$

Тогда из (1) — (3), первой половины (4) и (7) вытекает, что $M_x f(x) - \varepsilon \leqq$

$\leqq M'_x f(x) \leqq M_x f(x) + \varepsilon$ и, так как $\varepsilon$ произвольно, $M'_x f(x) = M_x f(x)$. Из свойства (1) при $\alpha = i$ следует, что это имеет место также для чисто мнимой $f(x)$, а из свойства (2) — что это верно для любой $f(x)$.

Из теорем 6 — 8 следует, что для п. п. функции $f(x)$ имеется в точности один способ определить понятие $M_x f(x)$, обладающее существенными формальными свойствами среднего. Наше $M_x f(x)$ эквивалентно известному интегральному среднему $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$ в теории Бора, где $\mathfrak{G}$ есть аддитивная группа всех действительных чисел. Но даже в этом случае форма нашего определения существенно отличается от обычной (например, оно не использует непрерывности) и дает возможность нового подхода к проблеме.

Замечание. *Понятие среднего может быть модифицировано следующим образом. Рассмотрим удвоенную группу $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$, т. е. множество всех пар $[a, a']$. Это множество является группой, операции в которой определяются как $[a, a'] \times [b, b'] = [ab, b'a']$ и $[a, a']^{-1} = [a^{-1}, a'^{-1}]$. (Это аналогично конструкции, рассматриваемой в следующем пункте, за исключением того, что здесь мы используем $b'a'$, а там — $a'b'$.)*

Рассуждения из доказательства теоремы 9 (см. ниже) показывают, что если $f(x)$ — п. п. функция на $\mathfrak{G}$, то $f_0([x, x']) = f(xx')$ — п. п. на $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$. Согласно теореме 5 тогда существует постоянная $A$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $n = 1, 2, \ldots$, числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, все $\geqq 0$, и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ и элементы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ из $\mathfrak{G}$, такие, что неравенство $|\alpha_1 f_0([x, y][\alpha_1, b_1]) + \ldots + \alpha_n f_0([x, y][\alpha_n, b_n]) - A| \leqq \varepsilon$ выполняется для всех $x$ и $y$ из $\mathfrak{G}$. Если мы положим $c_1 = a_1 b_1, \ldots, c_n = a_n b_n$, то это условие принимает вид

$$|\alpha_1 f(xc_1 y) + \ldots + \alpha_n f(xc_n y) - A| \leqq \varepsilon.$$

С этим средним обращаться даже легче, чем с нашими правым и левым средними (которые являются его частными случаями). Это обусловлено следующим фактом. Возьмем два произвольных множества $\geqq 0$ чисел $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$, такие, что $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 1$ и $\gamma_1 + \ldots + \gamma_l = 1$, и два произвольных множества элементов из $\mathfrak{G}: a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$. Заменим в нашем последнем неравенстве $x$ и $y$ на $xa_\kappa$ и $b_\lambda y$, умножим на $\beta_\kappa \gamma_\lambda$ и сложим для всех $\kappa = 1, \ldots, k$; $\lambda = 1, \ldots, l$. Тогда мы получим неравенство того же самого типа с той разницей, что оно содержит $knl$, а не $n$ членов и вместо $\alpha_\nu$ и $a_\nu$ в нем стоят $\beta_\kappa d_\nu \gamma_\lambda$ и $a_\kappa c_\nu b_\lambda$. Поэтому из неравенств

$$|\alpha_1 f(xc_1 y) + \ldots + \alpha_m f(xc_m y) - A| \leqq \varepsilon,$$

$$|\alpha'_1 g(xc'_1 y) + \ldots + \alpha'_n g(xc'_n y) - B| \leqq \varepsilon$$

вытекают неравенства

$$|\alpha''_1 f(xc''_1 y) + \ldots + \alpha''_{mn} f(xc''_{mn} y) - A| \leqq \varepsilon,$$

$$|\alpha''_1 g(xc''_1 y) + \ldots + \alpha''_{mn} g(xc''_{mn} y) - B| \leqq \varepsilon,$$

где $\alpha''_\rho$ и $c''_\rho$ совпадают с (взятыми в некотором порядке) $\alpha_\mu \alpha'_\nu$ и $c_\mu c'_\nu$. Отсюда сразу следует единственность, обобщение для комплексных $f(x)$ и аддитивность

нашего нового среднего. Разумеется, это среднее совпадает со средними, рассмотренными нами ранее.

7. Для приложений, которые будут рассматриваться в следующей части, необходимо доказать некоторые факты, касающиеся двойных средних. К этому мы и переходим.

Группа $\mathfrak{G}$ может быть «удвоена», т. е. мы можем рассмотреть множество $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ всех пар $[a, a']$, которое при помощи определений $[a, a'][b, b'] = [ab, a'b']$, $[a, a']^{-1} = [a^{-1}, a'^{-1}]$ превращается в группу. Мы будем функции на ней обозначать $f(x, x')$, а не $f([x, x'])$. Все наши понятия применимы и к $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$: мы имеем п. п. функции $f(x, x')$ на $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ и среднее $M_{x,x'}f(x, x')$.

Теорема 9. *Если* $f(x)$ — *п. п. на* $\mathfrak{G}$, *то следующие восемь функций* $f(xx')$, $f(x'x)$, $f(xx'^{-1})$, ..., $f(x'^{-1}x^{-1})$ *все являются п. п. на* $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$.

Перемена местами $x$ и $x'$, $ab$ и $ba$ на $\mathfrak{G}$ и $f(x)$ с $f(x^{-1})$ показывает, что необходимо доказать утверждение теоремы только для $f(xx')$ и $f(xx'^{-1})$. Их п. п. на $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ означает, что множества функций $f(axa'x')$, $f(xax'a')$, $f(axx'^{-1}a'^{-1})$, $f(xaa'^{-1}x'^{-1})$ на $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ являются у. к., или, иначе, что множества функций одного или двух переменных $f(axby)$, $f(xayb)$, $f(axb)$, $f(xay)$ на $\mathfrak{G}$ у. к. Третий вариант возникает из первого при подстановке $y = 1$, четвертый — из второго при $b = 1$ и второй—из первого при перестановке $a$ и $x$ с $b$ и $y$ и $ab$ с $ba$ на $\mathfrak{G}$. Итак, мы должны рассмотреть только $f(axby)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ — п.п.п. функция, то существует конечное число элементов $y_1, \ldots, y_n$, таких, что для любого $y$ существует $\nu = 1, \ldots, n$, для которого $|f(zy) - f(zy_\nu)| \leqq \varepsilon$ при всех $z$. Поскольку любая $f(xy_\nu)$ — п.п.п., то множество всех функций $f(xby_\nu)$ у.к. при всех $\nu = 1, \ldots, n$ и поэтому множество всех «вектор-функций» с $n$ компонентами $[f(xby_1), \ldots, f(xby_n)]$ также у.к., следовательно, существует конечное число элементов $b_1, \ldots, b_m$, таких, что для любого $b$ существует $\mu = 1, 2, \ldots, n$, для которого $|f(zby_\nu) - f(zb_\mu y_\nu)| \leqq \varepsilon$ при всех $z$ и для любого $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Два наших неравенства вместе дают следующий результат:

$$|f(zby) - f(zb_\mu y)| \leqq 3\varepsilon.$$

Окончательно, $f(x)$ — л. п. п., так что существует конечное множество элементов $a_1, \ldots, a_l$, таких, что для любого $a$ существует $\lambda = 1, \ldots, l$, при котором $|f(au) - f(a_\lambda u)| \leqq \varepsilon$ равномерно по $a$. Это вместе с нашим последним неравенством дает, что для всех пар $x$ и $y$ $|f(axby) - f(a_\lambda x b_\mu y)| \leqq 5\varepsilon$.

Так как это имеет место для любого $\varepsilon > 0$, то у. к. множества функций $f(axby)$ доказана [13, с. 108—109].

Теорема 10. *Если* $f(x, x')$ *п. п, на* $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$, *то она также п. п. на* $\mathfrak{G}$ *как функция* $x$ *или как функция* $x'$. *Тогда мы можем рассмотреть* $M_x f(x, x')$ *и* $M_{x'} f(x, x')$, *которые п. п. на* $\mathfrak{G}$ *как функция* $x'$ *и соответственно как функция* $x$. *Поэтому мы можем построить* $M_{x'}[M_x f(x, x')]$ *и* $M_x[M_{x'} f(x, x')]$, *и оба эти выражения равны* $M_{xx} f(x, x')$.

Первое утверждение очевидно. Во втором и третьем утверждениях достаточно рассмотреть $M_x f(x, x')$ и $M_x [M_x f(x, x')]$, так как замена $x$ на $x'$ и $f(x, x')$ на $f(x', x)$ дает остальные утверждения теоремы.

Рассмотрим последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots$ из $\mathfrak{G}$. В силу того что $f(x, x')$ п. п. п., последовательность $f(x, x'a_1)$, $f(x, x'a_2)$, ... содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $f(x, x'a_{n_1})$, $f(x, x'a_{n_2})$, ..., такую, что для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех $\mu$ и $\nu$ $|f(x, x'a_{n_\mu}) - f(x, x'a_{n_\nu})| \leqq \varepsilon$. Отсюда следует, что $|M_x f(x, x'a_{n_\mu}) - M_x f(x, x'a_{n_\nu})| \leqq \varepsilon$. Тогда множество функций $M_x f(x, x'a)$ переменной $x'$ у. к. Поэтому $M_x f(x, x')$ п. п. п. и замена $ab$ в $\mathfrak{G}$ на $ba$ дает, что она л. п. п. Следовательно, она п.п.

Тогда очевидно, что $M'_{xx'} f(x, x') = M_{x'}[M_x f(x, x')]$ как $[x, x']$-среднее обладает свойствами (1) — (4) и (7) из теоремы 7. Поэтому согласно теореме 8 оно есть $M_{xx'} f(x, x')$.

Теоремы 9 и 10 могут быть обобщены на случай функций $2^m$ переменных путем последовательного применения. Взяв $2^m \geqq n$ и положив функции постоянными по остальным $(2^m - n)$-переменным, эти теоремы могут быть обобщены на функции $n$ переменных.

## Часть II

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕЙЛЯ И Е. ШМИДТА. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

8. Результаты части I дают нам возможность применить метод Вейля для доказательства основных теорем теории Бора п.п. функций (на аддитивной группе действительных чисел) и рассмотрения линейных ортогональных представлений непрерывных групп [5]. Настоящая часть содержит доказательство «формулы Парсеваля» (эквивалентной теореме 15), которое проводится в точности аналогично схеме доказательства Вейля. Она содержит также доказательство «аппроксимационной теоремы» (эквивалентной теореме 18), где в связи с трудностями построения в нашем общем случае п.п. функции с требуемыми свойствами используется другая схема, принадлежащая Н. Винеру (см. [31, с. 348—349] и нашу теорему 17). Следующая III часть содержит интерпретацию и приложение этих теорем, связывающее теорию п.п. функций с теорией представлений. При этом фундаментальное значение имеет метод Вейля.

Определение 6. *Если $f(x)$ и $g(x)$ п.п., то мы положим*

$$h(x) = M_y[f(xy^{-1})g(y)] = M_y[f(y)g(y^{-1}x)] = f \times g.$$

Отметим, что два выражения для $h(x)$ равны согласно теореме 7 и свойствам (7) и (9), если в них подставить $y^{-1}x$ вместо $y$. Кроме того, $h(x)$ п.п. в силу теорем 9 и 10.

Замечание. *Функция $f \times g$ может быть равномерно аппроксимирована функциями вида $\gamma_1 f(xC_1) + \ldots + \gamma_n f(xC_n)$ ($\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — комплексные числа), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и элементы $C_1, \ldots, C_n$, такие,*

[5] См. [31, 32]. Используемые здесь операционные методы частично основаны на диссертации Шмидта [20].

*что неравенство*

$$|f \times g(x) - \gamma_1 f(xC_1) - \ldots - \gamma_n f(xC_n)| \leqq \varepsilon$$

*имеет место всюду в* $\mathfrak{G}$.

Функция $g(x)$ п.п. и поэтому ограничена (теорема 2). Предположим, что $g(x) \leqq C$. Теперь возьмем $\delta > 0$. Согласно нашему замечанию, сделанному при доказательстве теоремы 3, можно найти конечное число $b_1, \ldots, b_k$ элементов из $\mathfrak{G}$, таких, что для любого $x$ существуют $\kappa = 1, \ldots, k$, такие, что при всех $z$ имеет место неравенство $|f(xz) - f(b_\kappa z)| \leqq \delta$.

Рассмотрим теперь п. п. функции по $y$ $f(b_\kappa y^{-1})\, g(y)$, $\kappa = 1, \ldots, k$, и применим к ним замечание, следующее за теоремой 5 (с $\varepsilon/2$): если $\varepsilon > 0$, то существует множество действительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$) и множество элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{G}$, таких, что для любого $\kappa = 1, \ldots, k$ при всех $y$ имеет место

$$|\alpha_1 f(b_\kappa a_1^{-1} y^{-1})\, g(ya_1) + \ldots + \alpha_n f(b_\kappa a_n^{-1} y^{-1})\, g(ya_n) - M_y[f(b_\kappa y^{-1})\, g(y)]| \leqq \varepsilon/2.$$

Для любого $x$ существует $\kappa$, такое, что $|f(xz) - f(b_\kappa z)| \leqq \delta$ и поэтому

$$|f(xu^{-1})\, g(u) - f(b_\kappa u^{-1})\, g(u)| \leqq C\delta$$

и

$$|M_u[f(xu^{-1})\, g(u)] - M_u[f(b_\kappa u^{-1})\, g(u)]| \leqq C\delta.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\alpha_1 f(xa_1^{-1}y^{-1})\, g(ya_1) + \ldots + \alpha_n f(xa_n^{-1}y^{-1})\, g(ya_n) - M_y[f(xy^{-1})\, g(y)]| \leqq 2C\delta + \varepsilon/2\ .$$

Наше утверждение будет доказано, если мы положим $\delta = \varepsilon/4C$ и $y = 1$ и подставим $\alpha_1 g(a_1), \ldots, \alpha_n g(a_n)$ вместо $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ вместо $C_1, \ldots, C_n$.

Теорема 11. *«Умножение» $f \times g$ дистрибутивно (линейно) по обоим сомножителям, ассоциативно, и если $\mathfrak{G}$ абелева, то коммутативно.*

За исключением ассоциативности, утверждение теоремы очевидно. Наша вторая форма выражения для $h = f \times g$ дает

$$(f \times g) \times k(x) = M_z[M_y[f(y)\, g(y^{-1}z)]\, k(z^{-1}x)] = M_z[M_y[f(y)\, g(y^{-1}z)\, k(z^{-1}x)]],$$

$$f \times (g \times k)(x) = M_y[f(y)\, M_z[g(y^{-1}z)\, k(z^{-1}x)]] = M_y[M_z[f(y)\, g(y^{-1}z)\, k(z^{-1}x)]].$$

А эти выражения согласно теоремам 9 и 10 равны.

Определение 7. *Если $f(x)$ п.п., то мы обозначим $f \times f \times \ldots \times f$ ($n$ сомножителей) через $f^n$ и $\overline{f(x^{-1})}$ через $f'(x)$. Далее, мы обозначим*

$$Nf = \{M_x[|f(x)|^2]\}^{1/2}.$$

Теорема 12. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — п.п.функции. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $f \neq 0$, *то* $Nf > 0$,

(2) $N[\alpha f] = |\alpha|\, Nf$, $\quad N[f \pm g] \leqq Nf + Ng$, $\quad N[f \times g] \leqq (Nf)(Ng)$,

(3) $ff'(1) = f'f(1) = (Nf)^2$,

(4) $|M_x f(x)| \leqq Nf$,

(5) $|f \times g(x)| \leqq (Nf)(Ng)$,

(6) $M_x[|f(x)||g(x)|] \leqq (Nf)(Ng)$.

Утверждение (1), первая часть (2) и (3) очевидны. Вторая часть (2) после возведения в квадрат приводит к

$$M_x[|f(x) \pm g(x)|^2] \leqq M_x[|f(x)|^2] + M_x[|g(x)|^2] + 2(Nf)(Ng),$$

$$|M_x[\Re(f(x)\overline{g(x)})]| \leqq (Nf)(Ng).$$

Очевидно, что это следует из (6). Третья часть (2) вытекает из (5) при возведении ее в квадрат и применении $M_z$; (4) следует из (5), если положить $g(x) \equiv 1$, так как $f \times 1(x) = M_y[f(y)]$

Следовательно, нам нужно доказать только (5) и (6). Так как

$$|f(y)g(y^{-1}x)| \leqq {}^1/_2|f(y)|^2 + {}^1/_2|g(y^{-1}x)|^2,$$

то имеют место неравенства

$$|M_y[f(y)g(y^{-1}x)]| \leqq {}^1/_2 M_y[|f(y)|^2] + {}^1/_2 M_y[|g(y^{-1}x)|^2] \leqq {}^1/_2 M_y[|f(y)|^2] + {}^1/_2 M_y[|g(y)|^2],$$

$$|f \times g(x)| \leqq {}^1/_2(Nf)^2 + {}^1/_2(Ng)^2.$$

Исходя из

$$|f(x)||g(x)| \leqq {}^1/_2|f(x)|^2 + {}^1/_2|g(x)|^2,$$

мы получаем аналогично

$$M_x[|f(x)||g(x)|] \leqq {}^1/_2(Nf)^2 + {}^1/_2(Ng)^2.$$

Если мы заменим $f$ и $g$ на $\gamma f$ и $g/\gamma$ ($\gamma$ действительно и $> 0$); то получим, что $f \times g(x)|$ и $M_x[|f(x)||g(x)|]$ не превышают $\frac{\gamma^2}{2}(Nf)^2 + \frac{1}{2\gamma^2}(Ng)^2$.

Наибольшая нижняя грань этого выражения равна $(Nf)(Ng)$. Тем самым (5) и (6) доказаны.

Теорема 13. *Пусть* $f(x)$ — *п. п. функция* $\not\equiv 0$. *Положим* $\Gamma_n = N[f \times f' \times \ldots]^2 = N[f' \times f \times \ldots]^2 = (f \times f')^n(1) = (f' \times f)^n(1)$ (*$n$ сомножителей*). *Тогда* $\Gamma_n > 0$, $\Gamma_n^2 \leqq \Gamma_{n-1}\Gamma_{n+1}$, $\Gamma_{m+n} \leqq \Gamma_m\Gamma_n$.

Сначала мы докажем, что все четыре приведенных выше выражения для $\Gamma_n$ равны. Действительно, первое и третье выражения для $\Gamma_n$ равны и то же самое верно для второго и четвертого, так как $(g \times h)' = h' \times g'$. Равенство третьего и четвертого выражений вытекает из

$$(f \times f')^n = f \times (f' \times f \times \ldots \times f'),\ (f' \times f)^n = (f' \times f \times \ldots \times f') \times f$$

и из

$$f \times g(1) = g \times f(1) = M_y[f(y)g(y^{-1})].$$

Согласно (5) из теоремы 12 $|f \times g(1)| \leqq (Nf)(Ng)$. Если мы заменим здесь $f$ и $g$ на $f \times f' \ldots$ с $n-1$ и $n+1$ сомножителями соответственно, то получим $\Gamma_n^2 \leqq \Gamma_{n-1}\Gamma_{n+1}$. А если мы заменим $f$ и $g$ в (2) из теоремы 12 на $f \times$

$\times f' \times \ldots$ или $f' \times f \times \ldots$ с $m$ и $n$ сомножителями соответственно, то получим $\Gamma_{m+n}^2 \leqq \Gamma_m \Gamma_n$. Очевидно, что $\Gamma_n \geqq 0$. Из условия $\Gamma_n = 0$ вытекает, что $\Gamma_{n-1} = 0$ (потому что $\Gamma_{n-1}^2 = \Gamma_{n-2}\Gamma_n$, где $n \geqq 3$). Поэтому $\Gamma_2 = 0$. Отсюда $N[f \times f'] = 0$, $f \times f'(x) \equiv 0$. Следовательно, $N[f]^2 = f \times f'(1) = 0$ (т. е. $\Gamma_1 = 0$) и $f \equiv 0$, что противоречит нашему предположению.

Отсюда мы получаем, что $\Gamma_n > 0$.

Теорема 14. *Пусть $f(x)$ — такая же, как и ранее, и $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ определены аналогично предыдущему. Тогда при $n \to \infty$ $\Gamma_{n+1}/\Gamma_n \to \gamma$, $\Gamma_n/\gamma^n \to \kappa$, $(f \times f')^n(x)/\gamma^n \to \varphi(x)$ (равномерно). Кроме того, $0 < \gamma \leqq \Gamma_1$, $1 \leqq \kappa$, $\varphi(x)$ — п. п. функция и $\varphi' = \varphi$, $\varphi \times \varphi = \varphi$, $f \times f' \times \varphi = \varphi \times f \times f' = \gamma\varphi$, $\varphi(1) = \kappa$.*

Из формул теоремы 13 вытекает, что $0 < \Gamma_2/\Gamma_1 \leqq \Gamma_3/\Gamma_2 \leqq \ldots \leqq \Gamma_1$, и поэтому $\Gamma_{n+1}/\Gamma_n$ при $n \to \infty$ стремится к $\gamma$, $0 < \gamma \leqq \Gamma_1$. Кроме того, $\Gamma_{n+1}/\Gamma_n \leqq \gamma$, $\Gamma_n/\gamma^n \geqq \Gamma_{n+1}/\gamma^{n+1}$, т. е. $\Gamma_1/\gamma \geqq \Gamma_2/\gamma^2 \geqq \ldots > 0$ и поэтому $\Gamma_n/\gamma^n$ при $n \to \infty$ сходится к $\kappa$, где $\kappa \geqq 0$. Окончательно имеем $\Gamma_{m+n} \leqq \Gamma_m \Gamma_n$, т. е.

$$\Gamma_n \geqq \frac{\Gamma_{m+n}}{\Gamma_m} = \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m}\,\frac{\Gamma_{m+2}}{\Gamma_{m+1}} \cdots \frac{\Gamma_{m+n}}{\Gamma_{m+n-1}} \geqq \left(\frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m}\right)^n.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $\Gamma_n \geqq \gamma^n$ и $\Gamma_n/\gamma^n \geqq 1$, а затем при $n \to \infty$ получаем $\kappa \geqq 1$

Согласно (4) и (2) теоремы 12 имеем

$$\left|\frac{(f \times f')^n(x)}{\gamma^n} - \frac{(f \times f')^m(x)}{\gamma^m}\right|^2 = \left|f \times \left(\frac{(f' \times f)^{n-1}}{\gamma^n} - \frac{(f' \times f)^{m-1}}{\gamma^m}\right) \times f'(x)\right|^2 \leqq$$

$$\leqq (Nf)^2\left(N\left[\frac{(f' \times f)^{n-1}}{\gamma^n} - \frac{(f' \times f)^{m-1}}{\gamma^m}\right]\right)^2 (Nf')^2 = \Gamma_1^2\left(\frac{(f' \times f)^{n-1}}{\gamma^n} - \frac{(f' \times f)^{m-1}}{\gamma^m}\right)^2(1) =$$

$$= \Gamma_1^2\left(\frac{(f' \times f)^{2n-2}(1)}{\gamma^{2n}} - 2\,\frac{(f' \times f)^{m+n-2}(1)}{\gamma^{m+n}} + \frac{(f' \times f)^{2m-2}(1)}{\gamma^{2m}}\right) =$$

$$= \Gamma_1^2\left(\frac{\Gamma_{2n-2}}{\gamma^{2n}} - 2\,\frac{\Gamma_{m+n-2}}{\gamma^{m+n}} + \frac{\Gamma_{2m-2}}{\gamma^{2m}}\right).$$

При $m$ и $n \to \infty$ последнее выражение стремится к 0. Поэтому первое выражение равномерно сходится к 0, т. е. при $n \to \infty$ $(f \times f')^n(x)/\gamma^n$ равномерно сходится к предельной функции $\varphi(x)$. Так как функции $(f \times f')^n(x)/\gamma^n$ п.п., то и $\varphi(x)$ п. п.

Из соотношений

$$\left(\frac{(f \times f')^n}{\gamma^n}\right)' = \frac{(f \times f')^n}{\gamma^n}, \quad \left(\frac{(f \times f')^n}{\gamma^n}\right)^2 = \frac{(f \times f')^{2n}}{\gamma^{2n}},$$

$$f \times f' \times \frac{(f \times f')^n}{\gamma^n} = \frac{(f \times f')^n}{\gamma^n} \times f \times f' = \gamma\,\frac{(f \times f')^{n+1}}{\gamma^{n+1}}$$

вытекает, что при $n \to \infty$ (все рассматриваемые сходимости являются равномер-

ными) $\varphi' = \varphi$, $\varphi \times \varphi = \varphi$, $f \times f' \times \varphi = \varphi \times f \times f' = \gamma\varphi$. Окончательно

$$\frac{\Gamma_n}{\gamma^n} = \frac{(f \times f')^n (1)}{\gamma^n} \to \varphi(1),$$

и поэтому $\varphi(1) = \kappa$.

Теорема 15. *Пусть $f(x)$ — такая же, как и ранее. Тогда существуют (конечная или бесконечная) последовательность действительных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ и последовательность п.п. $\not\equiv 0$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, такие, что $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots \ldots > 0$, $\varphi_n' = \varphi_n$, $\varphi_n \times \varphi_n = \varphi_n$, $\varphi_n(1) \geqq 1$, $\varphi_m \times \varphi_n = 0\ (m \neq n)$, $f \times \times f' \times \varphi_n = \varphi_n \times f \times f' = \gamma_n\varphi_n$ и $\gamma_1\varphi_1(x) + \gamma_2\varphi_2(x) + \ldots$ равномерно сходится к $f \times f'(x)$.*

Применяя теорему 14, где следует положить $\gamma = \gamma_1$, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, $\varphi_1(1) = \kappa \geqq 1$, получим $\varphi_1(x) \not\equiv 0$. Положим теперь $f^* = f - \varphi_1 \times f$. Тогда $f^*(x)$ п.п. и

$$f^* \times f'^* = (f - \varphi_1 \times f) \times (f' - f' \times \varphi_1) = f \times f' - \varphi_1 \times f \times f' - f \times f' \times \varphi_1 + \varphi_1 \times f \times f' \times \varphi_1 = f \times f' - \gamma_1\varphi_1 - \gamma_1\varphi_1 + \gamma_1\varphi_1 \times \varphi_1 = f \times f' - \gamma_1\varphi_1.$$

Если $f^* \equiv 0$, то отсюда получаем $f \times f' = \gamma_1\varphi$, т. е. теорема справедлива для последовательности, состоящей из одного элемента. Предположим, что $f^* \equiv 0$.

Тогда из $f \times f' \times \varphi_1 = \varphi_1 \times f \times f' = \gamma_1\varphi_1$ вытекает, что $(f^* - f^{*\prime})^n = (f \times f' - \gamma_1\varphi_1)^n = (f \times f')^n - \gamma^n\varphi_1$, и поэтому $\dfrac{(f^* \times f^{*\prime})^n(x)}{\gamma_1^n} = \dfrac{(f \times f')^n(x)}{\gamma_1^n} - \varphi_1(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, если мы возьмем $\gamma = \gamma_2$ и $\varphi_2(x)$ из теоремы 14, для которых

$$(f^* \times f^{*\prime})^n(x)/\gamma_2^n \to \varphi_2(x) \not\equiv 0,$$

то имеет место неравенство $\gamma_1 > \gamma_2$.

Повторяя этот процесс для $f^{**} = f^* - \varphi_2 \times f^*$, $f^{***} = f^{**} - \varphi_3 \times f^{**}, \ldots$, получим в результате последовательность действительных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ и две последовательности п.п. функций: $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ и $f(x), f^*(x), \ldots$, обладающие следующими свойствами:

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > 0,\ \varphi_n' = \varphi_n,\ \varphi_n \times \varphi_n = \varphi_n,\ \varphi_n(1) \geqq 1,$$

$$f^{(n-1)} \times f^{(n-1)\prime} \times \varphi_n = \varphi_n \times f^{(n-1)} \times f^{(n-1)\prime} = \gamma_n\varphi_n, \qquad f^{(n)} = f^{(n-1)} - \varphi_n \times f^{(n-1)}.$$

Эти последовательности обрываются, когда $f^{(n)}$ тождественно обращается в нуль, а в противном случае никогда не обрываются.

Из этих построений снова вытекают соотношения $f^{(n)} \times f^{(n)\prime} = f^{(n-1)} \times f^{(n-1)\prime} - \gamma_n\varphi_n$. Складывая эти соотношения для всех $n = 1, \ldots, P$, получим

$$\gamma_1\varphi_1 + \ldots + \gamma_P\varphi_P = f \times f' - f^{(P)} \times f^{(P)\prime}. \qquad (*)$$

Теперь мы хотим доказать, что $\varphi_m \times \varphi_n = 0$ при $m \neq n$. Применение (′) показывает, что достаточно рассмотреть случай $m > n$, т. е. достаточно доказать,

что $\varphi_{n+k+1} \times \varphi_n = 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим уравнение $f^{(n+k)} \times f^{(n+k)'} \times \times \varphi_n = 0$. Для $k = 0$ получается условие

$$f^{(n)} \times f^{(n)'} \times \varphi_n = f^{(n-1)} \times f^{(n-1)'} \times \varphi_n - \gamma_n\varphi_n \times \varphi_n = \gamma_n\varphi_n - \gamma_n\varphi_n = 0.$$

Если это имеет место для какого-нибудь $k = 0, 1, 2, \ldots$, то имеем

$$\varphi_{n+k+1} \times f^{(n+k)} \times f^{(n+k)'} \times \varphi_n = \begin{cases} \varphi_{n+k+1} \times (f^{(n+k)} \times f^{(n+k)'} \times \varphi_n) = 0, \\ (\varphi_{n+k+1} \times f^{(n+k)} \times f^{(n+k)'}) \times \varphi_n = \gamma_{n+k+1}\varphi_{n+k+1} \times \varphi_n, \end{cases}$$

и поэтому $\varphi_{n+k+1} \times \varphi_n = 0$. Отсюда

$$f^{(n+k+1)} \times f^{(n+k+1)'} \times \varphi_n = (f^{(n+k)} \times f^{(n+k)'} - \gamma_{n+k+1}\varphi_{n+k+1}) \times \varphi_n = 0,$$

т. е. наше уравнение справедливо для $k+1$. Поэтому оно имеет место для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$, и при этом справедливо его следствие $\varphi_{n+k+1} \times \varphi_n = 0$.

Подстановка $\varphi_n \times \ldots$ или $\ldots \times \varphi$ в (*) при $p = n-1$ приводит к

$$\varphi_n \times f \times f' = \varphi_n \times f^{(n-1)} \times f^{(n-1)'} = \gamma_n\varphi_n,$$
$$f \times f' \times \varphi_n = f^{(n-1)} \times f^{(n-1)'} \times \varphi_n = \gamma_n\varphi_n.$$

Единственное утверждение, которое осталось доказать — это равномерная сходимость $\gamma_1\varphi_1(x) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(x)$ к $f \times f'(x)$ при $n \to \infty$ или согласно (*) равномерная сходимость $f^{(n)} \times f^{(n)}(x)$ к 0. Применяя теперь (3) и (5) теоремы 12 к (*), получаем $\gamma_1\varphi_1(1) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(1) = (Nf)^2 - (Nf^{(n)})^2 \leqq (Nf)^2$, и так как $|\varphi_n \times \varphi_n(x)| \leqq \varphi_n \times \varphi_n(1)$, т. е. $|\varphi_n(x)| \leqq \varphi_n(1)$, то из (*) вытекает равномерная сходимость при $n \to \infty$ $\gamma_1\varphi_1(x) + \gamma_2\varphi_2(x) + \ldots$ к $g(x)$, где $g(x)$ п. п. Следовательно, $f^{(n)} \times f^{(n)'}(x) \to f \times f(x) - g(x)$ равномерно. Более того, из этой сходимости вытекает, что $\gamma_n \to 0$, так как $\varphi_n(1) \geqq 1$. С другой стороны, имеем $\Gamma_2/\Gamma_1 < \gamma$, $\Gamma_2 < \gamma\Gamma_1$, $(N[f \times f'])^2 < \gamma(Nf)^2$. Если мы заменим $f$ и $\gamma$ на $f^{(n)}$ и $\gamma_n$, то получим $(N[f^{(n)} \times f^{(n)'}])^2 < \gamma_n(Nf^{(n)})^2 \leqq \gamma_n(Nf)^2$. Поэтому из $N[f^{(n)} \times f^{(n)'}] \to 0$ вытекает, что $N[f \times f' - g] = 0$ и $g = f \times f'$.

9. Для того чтобы получить окончательный результат теории Шмидта—Вейля, переходим к аппроксимационным теоремам. Но, как мы уже отмечали, дадим здесь только доказательства, а значение этих теорем обсудим в следующей части.

Определение 8. *П.п. функцию $\varphi(x)$, для которой $\varphi' = \varphi$ и $\varphi \times \varphi = \varphi$, назовем единицей. Две единицы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такие, что $\varphi \times \psi = 0$, называются ортогональными.*

Теорема 16[6]. *Для любой п. п. функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует единица $\varphi(x)$, такая, что $N[f - \varphi \times f] \leqq \varepsilon$.*

Если $f \equiv 0$, то $\varphi \equiv 0$. Следовательно, мы можем предположить, что $f \not\equiv 0$. Тогда согласно теореме 13 $\psi_n = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ является единицей (так как

[6] См. теоремы 28 и 29, где используются и интерпретируются результаты теорем 16 и 18.

$\varphi_n' = \varphi$, $\varphi_n \times \varphi_n = \varphi_n$, $\varphi_m \times \varphi_n = 0$ при $m \neq n$), и мы имеем

$$(N[f - \psi_n \times f])^2 = \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu \times f\right) \times \left(f' - \sum_{\nu=1}^{n} f' \times \varphi_\nu\right)(1) =$$

$$= \left(f \times f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu \times f \times f - \sum_{\nu=1}^{n} f \times f' \times \varphi_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \varphi_\mu \times f \times f' \times \varphi_\nu\right)(1) =$$

$$= \left(f \times f - \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\mu \times \varphi_\nu\right)(1) =$$

$$= \left(f \times f - \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu\right)(1) \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Положив $\varphi = \psi_n$ при достаточно большом $n$, получаем требуемый результат.

Теорема 17. *Для любой п.п. функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует п.п. функция $g(x)$, такая, что $|f(x) - g \times f(x)| \leqq \varepsilon$ при всех $x$.*

Следуя Винеру, рассмотрим «трансляционную функцию» $f(x)$:

$$e(x) = \text{l. u. b.}_y |f(x^{-1}y) - f(y)|,$$

которая была введена Бохнером [2]. Так как $f(x)$ п.п., то легко видеть, что $e(x)$ тоже п.п. Кроме того, $e(x) \geqq 0$, $e(1) = 0$. Теперь определим функцию

$$F(u) = \begin{cases} 1 - u/\varepsilon, & 0 \leqq u \leqq \varepsilon, \\ 0, & u \geqq \varepsilon. \end{cases}$$

Поскольку $F(u)$ непрерывна, $\varphi(x) = F(e(x))$ п. п. Очевидно, что $\varphi(x) \geqq 0$, $\varphi(1) = 1$, и если $\text{l. u. b.}_y |f(x^{-1}y) - f(y)| > \varepsilon$, то $\varphi(x) = 0$. Следовательно, из $\varphi(x) \neq 0$ вытекает, что $|f(x^{-1}y) - f(y)| \leqq \varepsilon$ и поэтому всегда $|\varphi(x) \times (f(x^{-1}y) - f(y))| \leqq \varepsilon\varphi(x)$. Отсюда $|M_x[\varphi(x)(f(x^{-1}y) - f(y))]| \leqq \varepsilon M_x \varphi(x)$. Далее, $M_x[\varphi(x)(f(x^{-1}y) - f(y))] = \varphi \times f(y) - f(y) M_x \varphi(x)$ и тем самым функция $g(y) = \varphi(y)/(M_x \varphi(x))$ удовлетворяет требуемым условиям.

Теорема 18. *Для любой п.п. функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют п.п. функция $g(x)$ и единица $\varphi(x)$, такие, что $|f(x) - \varphi \times g \times f(x)| \leqq \varepsilon$ при всех $x$* [7].

Возьмем функцию $g(x)$, согласно теореме 17 отвечающую $f(x)$ и $\varepsilon/2$, а также функцию $\varphi(x)$, согласно теореме 16 отвечающую $g(x)$ и $\varepsilon/(2Nf)$. Тогда $|f(x) - g \times f(x)| \leqq \varepsilon/2$, $|g \times f(x) - \varphi \times g \times f(x)| \leqq N[g - \varphi \times g] Nf \leqq \varepsilon/2$ и поэтому $|f(x) - \varphi \times g \times f(x)| \leqq \varepsilon$.

## Часть III

## ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $\mathfrak{G}$

10. Определим представления обычным способом.

Определение 9. *Если каждому $a \subset \mathfrak{G}$ соответствует матрица $D(a) = \{D_{\rho,\sigma}(a)\}$ $(\rho, \sigma = 1, \ldots, s)$ порядка $s$, так что $D(1) = 1$ (единичная матрица порядка $s$), $D(ab) = D(a)D(b)$, то мы назовем совокупность матриц $D(a)$ представлением $\mathfrak{G}$. (Непрерывность не предполагается.) Два представления*

[7] См. примеч. к теореме 16.

*$D(a)$ и $D'(a)$ называются эквивалентными, если они оба имеют порядок $s$ и если существует постоянная матрица $U=\{U_{\rho\sigma}\}$, $\rho$, $\sigma=1,\ldots,s$, которая преобразует одно представление в другое: $U^{-1}D(a)U=D'(a)$. Представление $D(a)$ называется приводимым (вполне приводимым), если оно эквивалентно представлению $D'(a)$, такому, что $D'_{\rho\sigma}(a)=0$ равномерно (по $a$), если $\rho\leqq t$, $\sigma>t$ ($\rho\leqq t$, $\sigma>t$ или $\rho>t$, $\sigma\leqq t$)*[8] *при фиксированном значении $t$, $1\leqq t\leqq\leqq s-1$. Представления, не обладающие этими свойствами, являются неприводимыми (вполне неприводимыми).*

Для конечных групп $\mathfrak{G}$ Фробениус и Шур дали полную теорию всех представлений [21, 22]. Для непрерывных групп $\mathfrak{G}$ близкие результаты были получены Шуром для группы вращений трехмерного пространства и значительно более общие — Вейлем для всех компактных групп Ли [30]. Эти результаты были обобщены Хааром [11, с. 166—169] на все компактные группы. Мы разовьем это обобщение дальше, для всех групп $\mathfrak{G}$, но для этого естественно и необходимо ограничить область представления $\mathfrak{G}$ с помощью следующего утверждения.

Теорема 19. *Следующие условия на представление $D(a)$ группы $\mathfrak{G}$ эквивалентны друг другу.*

A. $D(a)$ эквивалентно унитарному[9] представлению.

B. Все элементы $D_{\rho\sigma}(a)$ представления $D(a)$ ограничены.

C. Все элементы $D_{\rho\sigma}(a)$ представления $D(a)$ п. п.

Если $D'(a)$ унитарно, то согласно примечанию 9 имеем при $\rho=\sigma$

$$\sum_{\tau=1}^{s}|D'_{\rho\tau}(a)|^2=1,\qquad |D'_{\rho\tau}(a)|\leqq 1,$$

т. е. все $D'_{\rho\sigma}(a)$ ограничены. Поэтому элементы $D_{\rho\tau}(a)$ всех $\Gamma(a)$, эквивалентных $D'(a)$, тоже ограничены. Итак, из A следует B.

Если все $D_{\rho\sigma}(a)$ ограничены, то любая последовательность $D_{\rho\sigma}(a_n)$, $n=1$, $2,\ldots$, содержит подпоследовательность, сходящуюся при всех $\rho$, $\sigma=1,\ldots,s$. И тогда поскольку $D(xa_n)=D(x)D(a_n)$ и $D(a_nx)=D(a_n)D(x)$, то представления $D(xa_n)$ и $D(a_nx)$, а следовательно, все $D_{\rho\sigma}(xa_n)$ и $D_{\sigma\sigma}(a_nx)$ равномерно сходятся. Итак, все $D_{\rho\sigma}(a)$ п. п., т. е. из B вытекает C.

Если все $D_{\rho\sigma}(a)$ п. п., то и все $\sum_{\tau=1}^{s}D_{\rho\tau}(a)\overline{D_{\sigma\tau}}(a)$ п. п. и мы можем рассмотреть

$$A_{\rho\sigma}=M_x\left[\sum_{\tau=1}^{s}D_{\rho\tau}(x)\overline{D_{\sigma\tau}}(x)\right].$$

Так как

$$\sum_{\tau=1}^{s}D_{\rho\tau}(a)\overline{D_{\sigma\tau}}(a)=\overline{\sum_{\tau=1}^{s}D_{\sigma\tau}(a)\overline{D_{\rho\tau}(a)}}$$

---

[8] Это основные понятия теории представлений групп Фробениуса—Шура [21, 22, 30].

[9] То есть представлению $D'(a)$, в котором все матрицы $D'(a)=\{D'_{\rho\sigma}(a)\}$ ($\rho$, $\sigma=1,\ldots,s$) унитарны. Матрица $U^*=\{U_{\rho\sigma}\}$ называется унитарной, если сопряженная ей матрица $U^*==\{\bar U_{\sigma\rho}\}$ обратна ей, т. е. если $UU^*=U^*U=1_s$, или более явно

$$\sum_{\tau=1}^{s}U_{\rho\tau}\bar U_{\sigma\tau}\quad \sum_{\tau=1}^{s}U_{\tau\rho}\bar U_{\tau\sigma}=\delta_{\rho\sigma}=\begin{cases}1, & \rho=\sigma,\\ 0, & \rho\neq\sigma.\end{cases}$$

и для любой, не состоящей из одних нулей, системы $\xi_1, \dots, \xi_s$

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{s}\left[\sum_{\tau=1}^{s} D_{\rho\tau}(a)\overline{D_{\sigma\tau}(a)}\right]\xi_\rho\bar{\xi}_\sigma = \sum_{\tau=1}^{s}\left|\sum_{\rho=1}^{s} D_{\rho\tau}(a)\xi_\rho\right|^2 > 0,$$

то $A_{\rho\sigma} = \bar{A}_{\sigma\rho}$ и $\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} A_{\rho\sigma}\xi_\rho\bar{\xi}_\sigma > 0$. Поэтому матрица $A = \{A_{\rho\sigma}\}$ эрмитова и положительно определена. Следовательно, существует матрица $X = \{x_{\rho\sigma}\}$, такая, что $A = XX^*$. С другой стороны,

$$A_{\rho\sigma} = M_x\left[\sum_{\tau=1}^{s} D_{\rho\tau}(x)\overline{D_{\sigma\tau}(x)}\right] =$$

$$= M_x\left[\sum_{\tau=1}^{s} D_{\rho\tau}(ax)\overline{D_{\sigma\tau}(ax)}\right] =$$

$$= M_x\left[\sum_{\rho',\sigma'=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{s} D_{\rho\rho'}(a)D_{\rho'\tau}(x)\overline{D_{\sigma\sigma'}(a)}\,\overline{D_{\sigma'\tau}(x)}\right] =$$

$$= \sum_{\rho',\sigma'=1}^{s} D_{\rho\rho'}(a)\overline{D_{\sigma\sigma'}(a)}M_x\left[\sum_{\tau=1}^{s} D_{\rho'\tau}(x)\overline{D_{\sigma'\tau}(x)}\right] =$$

$$= \sum_{\rho',\sigma'=1}^{s} D_{\rho\rho'}(a)\overline{D_{\sigma\sigma'}(a)}A_{\rho'\sigma'},$$

т. е. $A = D(a)AD(a)^*$ или $XX^* = D(a)XX^*D(a)^*$, $X^{-1}D(a)XX^*D(a)^*X^{*-1} = 1$, $(X^{-1}D(a)X)(X^{-1}D(a)X)^* = 1$. Другими словами, эквивалентное представление $X^{-1}D(a)X = D'(a)$ унитарно. Таким образом, A следует из C.

Взятые вместе все три наших утверждения доказывают эквивалентность A, B и C.

Определение 10. *Мы назовем нормальными представления, удовлетворяющие одному из эквивалентных условий теоремы* 19.

**11.** Теперь фундаментальные теоремы теории ортогональных представлений могут быть доказаны классическим способом [21, 22, 30, 32].

Теорема 20. *Пусть $D(a)$ и $E(a)$ — вполне неприводимые нормальные представления порядков $s$ и $t$ соответственно и пусть $A$ — прямоугольная матрица с $s$ строками и $t$ столбцами. Если $D(a)A \equiv A\,E(a)$ для любого $a$, то либо $A = 0$, либо $s = t$ и* $\det A \neq 0$. *Последняя альтернатива, разумеется, приводит к эквивалентности $D(a)$ и $E(a)$. Если $D(a) = E(a)$, то $A = \alpha 1$ ($\alpha$ — комплексное число*).

Во всех этих утверждениях (кроме последнего) $D(a)$ и $E(a)$ могут быть заменены двумя эквивалентными им представлениями. Поэтому мы можем предположить с самого начала, что они унитарны. Возможны даже последующие их преобразования с помощью унитарных матриц $X$ и $Y$. Они переводят $A$ в $A' = X^{-1}AY$. С помощью подобных преобразований мы можем получить $A' = \{A'_{\rho\sigma}\}$, $\rho = 1, \dots, s$; $\sigma = 1, \dots, t$, так что

$$A'_{\rho\sigma} = \begin{cases} C_P & \text{при } \rho = \sigma = 1, \dots, r, \text{ все } C_P > 0, \\ 0 & \text{при всех остальных } \rho \text{ и } \sigma, \end{cases}$$

где $r$ — ранг $A'$ и $r \leqq s$, $r \leqq t$. Поэтому мы можем предположить, что само $A$ представлено в такой форме.

При этих условиях из соотношения $D(a)A = AE(a)$ вытекает, что $D_{\rho\sigma}(a) = 0$ при $\rho > r$ и $\sigma \leqq r$ и что $E_{\rho\sigma}(a) = 0$ при $\rho \leqq r$ и $\sigma > r$. Так как $A^*$ тоже име-

ет такой вид, который мы предположили для $A$, то $D(a)^* = D(a)^{-1} = D(a^{-1})$, $E(a)^* = E(a)^{-1} = E(a^{-1})$. Применяя * и заменяя $a$ на $a^{-1}$, получаем $A^*D(a) = E(a)A^*$, так что $D_{\rho\sigma}(a) = 0$ при $\rho \leqq r$ и $\sigma > r$ и $E_{\rho\sigma}(a) = 0$ при $\rho \leqq r$ и $\sigma \leqq r$. Поэтому если $D(a)$ вполне неприводимо, то $r$ равно 0 или $s$, а если $E(a)$ вполне неприводимо, то $r$ равно 0 или $t$. Следовательно, либо $r = 0$ и в таком случае $A = 0$, либо $r = s = t$ и в этом случае $\det A \neq 0$.

Если $D(a) = E(a)$, то любая матрица $A - \alpha 1$ обладает тем же свойством, что и А. Если $\alpha$ — корень характеристического уравнения для $A$, т. е. $\det [A - \alpha 1] = 0$, то из нашей альтернативы вытекает, что $A - \alpha 1 = 0$ и $A = \alpha 1$.

Теорема 21. *Пусть $D(a)$ и $E(a)$ — вполне неприводимые нормальные представления порядков $s$ и $t$ соответственно. Если они неэквивалентны, то $D_{\rho\sigma} \times E_{\tau\nu}(x) \equiv 0$.*

Рассматривая одно $D(a)$, имеем

$$D_{\rho\sigma} \times D_{\tau\nu}(x) \equiv \begin{cases} (1/s) D_{\rho\nu}(x) & \text{при } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{при } \sigma \neq \tau. \end{cases}$$

Зафиксировав $\rho$, $\nu$ и $x$, построим (прямоугольную) матрицу

$$A = \{A_{\tau\sigma}\}, \quad A_{\tau\sigma} = D_{\rho\sigma} \times E_{\tau\nu}(x).$$

Тогда

$$\sum_{\tau'=1}^{t} E_{\tau\tau'}(a) A_{\tau'\sigma} = M_y \left[\sum_{\tau'=1}^{t} D_{\rho\sigma}(xy^{-1}) E_{\tau\tau'}(a) E_{\tau'\nu}(y)\right] =$$
$$= M_y [D_{\rho\sigma}(xy^{-1}) E_{\tau\nu}(ay)] = M_z [D_{\rho\sigma}(z) E_{\tau\nu}(az^{-1}x)],$$
$$\sum_{\sigma'=1}^{s} A_{\tau\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(a) = M_y \left[\sum_{\sigma'=1}^{s} D_{\rho\sigma'}(y) D_{\sigma'\sigma}(a) E_{\tau\nu}(y^{-1}x)\right] =$$
$$= M_y [D_{\rho\sigma}(ya) E_{\tau\nu}(y^{-1}x)] = M_z [D_{\rho\sigma}(z) E_{\tau\nu}(az^{-1}x)]$$

(переменная $y$ заменена соответственно на $z = xy^{-1}$ и $z = ya$) и поэтому $E(a) A = AD(a)$.

Таким образом, мы можем применить теорему 20. Если $D(a)$ и $E(a)$ неэквивалентны, то получаем, что $A = 0$, а если $D(a) = E(a)$, то $A = \alpha_{\rho\nu}(x) 1_s$ ($\alpha_{\rho\nu}(x)$ — комплексное число). Отсюда вытекает: 1) что $A_{\tau\sigma} = 0$, т. е. $D_{\rho\sigma} \times E_{\tau\nu}(x) = 0$, если $D(a)$ и $E(a)$ неэквивалентны или если $D(a) = E(a)$ и $\sigma \neq \tau$;

2) что $A_{\tau\sigma} = \alpha_{\rho\nu}(x)$, которое не зависит от $\sigma$, если $D(a) = E(a)$ и $\sigma = \tau$. Следовательно, все утверждения нашей теоремы будут доказаны, если мы покажем, что $\alpha_{\rho\nu}(x) = (1/s) D_{\rho\nu}(x)$. Это сразу вытекает из

$$s\alpha_{\rho\nu}(x) = \sum_{\sigma=1}^{s} A_{\sigma\sigma} = M_y \left[\sum_{\sigma=1}^{s} D_{\rho\sigma}(xy^{-1}) D_{\sigma\nu}(y)\right] =$$
$$= M_y D_{\rho\nu}(xy^{-1}y) = M_y D_{\rho\nu}(x) = D_{\rho\nu}(x).$$

Теорема 22. *Для нормальных представлений приводимость эквивалентна полной приводимости. Поэтому эквивалентны и неприводимость и полная неприводимость.*

Очевидно, что полная приводимость влечет приводимость. Предположим теперь, что $D(a)$ приводимо, но не вполне приводимо. Так как мы можем заменить

$D(a)$ эквивалентным представлением, то можно предположить, что $D(a)$ имеет вид, описанный в определении 9. Тогда существует пара индексов $\rho$ и $\sigma$, таких, что $D_{\rho\sigma}(x) \equiv 0$. Согласно теореме 21 из этого соотношения вытекает, что $D_{\rho\sigma} \times D_{\sigma\rho} \equiv D_{\rho\rho} \equiv 0$, в то время как $D_{\rho\rho}(1) = 1$. Поэтому $D(a)$ должно быть вполне приводимым.

12. Следующая наша задача — выяснить связь между единицами из определения 8 и представлениями. Эта связь проясняется с помощью следующего утверждения.

Теорема 23. *Для любой единицы $\varphi(x)$ существует некоторое число неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $D^{(1)}(a), \dots, D^{(u)}(a)$ порядков $s_1, \dots, s_u$ соответственно, так что*

$$\varphi(x) = \sum_{\omega=1}^{u} s_\omega \sum_{\rho,\sigma=1}^{s_\omega} \alpha_{\rho\sigma}^{(\omega)} D_{\rho\sigma}^{(\omega)}(x).$$

*Здесь все матрицы $\alpha^{(\omega)} = \{\alpha_{\rho\sigma}^{(\omega)}\}$ идемпотентны, т. е. $\alpha^{(\omega)*} = \alpha^{(\omega)}$ (см. примеч. 5) $(\alpha^{(\omega)})^2 = \alpha^{(\omega)}$*[10]*. Обратно, каждая $\varphi(x)$, полученная таким образом ($D^{(\omega)}(a)$ и $\alpha^{(\omega)}$ удовлетворяют нашим условиям), является единицей.*

*С помощью подходящего выбора $D^{(\omega)}(a)$ можно привести матрицы $\alpha^{(\omega)}$ к виду*

$$\alpha_{\rho\sigma}^{(\omega)} = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho = \sigma \leqq s'_\omega, \quad \text{где } s'_\omega = 1, \dots, s_\omega, \\ 0 & \text{при всех остальных } \rho \text{ и } \sigma. \end{cases}$$

Рассмотрим (п.п.) решения $f(x)$ уравнения $\varphi \times f = f$. Предположим, что можно найти среди них $s$ решений $g_1, \dots, g_s$, удовлетворяющих условиям

$$g_\mu \times g'_\nu(1) = M_x[g_\mu(x)\overline{g_\nu(x)}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu = \nu, \\ 0 & \text{при } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Положим $\psi(x, y) = \varphi(xy^{-1}) - \sum_{\mu=1}^{s} g_\mu(x)\overline{g_\mu(y)}$. Тогда

$$M_{x,y}[|\psi(x, y)|^2] = M_{x,y}[|\varphi(xy^{-1})|^2] - \sum_{\mu=1}^{s} M_{x,y}[\varphi(xy^{-1})\overline{g_\mu(x)}g_\mu(y)] -$$
$$- \sum_{\mu=1}^{s} M_{x,y}\overline{[\varphi(xy^{-1})} g_\mu(x)\overline{g_\mu(y)}] + \sum_{\mu,\nu=1}^{s} M_{x,y}[g_\mu(x)\overline{g_\mu(y)}\,\overline{g_\nu(x)}g_\nu(y)].$$

Согласно теоремам 9 и 10, свойству ортогональности и соотношениям $\varphi \times g_\mu = g_\mu$, $g'_\mu \times \varphi = g'_\mu$ это выражение равно $M_x[|\varphi(x)|^2] - s - s + s = (N\varphi)^2 - s$.

Отсюда имеем $(N\varphi)^2 - s \geqq 0$, так что $s \leqq (N\varphi)^2$. Поэтому возможные значения $s$ ограничены и среди них существует максимальное. Предположим, что $s$ есть это максимальное значение, и возьмем соответствующие $g_1, \dots, g_s$. Если решение $f(x)$ уравнения $\varphi \times f = f$ таково, что $f \times g_\mu = 0$ при всех $\mu = 1, \dots, s$, то обязательно $f \equiv 0$. В противном случае мы можем положить $g_{s+1} = f/(Nf)$. Тогда $Ng_{s+1} = 1$, т. е. $g'_{s+1} \times g_{s+1}(1) = 1$ и $g'_{s+1} \times g_\mu(1) = 0$ и также $g_\mu \times g'_{s+1}(1) = 0$

[10] То есть $\alpha_{\rho\sigma}^{(\omega)} = \overline{\alpha_{\sigma\rho}^{(\omega)}}$, $\sum_{\sigma=1}^{s_\omega} \alpha_{\rho\sigma}^{(\omega)}\alpha_{\sigma\tau}^{(\omega)} = \alpha_{\rho\tau}^{(\omega)}$.

при $\mu = 1, \dots, s$, так что

$$g_\mu \times g_\nu(1) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mu = \nu, \\ 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

где $\mu, \nu = 1, \dots, s+1$. Последнее соотношение противоречит нашему предположению о том, что $s$ максимально.

Если мы определим $f(x)$ как $\overline{\psi(x, a)}$, то с помощью простых вычислений получим $\varphi \times f = f$ и $f \times g_\mu(1) = 0$. Поэтому $f(x) \equiv 0$, $\psi(x, a) \equiv 0$ и, так как $a$ был выбран произвольно, $\psi(x, y) \equiv 0$, т. е.

$$\varphi(xy^{-1}) = \sum_{\mu=1}^{s} g_\mu(x)\overline{g_\mu(y)}. \qquad (\#)$$

Так как из (#) следует, что

$$\varphi \times f(x) = M_y[\varphi(xy^{-1}) f(y)] = \sum_{\mu=1}^{s} M_y[\overline{g_\mu(y)} f(y)]\, g_\mu(x),$$

то любое решение уравнения $\varphi \times f = f$ имеет вид $\sum_{\mu=1}^{s} \alpha_\mu g_\mu$ ($\alpha_\mu$ — комплексные числа). Очевидно, что если $f(x)$ — решение, то и $f(xa)$ — решение. Поэтому $g_\mu(xa)$ является решением, и мы можем написать

$$g_\sigma(xa) = \sum_{\rho=1}^{s} D_{\rho\sigma}(a)\, g_\rho(x).$$

С помощью свойств ортогональности $g_\mu$ коэффициенты $D_{\rho\sigma}(a)$ однозначно определяются:

$$D_{\rho\sigma}(a) = M_x[g_\sigma(xa)\overline{g_\rho(x)}] = g'_\rho \times g_\sigma(a).$$

Следовательно, $D(1) = 1_S$, и если мы положим $D(a) = \{D_{\rho\sigma}(a)\}$, $\rho, \sigma = 1, \dots, s$, то, очевидно, получим $D(ab) = D(a)D(b)$, т. е. $D(a)$ есть представление. Так как (#) имеет место, если мы заменим $x$ и $y$ на $xa$ и $ya$, т. е. $g_\mu(x)$ и $g_\mu(y)$ на $g_\mu(xa)$ и $g_\mu(ya)$, то преобразования $D(a)$ унитарны.

Из доказанного выше вытекает, что

$$\varphi(x) = \sum_{\sigma=1}^{s} g_\sigma(x)\overline{g_\sigma(1)} = \sum_{\rho,\sigma=1}^{s} D_{\rho\sigma}(x)\, g_\rho(1)\,\overline{g_\sigma(1)},$$

т. е. $\varphi(x)$ является линейной комбинацией всех $D_{\rho\sigma}(x)$. Теперь (см. теорему 22) $D(a)$ может быть преобразовано в эквивалентное ему $D'(a)$, состоящее из конечного числа неприводимых представлений $D^{(1)}(a), \dots, D^{(\nu)}(a)$ (порядков $s_1, \dots, s_\nu$ соответственно, где $s_1 + \dots + s_\nu = s$), которые стоят одно за другим на главной диагонали, а на всех остальных местах стоят нули. Поэтому $\varphi(x)$ тоже есть линейная комбинация элементов $D_{\rho\sigma}(x)$, т. е. элементов $D_{\rho\sigma}^{(\omega)}(x)$. Далее, если некоторое представление $D^{(\omega)}(x)$ эквивалентно другому представлению $D^{(\pi)}(x)$, то элементы $D_{\rho\sigma}^{(\omega)}(x)$ являются линейными комбинациями элементов $D^{(\pi)}(x)$. Поэтому в выражении $\varphi(x)$ как линейной комбинации всех элементов $D_{\rho\sigma}^{(\omega)}(x)$ достаточно оставить только по одному представителю из каждого класса эквивалентных представлений $D^{(\omega)}(x)$. Эти оставленные представления обозначим через

$D^{(1)}(x), \ldots, D^{(u)}(x)$, $u \leqq \nu$. Итак, окончательно получим, что $D^{(1)}(a), \ldots, D^{(u)}(a)$ (соответственно порядков $s_1, \ldots, s_u$) представляют собой совокупность неэквивалентных неприводимых унитарных представлений, а $\varphi(x)$ — линейную комбинацию элементов $D^{(\omega)}_{\rho\sigma}(x)$, т. е. мы можем написать $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\omega=1}^{u} s_\omega \sum_{\rho,\sigma=1}^{s_\omega} \alpha^{(\omega)}_{\rho\sigma} D^{(\omega)}_{\rho\sigma}(x).$$

Если мы теперь подставим это выражение в уравнения $\varphi' = \varphi$ и $\varphi \times \varphi = \varphi$ и примем во внимание, что

$$(D^{(\omega)}(x))^* = (D^{(\omega)}(x))^{-1} = D^{(\omega)}(x^{-1}),$$

$$\overline{D^{(\omega)}_{\sigma\rho}}(x) = D^{(\omega)}_{\rho\sigma}(x^{-1}), \qquad \overline{D^{(\omega)}_{\rho\sigma}}(x^{-1}) = D^{(\omega)}_{\sigma\rho}(x),$$

т. е. $D^{(\omega)\prime}_{\sigma\rho}(x) = D^{(\omega)}_{\sigma\rho}(x)$ и

$$D^{(\omega)}_{\rho\sigma} \times D^{(\chi)}_{\tau\nu} = \begin{cases} (1/s_\omega) D^{(\omega)}_{\rho\nu}, & \text{если } \omega = \chi \text{ и } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{при всех других } \omega, \chi, \rho, \sigma, \tau, \nu, \end{cases}$$

то получим в точности утверждение нашей теоремы. Кроме того, очевидно, что любая матрица $\alpha^{(\omega)} = \{\alpha^{(\omega)}_{\rho\sigma}\}$ будучи идемпотентной может быть представлена в виде, указанном в конце формулировки этой теоремы. При этом обратные преобразования представлений $D^{(\omega)}(x)$, которые переводят их в эквивалентные представления, осуществляются как раз такими $\alpha^{(\omega)}$-преобразованиями.

**13.** Мы выберем систему «представителей» для неэквивалентных неприводимых (нормальных или ортогональных) представлений $\mathfrak{G}$.

Определение 11. *Пусть $I$ — множество всех неприводимых нормальных представлений $\mathfrak{G}$. Любое подмножество $\mathfrak{C}$ в $I$, состоящее из всех элементов $I$, эквивалентных одному из элементов $\mathfrak{C}$, назовем классом. Обозначим множество всех классов через $C$. Любой элемент $\mathfrak{C}$ из $C$ содержит унитарные представления (так как любое нормальное представление эквивалентно унитарному представлению). Выберем по одному унитарному представлению из каждого $\mathfrak{C}$ в $C$ и назовем его представителем $\mathfrak{C}$. Обозначим его через $D(a, \mathfrak{C})$*[11]*, а его порядок через $s(\mathfrak{C})$.*

Теорема 24. *П. п. функции $D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})$, где $\mathfrak{C} \in C$, $\rho$ и $\sigma = 1, \ldots, s(\mathfrak{C})$, обладают тем свойством, что*

$$D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}) \times D_{\tau\nu}(\mathfrak{D}) = \begin{cases} (1/s(\mathfrak{C}))\, D_{\rho\nu}(\mathfrak{C}) & \text{при } \mathfrak{C} = \mathfrak{D} \text{ и } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{при любых других } \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \rho, \sigma, \tau, \nu. \end{cases}$$

*Отсюда вытекает, что*

$$M_x[D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C}) \overline{D_{\nu\tau}(x; \mathfrak{D})}] = \begin{cases} 1/s(\mathfrak{C}) & \text{при } \mathfrak{C} = \mathfrak{D}, \rho = \nu, \sigma = \tau, \\ 0 & \text{при любых других } \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \rho, \sigma, \tau, \nu. \end{cases}$$

[11] При этом не подразумевается, что существенно используется «аксиома выбора», так как в большинстве случаев возможно охарактеризовать $D(a; \mathfrak{C})$ в $\mathfrak{C}$ единственным способом. Поэтому для краткости будем использовать обозначение $D(\mathfrak{C})$, опуская аргумент $a$.

Первая формула была доказана в теореме 21. Вторая формула вытекает из первой, если мы положим переменную равной 1 и используем равенства $D_{r\nu}(\mathfrak{D}) = \overline{D_{\nu r}(\mathfrak{D})}$, $D(1, \mathfrak{D}) = 1$.

Таким образом, функции $s(\mathfrak{C})^{1/2} D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})$ образуют ортонормированную систему. Это представляет собой основу для формулирования обычных теорем разложения. Ключевыми теоремами теории являются доказываемые ниже теоремы 28 и 29.

Определение 12. *Если $f(x)$ — п.п. функция, то комплексные числа*

$$\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}) = f \times D_{\rho\sigma}(1; \mathfrak{C})' = M_x [f(x) \overline{D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})}]$$

*называются коэффициентами ее разложения. Матрицы $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) = \{\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})\}$ называются матрицами разложения.*

Теорема 25. *Если $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C})$ и $\tilde{\beta}(\mathfrak{C})$ ($\mathfrak{C}$ пробегает все $C$) — матрицы разложения $f$ и $g$, то $f \pm g$, $\theta f$ ($\theta$ — любое комплексное число), $f'$ и $f \times g$ имеют матрицы разложения, равные соответственно $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) \pm \tilde{\beta}(\mathfrak{C})$, $\theta\tilde{\alpha}(\mathfrak{C})$, $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C})^*$ и $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C})\tilde{\beta}(\mathfrak{C})$. Единица $\varphi$ характеризуется тем, что все матрицы разложения идемпотентны, так что только конечное число из них может быть не равно нулю.*

Утверждения, касающиеся $f \pm g$ и $\theta f$, очевидны. Относительно $f'$ достаточно отметить, что

$$M_x [f'(x) \overline{D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})}] = M_x [\overline{f(x^{-1})} D_{\rho\sigma}(x^{-1}; \mathfrak{C})'] = M_x [\overline{f(x)} D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})'] =$$

$$= \overline{M_x [f(x) \overline{D_{\sigma\rho}(x; \mathfrak{C})}]} = \overline{\tilde{\alpha}_{\sigma\rho}(\mathfrak{C})}.$$

Следующее вычисление доказывает наше утверждение, касающееся $f \times g$ (см. теоремы 7 и 8):

$$M_x [f \times g(x) \overline{D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})}] = M_{x,y} [f(y) g(y^{-1}x) \overline{D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})}] =$$

$$= M_{y,z} [f(y) g(z) \overline{D_{\rho\sigma}(y, z; \mathfrak{C})}] = \sum_{r=1}^{s(\mathfrak{C})} M_{y,z} [f(y) g(z) \overline{D_{\rho\tau}(y; \mathfrak{C})}\, \overline{D_{\tau\sigma}(z; \mathfrak{C})}] =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{s(\mathfrak{C})} M_y [f(y) \overline{D_{\rho\tau}(y; \mathfrak{C})}] M_z [g(z) \overline{D_{\tau\sigma}(z; \mathfrak{C})}] = \sum_{\tau=1}^{s(\mathfrak{C})} \tilde{\alpha}_{\rho\tau}(\mathfrak{C}) \tilde{\beta}_{\tau\sigma}(\mathfrak{C}).$$

Из этого рассмотрения вытекает, что для единицы $\varphi$ все матрицы разложения $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C})$ идемпотентны. Но из теоремы 21 следует, что все такие матрицы, для которых $D(a; \mathfrak{C})$ не совпадает с $D^{(\omega)}(a)$ при некотором $\omega = 1, \dots, u$, нулевые, так что только конечное число матриц $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C})$ отлично от нулевых матриц. (Мы используем при этом тот факт, что если две функции обладают одними и теми же матрицами разложения, то они совпадают. Таким образом, если все матрицы разложения функции $f$ нулевые, то $f(x) \equiv 0$. Это следует из теоремы

28 (доказательство которой не использует теорему 25), если положить в ней $f(x) \equiv g(x)$.)

Теорема 26. *Если* $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) = \{\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})\}$ — *матрицы разложения* $f$ *и если* $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ — *элементы* $C$, *то среди всех линейных комбинаций* $g$ *элементов* $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)$, $\omega = 1, \ldots, n$; $\rho, \sigma = 1, \ldots, s(\mathfrak{C}_\omega)$, *имеющих вид*

$$g(x) = \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} \alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C}_\omega),$$

*матрица, которая минимизирует выражение* $(N[f-g])^2$, *характеризуется тем свойством, что* $\alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) = \tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)$. *При этом соответствующее минимальное значение равно*

$$(Nf)^2 - \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)|^2.$$

Доказательство проводится с помощью хорошо известного вычисления

$$(N[f-g])^2 = M_x[|f(x) - g(x)|]^2 =$$
$$= M_x[|f(x)|^2] - M_x[f(x)\overline{g(x)}] - M_x[\overline{f(x)}g(x)] + M_x[|g(x)|^2] =$$
$$= (Nf)^2 - \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{\overline{s(\mathfrak{C}_\omega)}} \alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) M_x[\overline{f(x)}D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C}_\omega)] -$$
$$- \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} \alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) M_x[\overline{f(x)}D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C}_\omega)] +$$
$$+ \sum_{\omega,\chi=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) s(\mathfrak{C}_\chi) \sum_{\rho,\sigma=1}^{\overline{s(\mathfrak{C}_\omega)}} \sum_{\tau,\nu=1}^{s(\mathfrak{C}_\chi)} \alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) \alpha_{\tau\nu}\overline{(\mathfrak{C}_\chi)} \times$$
$$\times M_x[D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C}_\omega)\overline{D_{\tau\nu}(x; \mathfrak{C}_\chi)}] = (Nf)^2 - \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} \tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) \times$$
$$\times \overline{\alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)} - \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} \overline{\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)}\, \alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) +$$
$$+ \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{\overline{s(\mathfrak{C}_\omega)}} |\alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)|^2 =$$
$$= \left\{(Nf)^2 - \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)|^2\right\} +$$
$$+ \sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} |\alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega) - \tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)|^2.$$

Теорема 27 (неравенство Бесселя). *Если* $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) = \{\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})\}$ — *матрицы разложения* $f$, *то число таких* $\mathfrak{C}$, *для которых* $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) \neq 0$, *не более чем счетно, т. е. и можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ *Далее, имеет место неравенство*

$$(Nf)^2 \geqq \sum_{\omega} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)|^2.$$

*Так как $\alpha_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}) = 0$ для всех остальных $\mathfrak{C}$, то вместо последнего неравенства можно написать*

$$(Nf)^2 \geqq \sum_{\mathfrak{C}} s(\mathfrak{C}) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C})} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})|^2.$$

Число таких $\mathfrak{C}$, для которых

$$s(\mathfrak{C}) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C})} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})|^2 \geqq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

согласно последнему утверждению теоремы 26, конечно и не превосходит $(Nf)^2/\varepsilon$. Полагая последовательно $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, получаем, что, за исключением не более чем счетного числа $\mathfrak{C}$, имеет место равенство

$$s(\mathfrak{C}) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C})} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})|^2 = 0,$$

т. е. $\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}) = 0$. Это доказывает первое утверждение нашей теоремы.

Из последнего утверждения теоремы 26 вытекает, что при любом $n$

$$\sum_{\omega=1}^{n} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)|^2 \leqq (Nf)^2.$$

Следовательно, сумма $\sum_{\omega} s(\mathfrak{C}_\omega) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C}_\omega)} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}_\omega)|^2$ сходится (если число членов бесконечно) и $\leqq (Nf)^2$.

Теорема 28 (равенство Парсеваля). *Если $f$ и $g$ имеют матрицы разложения соответственно $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) = \{\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})\}$ и $\tilde{\beta}(\mathfrak{C}) = \{\tilde{\beta}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})\}$, то*

$$M_x[f(x)\overline{g(x)}] = \sum_{\mathfrak{C}} s(\mathfrak{C}) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C})} \tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}) \overline{\tilde{\beta}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})},$$

*где $\sum_{\mathfrak{C}}$ содержит не более счетного числа членов, не равных нулю, и абсолютно сходится (если она, вообще, бесконечна).*

Если это уже доказано для $f = g$, то мы получаем наше утверждение для действительной части, заменив $f$ на $(f+g)/2$ и $(f-g)/2$ и взяв разность полученных выражений. Заменяя $f$ и $g$ на $if$ и $g$, получаем то же для мнимых частей, что завершает доказательство. Следовательно, мы можем предположить, что $f = g$, т. е. нам нужно показать, что

$$(Nf)^2 - \sum_{\mathfrak{C}} s(\mathfrak{C}) \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\mathfrak{C})} |\tilde{\alpha}_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})|^2 = 0.$$

Если мы возьмем в теореме 26 все конечные подмножества в $C$ из $\mathfrak{C}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{C}_n$, то получим, что левая часть предыдущего уравнения есть наибольшая нижняя грань всех $(N[f-g])^2$, где $g$— произвольная линейная комбинация любого конечного числа элементов $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$. Следовательно, нам нужно показать только, что ее можно сделать $\leqq \varepsilon^2$ при любом $\varepsilon > 0$. Это достигается, если выбрать единицу $\varphi(x)$ согласно теореме 16, так как $\varphi \times f$ есть линейная комбинация конечного числа элементов $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$. Согласно теореме 23 достаточно доказать это

только для элементов $D_{\tau\nu}(\mathfrak{D}) \times f$. Последнее вытекает из

$$D_{\tau\nu}(\mathfrak{D}) \times f(x) = M_y[D_{\tau\nu}(xy^{-1}; \mathfrak{D}) f(y)] =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{s(\mathfrak{D})} M_y[D_{\tau\lambda}(x; \mathfrak{D}) D_{\lambda\nu}(y^{-1}; \mathfrak{D}) f(y)] =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{s(\mathfrak{D})} M_y[D_{\lambda\nu}(y^{-1}; \mathfrak{D}) f(y)] D_{\tau\lambda}(x; \mathfrak{D}).$$

Теорема 29 (аппроксимационная теорема). *Для любой п.п. функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $h(x)$ конечного числа элементов $D_{\rho\sigma}(x; \mathfrak{C})$ (при этом можно ограничиться такими элементами, для которых матрица разложения $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C})$ функции $f \neq 0$), такая, что $|f(x) - h(x)| \leqq \varepsilon$ при всех $x$.*

Согласно теореме 18 мы можем положить $h = \varphi \times f \times g$, так что нам нужно доказать только, что $\varphi \times f \times g$ есть линейная комбинация требуемого вида. В соответствии с теоремой 23 мы можем рассмотреть $D_{\tau\nu}(\mathfrak{D}) \times f \times g$. Последняя формула предыдущего доказательства показывает, что это есть линейная комбинация конечного числа элементов $D_{\tau\lambda}(\mathfrak{D})$. Эта формула дает для коэффициента при $D_{\tau\lambda}(\mathfrak{D})$ в выражении для $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{D}) \times f \times g$ (при замене $f$ на $f \times g$) следующее:

$$M_y[D_{\lambda\nu}(y^{-1}; \mathfrak{D}) f \times g(y)] = M_y[D_{\lambda\nu}(y; \mathfrak{D})' f \times g(y)] =$$
$$= M_y[f \times g(y) \overline{D_{\nu\lambda}(y; \mathfrak{D})}].$$

Таким образом, это есть коэффициент при $D_{\nu\lambda}(\mathfrak{D})$ в разложении $f \times g$ и он эквивалентен нулю, если матрица при $D_{\nu\lambda}(\mathfrak{D})$ в разложении $f$ — нулевая (см. утверждение теоремы 25, касающееся $f \times g$).

Теорема 30. *Любая п. п. функция есть предел равномерно сходящейся последовательности функций, каждая из которых является линейной комбинацией конечного числа элементов $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$ и обратно.*

Это утверждение вытекает из теоремы 29, если положить последовательно $\varepsilon = 1$, $1/2$, $1/3$, ... Обратное утверждение есть следствие того, что все элементы $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$ п. п.

## Часть IV

## ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТЬ И ЗАМКНУТЫЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

**14** Части I—III содержат достаточно полную теорию п. п. функций на произвольной группе $\mathfrak{G}$, совершенно не зависящую от обычно используемого ограничения непрерывности. Теперь мы введем ограничения такого типа, но более общим способом с помощью рассмотрения некоторых семейств функций.

Определение 13. *Множество $S$ функций $f(x)$ (комплекснозначных, определенных на $\mathfrak{G}$) называется замкнутым семейством (з. с.), если оно обладает следующими свойствами:*

1) *если $f(x)$ принадлежит $S$, то все $f(xa)$ принадлежат $S$;*

2) *если $f(x)$ принадлежит $S$, то все $f(ax)$ принадлежат $S$;*

3) *если $f(x)$ принадлежит $S$, то все $\alpha f(x)$ принадлежат $S$;*

4) *если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $S$, то и $f(x) \pm g(x)$ принадлежат $S$;*

5) *если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... принадлежат $S$ и $f_n(x)$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $n \to \infty$, то и $f(x)$ принадлежит $S$.*

Теорема 31. *Если $S$ является з. с. и содержит либо $f$, либо $g$, то оно содержит и $f \times g$; если $D(a) = \{D_{\rho\sigma}(a)\}$ — неприводимое нормальное представление, то $S$ содержит все $D_{\rho\sigma}$, если оно содержит один $D_{\rho\sigma}$. Если дано семейство представительных неприводимых нормальных представлений $D(a; \mathfrak{C})$ (см. определение 11) и $S$ содержит $f$, то $S$ содержит все элементы $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$ для любого $D(\mathfrak{C})$, матрица разложения которого $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) \neq 0$ (см. определение 12).*

Поэтому теоремы 28 (равенство Парсеваля), 29 (аппроксимационная теорема) и 30 остаются справедливыми, если рассматривать функции из $S$.

Если $f$ принадлежит $S$, то согласно замечанию, сделанному после определения 6, $f \times g$ тоже принадлежат $S$. Случай, когда $g$ принадлежит $S$, может быть сведен к случаю, когда $f$ принадлежит $S$, с помощью замены $ab$ на $ba$ в $\mathfrak{G}$. Если $D_{\rho\sigma}$ принадлежит $S$, то и любой $D_{\rho'\sigma}$ принадлежит $S$, так как по теореме 21 $s^2 D_{\rho'\rho} \times D_{\rho\sigma} \times D_{\sigma\sigma'} = D_{\rho'\sigma'}$. Окончательно имеем

$$M_y[f(y) D_{\sigma'\sigma}(y^{-1}x; \mathfrak{C})] = M_y\left|f(y) \sum_{\tau=1}^{s} D_{\sigma'\tau}(y^{-1}; \mathfrak{C}) D_{\tau\sigma}(x; \mathfrak{C})\right| =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{s} M_y[f(y) D_{\sigma'\tau}(y^{-1}; \mathfrak{C})] D_{\tau\sigma}(x; \mathfrak{C}) =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{s} M_y[f(y) \overline{D_{\tau\sigma'}(y; \mathfrak{C})}] D_{\tau\sigma}(x; \mathfrak{C}),$$

т. е.

$$f \times D_{\sigma'\sigma}(\mathfrak{C}) = \sum_{\tau=1}^{s} \tilde{\alpha}_{\tau\sigma'}(\mathfrak{C}) D_{\tau\sigma}(\mathfrak{C}),$$

$$D_{\rho\rho'}(\mathfrak{C}) \times f \times D_{\sigma\sigma'}(\mathfrak{C}) = \frac{1}{s} \tilde{\alpha}_{\rho'\sigma'}(\mathfrak{C}) D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C}).$$

Следовательно, если $\tilde{\alpha}(\mathfrak{C}) \neq 0$ при фиксированном $\mathfrak{C}$, т. е. если любой $\tilde{\alpha}_{\rho'\sigma'}(\mathfrak{C}) \neq 0$ и если $f$ принадлежит $S$, то $f \times D_{\sigma'\sigma}(\mathfrak{C})$, $D_{\rho\rho'}(\mathfrak{C}) \times f \times D_{\sigma'\sigma}(\mathfrak{C})$ и $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$ принадлежат $S$.

Имея в виду эти факты, легко показать, что доказательства теорем 28—30 проходят и для $S$.

Определение 14. *Если на $\mathfrak{G}$ задана топология $T$*[12]*, то множество всех $T$-непрерывных функций мы обозначим через $[T]$.*

Теорема 32. *Если на $\mathfrak{G}$ задана топология $T$, относительно которой $ab$ непрерывно по $a$ при фиксированном $b$ и по $b$ при фиксированном $a$, то $[T]$ является з. с. Это утверждение очевидно.*

П. п. функции из з.с. $S$ определяются (способом, описанным в теореме 30; см. последнее утверждение теоремы 31), принадлежащими ему элементами $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$. Это значительно облегчает отыскание всех п.п. функций из данного з. с.

[12] См. примеч. 2.

15. Детально рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{rat}$ — множество всех рациональных чисел, закон композиции в котором есть сложение. Так как эта группа абелева, то все ее неприводимые представления имеют порядок 1, $D(a; \mathfrak{C}) = \{D_{\rho\sigma}(a; \mathfrak{C})\}$, $\rho, \sigma = 1$, так что имеется единственный элемент $D_{11}(a; \mathfrak{C}) = \varphi(a; \mathfrak{C})$. Тот факт, что это есть унитарное представление, выражается соотношением

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a+b), \quad |\varphi(a)| = 1. \qquad (1*)$$

Любое рациональное число может быть записано в виде $a = m/n!$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$). Теперь положим $\varphi(1/n!) = e^{2\pi\lambda_n i}$, $0 \leqq \lambda_n < 1$. Тогда

$$\varphi(a) = \varphi\left(\frac{m}{n!}\right) = e^{2\pi\lambda_n m i}. \qquad (2*)$$

Поскольку $(n+1)/(n+1)! = 1/n!$, то

$$(n+1)\lambda_{n+1} \equiv \lambda_n \pmod 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3*)$$

и, с другой стороны, в силу (3*) соотношение (2*) определяет единственное значение $\varphi(a)$, удовлетворяющее (1*). Итак, общим решением является (2*) при условии (3*). Альтернативным способом записи (3*) является

$$\lambda_{n+1} \equiv (\lambda_n + P_n)/(n+1), \quad P_n = 0, 1, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (4*)$$

Пример 2. Рассмотрим то же самое $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{rat}$, но возьмем теперь на нем обычную топологию $T = T_0$ (расстояние $|a - b|$) и положим $S = [T_0]$. Вопрос состоит в том, при каких $\lambda_n$ $\varphi(a)$, определенная согласно (2*), принадлежит $T_0$? Иными словами, когда она $T_0$-непрерывна? Очевидно, что в этом случае $n!\lambda_n$ ограничены, а так как из (4*) вытекает, что $n!\lambda_n = \lambda_1 + 1!\,P_1 + \ldots + (n-1)!P_{n-1}$, то это означает, что только конечное число из $P_m \neq 0$. Тогда $n!\lambda_n$ есть некоторая постоянная $\lambda$, и мы имеем

$$\varphi(a) = e^{2\pi\lambda a i}, \ \lambda \text{ — действительное}^{13}. \qquad (\S)$$

Пример 3. Возьмем то же самое $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{rat}$, но рассмотрим при этом его $p$-адическую топологию $T = T_p$ ($p = 2, 3, 5, \ldots$ — простое число; при этом расстояние есть $2^{N_0}$, где $N_0$ — минимальный из показателей степени $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, для которого знаменатель несократимой дроби $p^N(a - b)$ не делится на $p$). Пусть $S = [T_p]$. Нас интересует, при каких $\lambda_n$ функция $\varphi(a)$ из (2*) $T$-непрерывна? В топологии $T_p$ $p^\nu/n! \to 0$ при $\nu \to \infty$ ($n = 1, 2, \ldots$, но фиксировано), так что $\exp(2\pi\lambda_n p^\nu i) \to 1$, $\lambda_n p^\nu \to 0 \pmod 1$, откуда легко следует, что существует $\nu = \nu_n$, для которого $\lambda_n p^\nu$ — целое. Это можно сформулировать следующим образом: существует $\nu$, при котором $\lambda_1 p^\nu$ — целое и $P_n$ из (4*) делится на наибольший из делителей числа $n+1$, взаимно простой с $p$. С другой стороны, нетрудно видеть, что этого условия достаточно.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{real}$ — множество всех действительных чисел со

[13] Поэтому существуют разрывные п. п. функции рациональной переменной. Этот факт был доказан Урселлом [28, вторая заметка].

сложением как законом композиции. Мы снова определим сначала все п.п. функции, т. е. все неприводимые унитарные представления. Для этого опять нужно решить (1*), но теперь при $a$ и $b$, принимающих любые действительные значения. Уравнение (1*) можно решить при помощи следующей процедуры.

Возьмем рациональный линейный базис множества действительных чисел, т. е. такое множество $B$, что для любого действительного числа $a$ уравнение $a = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ ($n = 1, 2, \ldots$; все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \neq 0$ — рациональные числа; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — различные элементы из $B$) имеет в точности одно решение [12]. Для любого $\xi$ из $B$ мы можем определить величину

$$\Gamma^{(a)}(\xi) = \begin{cases} \alpha_m, & \text{если } \xi \text{ равно некоторому } \xi_m, \\ 0, & \text{если } \xi \text{ не равно всем } \xi_m, \end{cases}$$

где $m = 1, \ldots, n$. Так как $\Gamma^{(a)}(\xi)$ всегда рационально, то имеем $a = \Sigma_{\xi\in B}\Gamma^{(a)}(\xi)\,\xi$, где только конечное число членов не равно нулю и поэтому $\Gamma^{(a+b)}(\xi) = \Gamma^{(a)}(\xi) + \Gamma^{(b)}(\xi)$. Отсюда сразу следует, что любое решение $\varphi(a)$ уравнения (1*) при действительных $a$ имеет вид

$$\varphi(a) = \Pi_{\xi\in B}\varphi_\xi(\Gamma^{(a)}(\xi)), \qquad (\dagger)$$

где каждое $\varphi_\xi(C)$ является решением (1*) при рациональном $C$ и поэтому только конечное число сомножителей не равно единице. Обратно, очевидно, что любое $\varphi(a)$ вида (†) является решением. Поэтому общее решение дается с помощью (†), если для любого $\xi$ из $B$ мы возьмем $\varphi_\xi(C)$ из (2*) и (4*) при $\lambda_n = \lambda_{\xi,n}$ и $P_n = p_{\xi,n}$, зависящих от $\xi$.

Пример 5. Возьмем то же самое $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\text{real}}$, но рассмотрим множество всех измеримых по Лебегу функций $S = S_m$, которое, очевидно, есть з. с. Вопрос состоит в том, какие функции $\varphi(a)$ из (†) измеримы по Лебегу?. Так как они являются решениями уравнения $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a+b)$ и $|\varphi(a)| = 1$, то из их измеримости следует, что они должны иметь вид

$$\varphi(a) = e^{2\pi\lambda a}, \quad \lambda \text{ действительно}^{14} \qquad (\S)$$

Пример 6. Возьмем $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\text{real}}$, но с обычной топологией (расстояние $|a - b|$) и рассмотрим $S = [T_0]$. Нас интересует, какие функции $\varphi(a)$ вида (†) являются $T_0$-непрерывными? Так как любая $T_0$-непрерывная функция измерима, то

---

[14] Это аналогично результату Фреше [9], который рассматривал уравнение $f(a) + f(b) = f(a+b)$ (см. также работы Серпинского [23] и Банаха [1]). Простейший способ доказать наше утверждение состоит в следующем.

Положим $\psi_\varepsilon(a) = \int_a^{a+\varepsilon}\varphi(x)\,dx$. Тогда $\psi_\varepsilon(a)$ непрерывна по $a$ и удовлетворяет уравнению $\psi_\varepsilon(a)\varphi(b) = \psi_\varepsilon(a+b)$. Если бы $\psi_\varepsilon(a) = 0$ при любом $\varepsilon$, то, так как $(\partial/\partial\varepsilon)\psi_\varepsilon(a) = \varphi(a+\varepsilon)$ всюду, кроме множества меры 0, функция $\varphi(a+\varepsilon) = 0$ всюду, кроме множества меры 0, что противоречит условию $|\varphi(a+\varepsilon)| = 1$. Итак, мы можем найти $\varepsilon_0$ и $a_0$, такие, что $\psi_{\varepsilon_0}(a_0) \neq 0$, и, кроме того, из нашего уравнения следует, что $\varphi(b) = \psi_{\varepsilon_0}(a+b)/\psi_{\varepsilon_0}(a_0)$, т. е. $\varphi(b)$ непрерывна. Поэтому $\psi_{\varepsilon_0}(a)$ дифференцируема и согласно нашему последнему уравнению $\varphi(b)$ тоже дифференцируема. Продифференцировав теперь $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a+b)$, получаем $\varphi'(a)\varphi(b) = \varphi'(a+b)$, т. е. $\varphi'(b) = \beta\varphi(b)$ при $a = 0$. Отсюда $\varphi(a) = \alpha e^{\beta a}$, и из нашего первоначального условия $\alpha = 1$, $\beta = 2\pi\lambda i$, где $\lambda$ действительно.

все такие функции должны иметь вид (§). А так как все функции вида (§) непрерывны, то это дает общее решение [15].

Пример 7. Рассмотрим то же самое $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\text{real}}$, но с новой топологией $T = T(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, где из $n_1\lambda_1 + \dots + n_k\lambda_k = 0$ при $n_1, \dots, n_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ следует $n_1 = \dots = n_k = 0$. Расстояние определяется следующим образом [16]:

$$[|e^{2\pi\lambda_1 ai} - e^{2\pi\lambda_1 bi}|^2 + \dots + |e^{2\pi\lambda_k ai} - e^{2\pi\lambda_k bi}|^2]^{1/2} =$$
$$= 2[\sin^2\pi\lambda_1(a-b) + \dots + \sin^2\pi\lambda_k(a-b)]^{1/2}.$$

Следовательно, условие $a_n \to a$ в $T(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ при $n \to \infty$ означает, что $a_n \to a$ по отношению одновременно к mod $1/\lambda_1, \dots$ и mod $1/\lambda_k$. Поэтому $\mathfrak{G}_{\text{real}}$ становится компактным, если его пополнить в этой топологии и любая равномерно $T(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$-непрерывная функция п. п. (см. теорему 36). Вопрос состоит в том, какие функции $\varphi(a)$ вида (†) являются равномерно $T(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$-непрерывными? Так как $T(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$-непрерывность влечет $T_0$-непрерывность, то они должны иметь вид (§), т. е. $\varphi(a) = e^{2\pi\lambda ai}$ Тогда из условия $a_n \to a$ по отношению к mod $1/\lambda_1, \dots$ и mod $1/\lambda_k$ должно вытекать $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$, так что $e^{2\pi\lambda a_n i} \to$ $\to e^{2\pi\lambda ai}$. Это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lambda = n_1\lambda_1 + \dots + n_k\lambda_k, \quad n_1, \dots, n_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$ [17]

Пример 8. Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая группа Ли [18]. Отыскание всех п. п. функций снова предполагает нахождение всех неприводимых унитарных представлений (которые теперь, разумеется, не обязаны быть порядка 1). Но такое представление всегда непрерывно относительно обычной топологии $T_0$ на $\mathfrak{G}$ [19]. Поэтому все п. п. функции на такой $\mathfrak{G}$ автоматически являются $T_0$-непрерывными в противоположность примерам 1, 2 и 4, 6 (см. примеч. 14 и 16). Поэтому не нужно отдельно рассматривать случай $S = \{T_0\}$

16. Примеры 1—8 в достаточной степени иллюстрируют различные возможности комбинирования п. п. функций с топологией, так что дальнейших комментариев не требуется. Мы исследуем теперь другое явление.

Теорема 33. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, а $S$ — з. с. функций на ней. Следующие условия, налагаемые на пару элементов $a$ и $b$ из $\mathfrak{G}$, эквивалентны*

А. $D(a; \mathfrak{C}) = D(b; \mathfrak{C})$ (*т. е.* $D_{\rho\sigma}(a; \mathfrak{C}) = D_{\rho\sigma}(b; \mathfrak{C})$) *для любого* $\mathfrak{C}$ *из* $C$, *для которого элементы* $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$ *принадлежат* $S$.

---

[15] Таким образом, существуют разрывные п. п. функции действительного переменного, но все они неизмеримы. Эти факты были доказаны Урселлом [28, первая заметка].

[16] При $k = 1$ это не только новая топология в $\mathfrak{G}_{\text{real}}$, но отсюда вытекает идентификация элементов, конгруэнтных mod $1/\lambda_1$. После этой идентификации получается нормальная топология. Для $k > 1$ не следует никакой идентификации, но это есть новая топология.

[17] То есть мы приходим к квазипериодическим функциям Боля—Эскландона [3] с базисом $\lambda_1, \dots$ $\dots, \lambda_n$. См. также [4, II, с. 111—117].

[18] Подробное обсуждение этого понятия можно найти у Картана [7].

[19] Это наиболее важное различие между абелевыми группами Ли (см. пример 4) и полупростыми группами Ли. Оно было обнаружено Ван-дер-Варденом [29, с. 785].

B. $D(a) = D(b)$ (*т. е.* $D_{\rho\sigma}(a) = D_{\rho\sigma}(b)$) *для любого нормального представления, для которого элементы* $D_{\rho\sigma}$ *принадлежат* $S$.

*C.* $f(a) = f(b)$ *для любой п. п. функции на* $S$.

А есть частный случай $B$, так что из В следует А.

Так как любая $D_{\rho\sigma}(x)$ п.п. (см. теорему 19 и определение 10), то В есть частный случай С, так что из С вытекает В.

Наконец, из теорем 30 и 31 следует, что из А вытекает $C$.

Взятые вместе все три наших утверждения доказывают эквивалентность А, В и С.

Определение 15. *Мы назовем два элемента* $a$ *и* $b$ *из* $\mathfrak{G}$, *удовлетворяющих одному из эквивалентных условий теоремы 33,* $S$*-когерентными (если* $S$ — *множество всех функций, то мы будем называть их просто когерентными). Обозначим множество* $S$*-когерентных (когерентных) 1 элементов через* $\mathfrak{G}^S$ ($\mathfrak{G}_0$).

Теорема 34. $\mathfrak{G}^S$ — *инвариантная подгруппа* $\mathfrak{G}$, *и если* $S = [T]$ *для топологии* $T$ *на* $\mathfrak{G}$, *то* $\mathfrak{G}$ — $T$*-замкнута. Элементы на* $\mathfrak{G}$, *когерентные данному* $a$, *образуют класс смежности* $\mathfrak{G}_0^S$ *в* $\mathfrak{G}$, *содержащий* $a$.

Рассмотрим условие В теоремы 33 (как А, так и С тоже могут быть рассмотрены). Если $a$ и $b$ принадлежат $\mathfrak{G}_0^S$, то $D(ab) = D(a)\,D(b) = 1$, $D(a^{-1}) = D(a)^{-1} = 1$, т. е. $a^{-1}$ и $ab$ тоже ему принадлежат. Если только $a$ принадлежит $\mathfrak{G}_0^S$, то имеем $D(b^{-1}ab) = D(b)^{-1}D(a)\,D(b) = D(b)^{-1}D(b) = 1$, т. е. $b^{-1}ab$ тоже ему принадлежит. Если $S = [T]$, то любая $D(a)$ $T$-непрерывна, любое множество $D(a) = 1$ $T$-замкнуто и поэтому их общая часть $\mathfrak{G}_0^S$ тоже обладает этими же свойствами. Когерентность $a$ и $b$ означает, что всегда $D(a) = D(b)$, $D(a^{-1}b) = D(a)^{-1}D(b) = 1$, т. е. что $a^{-1}b$ принадлежит $\mathfrak{G}_0^S$. Следовательно, элементы $b$ образуют в точности класс смежности $\mathfrak{G}_0^S$ в $\mathfrak{G}$, содержащий $a$.

Определение 16. *Если* $\mathfrak{G}_0^S = 1$ ($\mathfrak{G}_0 = 1$), *то будем называть* $\mathfrak{G}$ *и* $S(\mathfrak{G})$ *максимально п. п.; если* $\mathfrak{G}_0^S = \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$), *то назовем* $\mathfrak{G}$ *и* $S(\mathfrak{G})$ *минимально п. п.*

Эти два случая действительно являются двумя возможными экстремальными ситуациями. Если $\mathfrak{G}$ и $S$ минимально п. п., то для любой п. п. $f(x)$ из $S$ всегда $f(a) = f(1)$, т. е. п. п. функциями на $S$ являются только константы. Далее, и для любого нормального представления $D(a)$ с элементами $D_{\rho\sigma}(a)$ из $S$ должно выполняться равенство $D(a) = D(1) = 1$, так что если $D(a)$ неприводимо, то его порядок должен быть равен 1. С другой стороны, если $\mathfrak{G}$ и $S$ максимально п. п., то для любой пары элементов $a$ и $b$ ($a \neq b$), принадлежащих $\mathfrak{G}$, существует $\mathfrak{C}$ из $C$, такое, что все $D_{\rho\sigma}(\mathfrak{C})$, для которых $D(a;\ \mathfrak{C}) \neq D(b;\ \mathfrak{C})$, принадлежат $S$, и п. п. функция $f(x)$ на $S$, такая, что $f(a) \neq f(b)$. Верно даже большее:

Теорема 35. *Если* $f(x)\,g(x)$ *принадлежит* $S$ *при условии, что* $f(x)$ *и* $g(x)$ *принадлежат* $S$, *и если* $\mathfrak{G}$ *и* $S$ *максимально п.п., то для любого конечного множества* $a_1, \ldots, a_n$ *различных между собой элементов из* $\mathfrak{G}$ *и любого множества комплексных чисел* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *существует п. п. функция* $f(x)$ *на* $S$, *принимающая заданные значения* $f(a_1) = \alpha_1, \ldots, f(a_n) = \alpha_n$.

Если $a \neq b$, то существует п.п. функция $g(x)$ на $S$, такая, что $g(a) \neq g(b)$.

Поэтому $h(x) = (g(x) - g(b))/(g(a) - g(b))$ является п. п. функцией на $S$ и $h(a) = 1$, $h(b) = 0$. Для каждой пары $a$ и $b$ $(a \neq b)$ возьмем такую функцию $h(x)$ и обозначим ее через $h(a, b; x)$. Тогда $f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^{n} h(a_\nu, b_\mu; x)$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Существуют и другие способы характеризации $\mathfrak{G}_0^S$, но мы не будем их здесь обсуждать.

17. Если $\mathfrak{G}$ и $S$ максимально п. п., то мы можем ввести топологию с помощью определенных на них п. п. функций. В этой связи важно следующее понятие.

Определение 17. *Если $\mathfrak{G}$ и $S$ максимально п. п., то определим $FS$-топологию на $\mathfrak{G}$, рассматривая следующие «окрестности» $\mathfrak{N}(a)$ элемента $a$ из $\mathfrak{G}$*[20]*. Возьмем конечное число п. п. функций $f_1, \ldots, f_n$ и $\varepsilon > 0$, и пусть $\mathfrak{N}(a) = \mathfrak{N}(a; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)$ — есть множество всех $b$, таких, что $|f_1(a) - f_1(b)| < \varepsilon, \ldots, |f_n(a) - f_n(b)| < \varepsilon$. (Если $S$ есть множество всех функций, то вместо $FS$ будем писать $F$.)*

Сразу ясно, что $FS$ удовлетворяет аксиомам Хаусдорфа (см. примеч. 9 в работе [19]) [3].

Определение 18. *Если для множества $\mathfrak{S}$ заданы две топологии $T_1$ и $T_2$, то говорят, что $T_1$ слабее, чем $T_2$, если любая $T_1$-окрестность элемента $a$ из $\mathfrak{S}$ содержит $T_2$-окрестность $a$.*

Очевидно, что любое множество, являющееся замкнутым или открытым в $T_1$-топологии, и любая непрерывная в смысле $T_1$ функция обладают тем же свойством в смысле $T_2$. Тогда для группы $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}[T_1]$ является подмножеством $[T_2]$ (см. определение 14). С другой стороны, очевидно, что если $S_1$ и $S_2$ являются з.с. и $S_2$ — подмножество $S_1$, то $FS_1$ слабее, чем $FS_2$.

Мы предполагаем более подробно рассмотреть теорию $[T]$ и $FS$ в другом месте. Сейчас мы отметим только, что для любой $\mathfrak{G}$ (даже для нетопологически заданной $\mathfrak{G}$) $F$ является топологией, определяемой только $\mathfrak{G}$ (если $\mathfrak{G}$ максимально п. п.). Из рассмотрения примеров 1 и 4 легко видеть, что $\mathfrak{G}_{\mathrm{rat}}$ и $\mathfrak{G}_{\mathrm{real}}$ максимально п.п. (даже с их з.с. $[T_0]$, или $[T_p]$ и $[T_0]$, или $[T(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)]$ соответственно (для $k > 1$ см. примеч. 11)) и что их $F$ являются очень «сильными». Условие $a_n \to a$ в $F$ при $n \to \infty$ означает, что все $a_n$, за исключением конечного числа, равны $a$. С другой стороны, пример 8 показывает, что для полупростой группы Ли $\mathfrak{G}$ (если она максимально п. п.) $F = F[T_0]$. Теорема 36 показывает, что если $\mathfrak{G}$ компактна в топологии $T_0$, то $\mathfrak{G}$ и $[T_0]$ максимально п. п. и $F[T_0] = T_0$. Итак, если $\mathfrak{G}$ — полупростая и компактная группа Ли, то она максимально п. п. и $F = T_0$.

18. Особенно важен случай, когда группа $\mathfrak{G}$ и топология $T$ обладают такими свойствами, что $\mathfrak{G}$ и $[T]$ максимально п. п. и $F[T] = T$.

Теорема 36. *$\mathfrak{G}$ и $[T]$ — максимально п.п. и $F[T] = T$ в любом из следующих двух случаев (в случае В равенство $F[T] = T$ надо понимать так, что условие $a_n \to a$ при $n \to \infty$ эквивалентно ему в обоих смыслах):*

А. *$\mathfrak{G}$ компактна относительно $T$.*

---

[20] См. примеч. 2.

В. $\mathfrak{G}$ *локально компактна*[21] *и сепарабельна*[21] *относительно* $T$, $\mathfrak{G}$ — *абелева группа и* $ab$ и $a^{-1}$ $T$-*непрерывны соответственно по* $a$ *и* $b$ *и по* $a$[22].

Если $\mathfrak{G}$ компактна в топологии $T$, то любая непрерывная $f(x)$ п.п.; для компактной $\mathfrak{G}$ $f(x)$ равномерно непрерывна. Если задана любая последовательность $a_1, a_2, \ldots$, то мы можем выбрать из нее подпоследовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, сходящуюся к пределу $a$, и поэтому $f(xa_n) \to f(xa)$, а $f(a_{n_\nu} x) \to f(ax)$ равномерно при $\nu \to \infty$. Поэтому $T$ состоит только из п. п. функций.

Теперь мы можем определить расстояние $D(a, b)$ на $\mathfrak{G}$, эквивалентное топологии $T$ [27, 25]. Функция $f(x) = D(a, x)$ принадлежит $T$, и мы получаем $f(a) = 0 \neq f(b)$, что доказывает максимальность п. п. $\mathfrak{G}$ и $[T]$. А также что окрестность $\mathfrak{N}(a; f, \varepsilon)$ (см. определение 17) является сферой с центром $a$ и радиусом $\varepsilon$, откуда следует, что $T$ слабее $F[T]$. Но очевидно, что $F[T]$ слабее $T$ и поэтому $F[T] = T$. Тем самым А доказано.

Доказательство В будет дано в конце части V.

Существуют также минимально п. п. группы, например группа $\mathfrak{g}_{(n)}$ всех линейных преобразований действительного евклидова пространства $n$ измерений, $n = 2, 3, \ldots$ с определителем 1. Так как она является полупростой группой Ли и в действительности даже простой [6], то все ее ограниченные представления непрерывны [29]. Поскольку она является линейной группой, то ее непрерывность влечет дифференцируемость [14, с. 37]. Следовательно, нам нужно только определить такие неприводимые представления $\mathfrak{g}_{(n)}$, которые возникают из «инфинитезимальных представлений», и выяснить, существует ли среди них хотя бы одно ограниченное. Эти представления и их следы (характеристики) известны [30, с. 287, 300 ], и только тождественное, $D(a) \equiv 1$, имеет ограниченный след, так что никакое другое представление не может быть ограничено. Применение критерия А теоремы 33 показывает, что $\mathfrak{g}_{(n)}$ минимально п. п.

Простое рассуждение показывает, что группа $\mathfrak{g}'$ всех преобразований вида $y = ax + b$ ($a$ и $b$ — действительные, $a > 0$) не является ни минимально, ни максимально п.п.

## Часть V

## АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

**19.** Будем считать во всей части V, что выполняются предположения случая В теоремы 36 (которую мы докажем далее полностью). Итак, мы считаем, что даны группа $\mathfrak{G}$ и топология $T$, что $\mathfrak{G}$ локально компактна и сепарабельна в топологии $T$ и является абелевой и что $ab$, $a^{-1}$ $T$-непрерывны.

При выполнении этих топологических предположений Хаар доказал существование правоинвариантного интеграла Лебега [11, с. 166—167]. Поэтому мож-

[21] «Локальная компактность» означает, что каждый элемент $a$ обладает условно компактной окрестностью [13, с. 107]. Так как группа $\mathfrak{G}$ однородна, то достаточно потребовать это для элемента 1. «Сепарабельность» означает, что существует бесконечная счетная «система эквивалентных окрестностей», и если топология определяется при помощи понятия расстояния, то можно постулировать существование счетного всюду плотного подмножества [13, с. 125 и 229, аксиома 10].

[22] См. примеч. 2.

но определить для комплекснозначной функции, определенной на $\mathfrak{G}$: i) понятие измеримости; ii) понятие суммируемости; iii) интеграл $\int_{\mathfrak{G}} f(x)\,dx$. Более того, на основе i) и ii) можно сделать так, что i)—iii) будут обладать всеми формальными свойствами этих понятий, как в обычной теории Лебега, и, кроме того, будут инвариантны относительно замены $f(x)$ на $f(xa)$.

Рассмотрим теперь все измеримые функции $f(x)$ на $\mathfrak{G}$, для которых $|f(x)|^2$ суммируем, т. е. $\int_{\mathfrak{G}} |f(x)|^2 dx$ конечен. Эти функции образуют гильбертово пространство $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$, если определить скалярное произведение как $\int_{\mathfrak{G}} f(x)\, g(x)\, dx$[23] при условии, что $\mathfrak{G}$ бесконечна. Последнее будем предполагать выполненным. (Если она конечна, то компактна, что соответствует случаю A.) В $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ равенство

$$O_a f(x) = f(xa) \qquad (1\#)$$

определяет линейный унитарный оператор (т. е. оператор, составляющий инвариантным $(f, g)$) и, следовательно,

$$O_a O_b = O_{ab}. \qquad (2\#)$$

Так как $\mathfrak{G}$ абелева, из (2#) вытекает, что $O_a$ и $O_b$ коммутируют. Поскольку $O_a$ унитарен, то сопряженный (см. работы, цит. в примеч. 23) ему оператор $O_a^* = O_a^{-1}$ и согласно (2#) $O_a^* = O_{a^{-1}}$. Таким образом, любой $O_b$ коммутирует с любыми $O_a$ и $O_{a^*}$ и множество всех операторов $O_a$ может быть названо абелевым [16, с. 389]. Поэтому доказанная автором теорема применима к этому множеству: существует ограниченный эрмитов оператор $R$, такой, что любой $O_a$ является функцией от $R$:

$$O_a = \varphi_a(R), \qquad (3\#)$$

где $\varphi_a(\lambda)$ — комплекснозначная функция от $\lambda$[24]. То, что функции $\varphi_a(\lambda)$ могут быть использованы для исследования свойств группы $\mathfrak{G}$, было замечено Хааром и успешно им применено для счетных абелевых групп [10, с. 131] (см. также работу Винера и Пэли [33]). Теорема 37 является приложением этой идеи в той наибольшей общности, которую допускает хааровский правоинвариантный интеграл Лебега. Следует отметить, однако, что метод Хаара исследования счетных абелевых групп был значительно упрощен Винером и Пэли [33], но их упрощение, по-видимому, не может быть применено в нашем общем случае. Поэтому мы используем первоначальный метод Хаара.

Теорема 37. *Если $\mathfrak{G}$ и $T$ удовлетворяют условиям, сформулированным в начале этой части (т. е. если $\mathfrak{G}$ локально-компактна, сепарабельна и абелева), то существует функция двух переменных $\varphi(a, \lambda)$ ($a$ принадлежит $\mathfrak{G}$, $\lambda$ — действительное), обладающая следующими свойствами:*

---

[23] О современной теории гильбертова пространства см. [15, с. 63—70, 108—111]. Кроме того, см. [24, с. 1—32] [41].

[24] Понятие операторной функции было первоначально введено Ф. Рисом. Более общий смысл ему был придан Нейманом [17, с. 202—213] и Стоуном [24, с. 221—241]. Сформулированная теорема была доказана Нейманом [17, с. 214].

*$\varphi(a, \lambda)$ — бэровская функция переменных $(a, \lambda)$* [25], *и существует «разложение единицы» $E(\lambda)$, такое, что равенство*

$$(O_a f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(a, \lambda)\, d(E(\lambda) f, g)^{26} \qquad (\#)$$

*выполняется равномерно по $a$, $f(x)$ и $g(x)$.*

Для функции $\varphi(a, \lambda) = \varphi_0(\lambda)$ в (3#) теорема, указанная в примеч. 24, дает все наши утверждения, кроме того, что $\varphi(a, \lambda)$ есть бэровская функция от $(a, \lambda)$ (она дает это только для зависимости от $\lambda$, но нам требуется то же самое и для $a$).

Нам известно, что конечные линейные комбинации функций $f_{\mathfrak{T}}$, где $\mathfrak{D}$ — условно компактное открытое множество и поэтому имеет конечную меру, а

$$f_{\mathfrak{T}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ принадлежит } \mathfrak{D}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

всюду плотны в нашем функциональном пространстве [15, с. 110]. Далее «всюду плотность» будет рассматриваться в смысле расстояния

$$D(f, g) = \|f - g\| = [(f - g, f - g)]^{1/2} = \left| \int_{\mathfrak{G}} |f(x) - g(x)|^2 dx \right|^{1/2},$$

а не в смысле расстояния l. u. b.$_x$ $|f(x) - g(x)|$. Тогда, если $\mathfrak{D}_1$ — открытое множество, замыкание которого содержится в $\mathfrak{D}$, то существует непрерывная функция [27]

$$f_{\mathfrak{T},\mathfrak{D}_1}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ принадлежит } \mathfrak{D}_1, \\ 0, & \text{если } a \text{ не принадлежит } \mathfrak{D}, \\ \geqq 0 \text{ и } \leqq 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если мы возьмем последовательность областей $\mathfrak{D}_1$, сходящихся к $\mathfrak{D}$, то $f_{\mathfrak{D}\mathfrak{T}_1}(a)$ мажорируются $f_{\mathfrak{T}}(a)$ и всюду сходятся к ней, так что $f_{\mathfrak{T}}(a)$ является их пределом в смысле расстояния $\|f - g\|$. Поэтому непрерывные функции $f(x)$, которые не равны нулю только на условно компактных множествах, всюду плотны в нашем функциональном пространстве. Так как из $a_n \to a$ вытекает $xa_n \to xa$, то для этих функций имеем $f(xa_n) \to f(xa)$ и согласно второму свойству

$$\|O_{a_n} f - O_a f\| = \left| \int_{\mathfrak{G}} |f(xa_n) - f(xa)|^2 dx \right|^{1/2} \to 0.$$

Поэтому из $a_n \to a$ вытекает $O_{a_n} f \to O_a f$ для всюду плотного множества функций $f$, а так как все $O_b$ являются унитарными операторами и поэтому равно-

---

[25] То есть она может быть получена из непрерывных по $(a, \lambda)$ функций с помощью последовательных процессов предельного перехода, где предел всегда берется для всюду сходящихся последовательностей.

[26] $\int_{-\infty}^{\infty}$ есть интеграл Лебега—Стилтьеса по $\lambda$. Для объяснения используемой терминологии см. [15, с. 92] или [24, с. 174].

[27] Это проблема Фреше, которую первым решил Хан. См. [26, приложение III, с. 290].

мерно непрерывны по $f$, то это имеет место для всех $f$. Следовательно, $O_a f$ есть непрерывная функция от $a$ при любой фиксированной $f$.

Если в конце условия теоремы 37 подставить $E(\mu)g$ в (#) вместо $g$ [см. 17, с. 206], то после простого вычисления получим

$$(O_a f, E(\mu) g) = \int_{-\infty}^{\mu} \varphi(a, \lambda)\, d(E(\lambda) f, g).$$

Возьмем теперь полную ортонормированную систему $f_1, f_2, \ldots$, положим $f = g = f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, умножим на $2^{-n}$ и сложим. Полученные таким образом бесконечные ряды (относительно членов в левой и правой частях) равномерно сходятся, так как $(O_a f, E(\mu) g)$ и $(E(\lambda) f, g)$ по абсолютной величине $\leqq \|f\|\,\|g\|$. В результате получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (O_a f_n, E(\mu) f_n) = \int_{-\infty}^{\mu} \varphi(a, \lambda)\, d \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (E(\lambda) f_n, f_n) \right|$$

$(O_a f_n, E(\mu) f_n)$ непрерывно по $a$ и непрерывно справа по $\mu$, $(E(\lambda) f_n, f_n)$ монотонно возрастает и непрерывна справа по $\lambda$. Теми же свойствами обладают равномерно сходящиеся ряды

$$F(a, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (O_a f_n, E(\mu) f_n), \qquad G(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (E(\lambda) f_n, f_n).$$

Поэтому $F(a, \mu)$ и $G(\lambda)$ — бэровские функции, вторая из них — монотонно возрастающая и

$$F(a, \mu) = \int_{-\infty}^{\mu} \varphi(a, \lambda)\, dG(\lambda).$$

Если мы рассмотрим $G(\lambda)$ как переменную (вместо $\lambda$), то из хорошо известной теоремы о дифференцируемости интегралов следует, что [28]

$$\lim_{\delta, \varepsilon \to 0+} \frac{F(a, \mu + \delta) - F(a, \mu - \varepsilon)}{G(\mu + \delta) - G(\mu - \varepsilon)}$$

существует и равен $\varphi(a, \mu)$ всюду, кроме некоторого $\mu$-множества, зависящего от $a$, $\xi = G(\mu)$-образ [29] которого есть множество (действительных чисел) лебеговой меры нуль.

Тогда функция

$$\varphi_1(a, \lambda) = \begin{cases} \lim\limits_{\delta, \varepsilon \to 0+} \dfrac{F(a, \mu + \delta) - F(a, \mu - \varepsilon)}{G(\mu + \delta) - G(\mu - \varepsilon)}, & \text{если этот предел существует,} \\ & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

очевидно, является бэровской и множество $\Sigma$ тех $\lambda$, для которых $\varphi_1(a, \lambda) \neq \varphi(a, \lambda)$, имеет $\xi = G(\mu)$-образ лебеговой меры нуль. Так как $2^n G(\mu) - (E(\mu) f_n, f_n)$ монотонно возрастает, то $\xi = (E(\mu) f_n, f_n)$-образ $\Sigma$ тоже имеет ле-

[28] См. [5, с. 544—545]. Аналогичный результат о «центральных производных» $F$ по отношению к $G$ принадлежит Даниэллу [8].

[29] Если $G(\mu)$ разрывна при $\mu = \mu_0$, то предполагается, что образом $\mu = \mu_0$ является весь интервал скачка $G(\mu_0 - 0) \leqq \xi \leqq G(\mu_0 + 0)$.

бегову меру[30] нуль и поэтому любой $\xi = (E(\mu) f, f)$-образ имеет меру Лебега, равную нулю [17, с. 213, последнее замечание в части II].

Следовательно, мы можем заменить $\varphi(a, \lambda)$ в (#) на $\varphi_1(a, \lambda)$ и при этом (#) останется справедливым при $f = g$. Если теперь мы заменим нашу $f$ на $(f + g)/2$ и $(f - g)/2$ и вычтем, то получим действительную часть (#). Если мы заменим $f$ и $g$ на $if$ и $g$, то получим его мнимую часть и тем самым докажем (#) в целом. Таким образом, $\varphi_1(a, \lambda)$ удовлетворяет всем нашим требованиям.

Теорема 38. *В условиях теоремы* 37 $\varphi(a, \lambda)$ *может быть даже выбрана непрерывной функцией, удовлетворяющей уравнениям*

$$\varphi(ab, \lambda) = \varphi(a, \lambda)\varphi(b, \lambda), \ |\varphi(a, \lambda)| = 1.$$

Простое вычисление дает [17, с. 206], что

$$(O_aO_bf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(a, \lambda)\varphi(b, \lambda)\, d(E(\lambda) f, g),$$

$$(O_a^*O_af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(a, \lambda)|^2\, d(E(\lambda) f, g).$$

С другой стороны,

$$(O_{ab}f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(ab, \lambda)\, d(E(\lambda) f, g), \quad (f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E(\lambda) f, g).$$

Поскольку $O_aO_b = O_{ab}$, $O_a^*O_a = 1$, то правые части наших уравнений равны. Аналогичное вычисление показывает, что если мы подставим $E(\mu) g$ вместо $g$ [17, с. 206] и вычтем, то получим

$$\int_{-\infty}^{\mu} (\varphi(ab, \lambda) - \varphi(a, \lambda)\varphi(b, \lambda))\, d(E(\lambda) f, g) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\mu} (|\varphi(a, \lambda)|^2 - 1)\, d(E(\lambda) f, g) = 0.$$

Положив $f = g$, получаем, что уравнения нашей теоремы имеют место всюду, кроме множества тех $\lambda$ (зависящего соответственно от пары $a$ и $b$ и от $a$), $\xi = (E(\lambda) f, f)$-образ которого имеет лебегову меру нуль[31] (это условие выполняется одновременно для всех $f$). Возвращаясь к полной ортонормированной системе $f_1, f_2, \ldots$ из доказательства теоремы 37 и к соответствующей $G(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \times (E(\lambda) f_n, f_n)$, мы получаем, что также и $\xi = G(\lambda)$-образы имеют лебегову меру 0 (это вытекает для всех $\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (E(\lambda) f_n, f_n)$) из интегральной формулы в примеч. 30, а для

$$G(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (E(\lambda) f_n, f_n)$$

из того факта, что разность — монотонно возрастающая, $\geqq 0$ и $\leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 1/2^N$).

---

[30] Лебеговой мерой $\xi = H(\mu)$-образа множества $\mathfrak{S}$ является $\int_{\mathfrak{S}} dH(\mu)$, и поэтому если она равна 0 для $H(\mu)$, то она равна 0 для всех функций $K(\mu)$, для которых $H(\mu) - K(\mu)$ монотонно возрастает [см. 17, с. 198, правило $d$ и с. 199].

[31] Под этим мы понимаем, что они удовлетворяют постулатам I—V Каратеодори [5, с. 238—239, 258][5].

Для $a$- и $b$-множеств (т. е. подмножеств $\mathfrak{G}$) мы имеем меру, а именно меру Хаара—Лебега. Для $\lambda$-множеств (т. е. множеств действительных чисел) рассмотрим меру Лебега $\xi = G(\lambda)$-образа (см. примеч. 29) и назовем ее $\lambda$-мерой. Все эти меры обладают формальными свойствами меры Лебега (см. примеч. 31). Мы можем по аналогии с процессом, который ведет от линейной к плоской мере (см. [18, с. 588]), использовать эти меры для определения меры с такими же свойствами в случаях$(a, b)$-, $(a, \lambda)$- и $(a, b, \lambda)$-множеств. Если мы используем так определенные процессы, то теорема Фубини имеет место для всех комбинаций переменных $a$, $b$, $\lambda$, так как ее доказательство [5, с. 622—628] остается неизменным.

Поскольку мы имеем дело с бэровскими функциями, то $(a, b, \lambda)$- и $(a, \lambda)$-множества, для которых $\varphi(ab, \lambda) \neq \varphi(a, \lambda)\, \varphi(b, \lambda)$ и $|\varphi(a, \lambda)| \neq 1$, являются борелевскими множествами и поэтому измеримы. Следовательно, к ним может быть применена теорема Фубини. Так как при фиксированных соответственно $a$, $b$ и $a$ они дают $\lambda$-множества нулевой $\lambda$-меры, то сами они являются множествами нулевой $(a, b, \lambda)$- и $(a, \lambda)$-меры. Отсюда снова следует, что если $\lambda$ не принадлежит определенному (фиксированному) множеству $\mathfrak{S}$ нулевой $\lambda$-меры и если $a$ не принадлежит определенному множеству $\mathfrak{S}_2^{(\lambda)}$ (зависящему от $\lambda$) нулевой (хааровой) меры, то при $b$, не принадлежащем некоторому множеству $\mathfrak{S}_2^{(\lambda, a)}$ (зависящему от $\lambda$ и $a$) нулевой (хааровой) меры, $\varphi(ab, \lambda) = \varphi(a, \lambda)\, \varphi(b, \lambda)$, отсюда $|\varphi(a, \lambda)| = 1$.

Возьмем теперь условно компактное открытое множество $\mathfrak{D}$. Если при некотором $\lambda$ для всех $\mathfrak{D}$ $\int_{\mathfrak{D}} \varphi(x, \lambda)\, dx = 0$, то $\int_{\mathfrak{M}} \varphi(x, \lambda)\, dx = 0$ для любого измеримого множества $\mathfrak{M}$ и, следовательно, $\varphi(x, \lambda) = 0$ всюду, кроме $x$-множества $\lambda$-меры нуль. Поэтому можно взять $\mathfrak{D}$, такое, что $\int_{\mathfrak{D}} \varphi(x, \lambda)\, dx \neq 0$. Обозначим множество всех $ax$ ($x$ принадлежит $\mathfrak{D}$) через $a\mathfrak{D}$.

Предположим, что $\lambda$ принадлежит $\mathfrak{S}_1$ и $a - \mathfrak{S}_2^{(\lambda)}$. Тогда мы имеем $\varphi(ax, \lambda) = \varphi(a, \lambda)\, \varphi(x, \lambda)$, если $x$ не принадлежит $\mathfrak{S}_2^{(\lambda, a)}$, и отсюда вытекает, что

$$\varphi(a, \lambda) \int_{\mathfrak{D}} \varphi(x, \lambda)\, dx = \int_{\mathfrak{D}} \varphi(ax, \lambda)\, dx = \int_{a\mathfrak{D}} \varphi(y, \lambda)\, dy,$$

$$\varphi(a, \lambda) = \int_{a\mathfrak{D}} \varphi(x, \lambda)\, dx \Big/ \int_{\mathfrak{D}} \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

Далее, согласно хорошо известной теореме об интеграле Лебега числитель непрерывен по $a$, знаменатель есть константа, не равная 0, и поэтому мы не обязаны рассматривать $a$ только из $\mathfrak{S}_2^{(\lambda)}$ ($\lambda$, разумеется, принадлежит $\mathfrak{S}_1$). Следовательно, можно определить непрерывную функцию $\varphi_2(a, \lambda)$, положив ее равной $\int_{a\mathfrak{D}} \varphi(x, \lambda)\, dx / \int_{\mathfrak{D}} \varphi(x, \lambda)\, dx$ ($\lambda$ принадлежит $\mathfrak{S}_1$). Отсюда имеем $\varphi_2(a, \lambda) = \varphi(a, \lambda)$, если $a$ не принадлежит $\mathfrak{S}_2^{(\lambda)}$.

В таком случае, если $b$ и $ab$ не принадлежат $\mathfrak{S}_2^{(\lambda)}$, получаем $\varphi_2(ab, \lambda) = \varphi_2(a, \lambda)\, \varphi_2(b, \lambda)$. Однако так как мы исключаем только $b$-множество нулевой (хааровой) меры, то это имеет место для всюду плотного $b$-множества и, следовательно, из соображений непрерывности для всех $b$. Итак, приведенная выше формула справедлива для любого $b$ и $|\varphi_2(a, \lambda)| = 1$ при $a$, не принадлежащих $\mathfrak{S}_2^{(\lambda)}$. Из тех же соображений непрерывности следует, что вовсе нет исклю-

чительных значений $a$. Поэтому (если $\lambda$ не принадлежит $\mathfrak{S}_1$) $\varphi_2(a, \lambda)$ отвечает требованиям нашей теоремы, если ее обозначить через $\varphi(a, \lambda)$.

Согласно определению $\varphi_2(a, \lambda)$ есть бэровская функция от $(a, \lambda)$. Следовательно, $(a, \lambda)$-множество, для которого $\varphi(a, \lambda) \neq \varphi_2(a, \lambda)$, есть борелевское множество и тем самым измеримо. Поэтому к нему применима теорема Фубини, и так как при фиксированном $\lambda$, кроме множества нулевой $\lambda$-меры ($\mathfrak{S}_1$), оно дает $a$-множество нулевой (хааровой) меры ($\mathfrak{S}_2^{(\lambda)}$), то само оно является множеством нулевой $(a, \lambda)$-меры. Отсюда вытекает, что если $a$ не принадлежит определенному (фиксированному) множеству $\mathfrak{S}_1'$ нулевой (хааровой) меры, то $\varphi(a, \lambda) = \varphi_2(a, \lambda)$ при $\lambda$, не принадлежащем некоторому множеству $\mathfrak{S}_2'^{(a)}$ (зависящему от $a$) нулевой $\lambda$-меры. Если мы заменим $\varphi_2(a, \lambda)$ при $\lambda$, принадлежащих $\mathfrak{S}_1$, на 1, то добьемся ее непрерывности по $a$ и справедливости уравнений нашей теоремы для всех $\lambda$ без исключения. Кроме того, доказанное сейчас утверждение имеет место и при замене $\mathfrak{S}_2'^{(a)}$ на $\mathfrak{S}_2'^{(a)} + \mathfrak{S}_1$, которое также является множеством нулевой $\lambda$-меры.

Если $a$ не принадлежит $\mathfrak{S}_1'$, то $\varphi(a, \lambda) = \varphi_2(a, \lambda)$ всюду, кроме $\lambda$-множества нулевой $\lambda$-меры, т. е. имеющего $\xi = G(\lambda)$-образ (см. примеч. 29) нулевой меры Лебега. Отсюда вытекает, так же как в конце доказательства теоремы 37, что

$$(O_a f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(a, \lambda)\, d(E(\lambda) f, g)$$

для всех $f(x)$ и $g(x)$, если $a$ не принадлежит $\mathfrak{S}_1'$. Так как $\mathfrak{S}_1'$ имеет нулевую (хаарову) меру, то множество подходящих $a$ всюду плотно. Но обе части этого уравнения являются непрерывными функциями $a$. Это было показано для левой части в начале доказательства теоремы 37, а для правой части следует из непрерывности $\varphi_2(a, \lambda)$ по $a$ при всех $\lambda$. Следовательно, наше уравнение выполнено для всех $a$.

Поэтому $\varphi_2(a, \lambda)$ удовлетворяет всем нашим требованиям.

Теорема 39. *Если выполнены предположения теорем 37 и 38 и если $ab$ и $a^{-1}$ непрерывны соответственно по $a$, $b$ и $a$, то условие $\varphi(a, \lambda) = \varphi(b, \lambda)$ для всех $\lambda$ эквивалентно условию $a = b$, а $\varphi(a_n, \lambda) \to \varphi(a, \lambda)$ при $n \to \infty$ для всех $\lambda$ эквивалентно условию $a_n \to a$ при $n \to \infty$.*

Первое утверждение получается из второго, если положить $a_1 = a_2 = \ldots = b$. Необходимость критерия во втором утверждении очевидна, так как все функции $\varphi(a, \lambda)$ непрерывны по $a$. Итак, нам нужно доказать только достаточность.

Предположим поэтому, что $\varphi(a_n, \lambda) \to \varphi(a, \lambda)$ при $n \to \infty$ для всех $\lambda$. Далее, (#) из теоремы 37 показывает, что $(O_{a_n} f, g) \to (O_a f, g)$ при $n \to \infty$ для любых $f(x)$ и $g(x)$ из нашего функционального пространства. Пусть теперь $\mathfrak{D}$ — условно компактное открытое множество. Определим

$$f_{\mathfrak{D}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x, \text{ принадлежащих } \mathfrak{D}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $f(x) = f_{\mathfrak{D}}(x)$ и $g(x) = f_{\mathfrak{D}}(ax)$. Тогда

$$(O_{a_n} f, g) = \int_{\mathfrak{G}} f(a_n x)\, \overline{f(ax)}\, dx,$$

$$(O_a f, g) = \int_{\mathfrak{G}} |f(ax)|^2 dx > 0$$

и из $(O_{a_n} f, g) \to (O_a f, g)$ вытекает, что если $n$ достаточно велико, то $(O_{a_n} f, g) \neq 0$ и поэтому $f(a_n x) f(ax) \neq 0$. Следовательно, существует $x$, такое, что $a_n x$ и $ax$ принадлежат $\mathfrak{D}$, а так как $a_n a^{-1} = (a_n x)(ax)^{-1}$, то $aa_n^{-1}$ может быть представлено в виде $uv^{-1}$, где $u$ и $v$ принадлежат $\mathfrak{D}$. В силу того что любое открытое множество имеет условно компактные подмножества, это выполняется для всех открытых $\mathfrak{D}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — окрестность $a$. Тогда мы можем найти открытое множество $\mathfrak{D}$, для которого при $u$ и $v$, принадлежащих $\mathfrak{D}$, все $uv^{-1}$ принадлежат $\mathfrak{N}$. (Именно здесь используются дополнительные предположения о непрерывности.) Итак, из наших результатов вытекает, что если $n$ достаточно велико, то $a_n$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Это означает, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Объединяя утверждения теорем 37, 38 и 10, получаем, что любая $\varphi(a, \lambda)$ как функция *a п.п. и принадлежит [T]. Поэтому теорема 39 действительно доказывает* случай B утверждения теоремы 36.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Banach S.* Sur l'equation fonctionelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$.— Fund. math., 1920, t. 1, s. 123—124.
2. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.— Math. Ann., 1927, Bd. 96, S. 119—147.
3. *Bohl P.* Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit Mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten: Thesis. Dorpat, 1893.
4. *Bohr H.* Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I, II.— Acta math., 1925, bd 45, s. 29—127; bd 46, s. 101—214.
5. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl. Leipzig; Berlin, 1927.
6. *Cartan E.* Sur la structure des groupes de transformations finis et continus: Thesis. P., 1894.
7. *Cartan E.* Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plan.— Bull. Soc. math. France, 1913, vol. 41, p. 53—96.
8. *Daniel P. J.* Differentiation with respect of a function of bounded variation.— Trans. Amer. Math. Soc., 1918, vol. 19, p. 353—362.
9. *Fréchet M.* Pri la funkcie ekwacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$.— Enseign. math., 1913, vol. 15, p. 390—393.
10. *Haar A.* Über unendliche kommutative Gruppen.— Math. Ztschr., 1931, Bd. 33, S. 129—159.
11. *Haar A.* Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.— Ann. Math., 1933, vol. 34, p. 148—169.
12. *Hamel G.* Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$.— Math. Ann., 1905, Bd. 60, S. 459—462.
13. *Hausdorf F.* Mengenlehre. 2. Aufl. Berlin; Leipzig, 1927.
14. *Neumann J. von.* Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen.— Math. Ztschr., 1929, Bd. 30, S. 3—42.
15. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 49—131.
16. *Neumann J. von.* Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 370—427.
17. *Neumann J. von.* Über Funktionen von Funktionaloperatoren. — Ann. Math., 1931, vol. 32, p. 191—226.
18. *Neumann J. von.* Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. — Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 587—642. (Рус. пер. см. наст. кн).

19. *Neumann J. von.* Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen.— Compos. math., 1934, bd. 1, blz. 106—114.
20. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.— Math. Ann., 1907, Bd. 63, S. 433—476.
21. *Schur I.* Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Kl. Phys. Math., 1905, S. 406—432.
22. *Schur I.* Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Kl. Phys. Math., 1924, S. 183—208.
23. *Sierpinski W.* Sur l'èquation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$.— Fund. math., 1920, t. 1, s. 125—129.
24. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space.— Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932. vol. 15.
25. *Tichonoff A.* Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn.— Math. Ann., 1926, Bd. 95, S. 139—142.
26. *Urysohn P.* Über die Mächtigkeit der zusammenhangenden Mengen.— Math. Ann., 1925, Bd. 94, S. 262—308.
27. *Urysohn P.* Zum Metrisationsproblem.— Math. Ann., 1925, Bd. 94, S. 309—315.
28. *Ursell H. D.* Normality of almost periodic functions. First note.— J. London Math. Soc., 1929, vol. 4, p. 123—127; Second note.— J. London Math. Soc., 1930, vol. 5, p. 47—50.
29. *Van der Waerden B. L.* Stetigkeitssätze der halbeinfachen Lieschen Gruppen.— Math. Ztschr., 1933, Bd. 36, S. 780—786.
30. *Weyl H.* Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I.— Math. Ztschr., 1925, Bd. 23, S. 271—309.
31. Weyl H. Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen.— Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 338—356.
32. *Weyl H., Peter F.* Die Vollstandigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossen kontinuierlichen Gruppe.— Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 737—755
33. *Wiener N., Paley R. E. A. C.* Characters of Abelian groups.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1933, vol. 19, p. 253—257.

# ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРУППАХ. II*

*Совместно с С. Бохнером*

Настоящая работа является продолжением статьи Неймана «Почти периодические функции на группе. I» [1][1]. Ее основная задача — распространить теорию почти периодичности на функции, значения которых являются не числами, а элементами общего линейного пространства $L$. Для функций действительного переменного эта программа была начата С. Бохнером [2] и затем приложена им (см. [3]) к некоторым проблемам теории уравнений в частных производных.

Бохнер предполагал, что $L$ является полным и метрическим. В настоящей работе мы рассматриваем более общие линейные пространства. Мы оставляем только требование полноты и не предполагаем, что $L$ — метрическое. Так как обычное определение полноты основано на понятии метрики, то необходимо ввести для линейных пространств понятие полноты, не зависящее от метрики. Это было сделано в предыдущей заметке Неймана [4]. Результаты этой заметки будут все время использоваться, и мы хотим отметить, что $L$ с самого начала предполагается линейным пространством над полем комплексных чисел (см. [4, приложение I]).

Так же как в [1], основной трудностью, которую нужно было преодолеть, является определение и вычисление среднего. Это делается в части I. Определение среднего остается в действительности таким же, как в [1], но для доказательства существования среднего необходимо более тонкое рассуждение, несмотря на то что с общей точки зрения рассмотрение меняется несущественно.

В части II мы доказываем существование и единственность разложения Фурье для любой почти периодической функции. Следует отметить, что представления, имеющие место при разложении Фурье, такие же самые, как и для числовых почти периодических функций. Разница лишь в том, что постоянные коэффициенты, на которые умножаются представления, являются не числами, а элементами абстрактного пространства. (Более того, если на линейном многообразии $L$ можно задать различные топологии, обладающие нужными нам свойствами, то даже характер коэффициентов не определяет точно степень абстрактности почти периодических функций.) Поэтому, грубо говоря, не существует более абстрактных почти периодических функций, чем числовые почти периодические функции. В частности, если группа не допускает никаких других почти периодических функций, кроме констант, то не существует непостоянной почти периодической функции вне зависимости от того, сколь общим является пространство значений $L$.

В части III мы доказываем аппроксимационную теорему. Кроме того, мы доказываем теоремы суммирования, которые являются новыми и для числовых функций. Это теоремы о восстановлении почти периодических функций по их разложению Фурье. Для функций Бора эти теоремы были получены Бохнером [5].

---

* Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 37, N 1, p. 21—50.

[1] Цифры в квадратных скобках относятся к библиографии, помещенной в конце статьи.

Наконец, в части IV мы рассматриваем частный случай, когда $L$ является гильбертовым пространством или пространством ограниченных линейных преобразований гильбертова пространства в себя. Здесь в первую очередь следует упомянуть теоремы 39 и 40. В теореме 39 рассматривается один из редких примеров классов почти периодических функций, для которых разложение Фурье может быть полностью охарактеризовано непосредственно его свойствами. В теореме 40 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы локально-компактная сепарабельная группа являлась компактной. Мы должны также отметить, что для абелевой по сложению группы всех чисел Р. Х. Камерон в неопубликованной работе получил результат, который имеет некоторое отношение к нашей теореме 39.

# Часть I

# СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Пусть $L$ — выпуклое топологическое пространство, которое мы будем всегда предполагать топологически полным (см. [4, определения 1, 2b и 10]). Пусть, далее, $\mathfrak{G}$ — произвольная фиксированная группа. Элементы $\mathfrak{G}$ будут обозначаться через $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ Если о функции ничего специально не говорится, то всегда будет предполагаться, что она есть элемент $L_b^{\mathfrak{G}}$ ($L_b^{\mathfrak{G}}$ есть множество всех ограниченных функций с областью определения $\mathfrak{G}$ и областью значений $\subset L$ [4, определение 11]; $L_b^{\mathfrak{G}}$ есть топологически полное выпуклое топологическое множество [4, теорема 18]).

Если $F \in L_b^{\mathfrak{G}}$, то «сдвинутые» функции $r_aF = F(xa)$, $l_aF = F(ax)$ тоже принадлежат $L_b^{\mathfrak{G}}$ при любом $a \in \mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_F$ множество всех $r_aF$, а через $\mathfrak{L}_F$ множество всех $l_aF$ $(a \in \mathfrak{G})$.

Определение 1. *Функция $F$ называется почти периодической, если оба множества $\mathfrak{R}_F$ и $\mathfrak{L}_F$ вполне ограничены* (*см.* [4, *определение* 6]). *Множество всех почти периодических функций будет обозначаться через $A_p$.*

Теорема 1. *Любая постоянная функция почти периодична.*

Доказательство очевидно.

Определение 2. *Пусть даны группы $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_p$. Обозначим через $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_p$ группу, состоящую из всех $p$-строк*

$$x = [x_1, \ldots, x_p] \quad (x_1 \in \mathfrak{G}_1, \ldots, x_p \in \mathfrak{G}_p)$$

*с законами композиции*

$$[x_1, \ldots, x_p][y_1, \ldots, y_p] = [x_1y_1, \ldots, x_py_p], \qquad [x_1, \ldots, x_p]^{-1} = [x_1^{-1}, \ldots, x_p^{-1}].$$

Будем говорить, что функция «почти периодична по $x_1, \ldots, x_p$», если она почти периодична по $[x_1, \ldots, x_p]$ в группе $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_p$. Если $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 = \ldots$ $\ldots = \mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}$, то вместо $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_p$ будем писать $\mathfrak{G}^p$.

Теорема 2. *Если $F$ почти периодична, то множество функций от $(x, y)$ вида $F_a = F(xay)$ $(\in L^{\mathfrak{G}^2})$ вполне ограничено $(a \in \mathfrak{G})$.*

Если дана $U \in \mathfrak{U}$ [1], то возьмем $V \in \mathfrak{U}$, такую, что $V + V - V \subset U$. Мы выберем элементы $b_1, \ldots, b_n$ так, что любому $y$ соответствует индекс $\nu = \nu(y)$, для которого $F(zy) - F(zb_\nu) \in V$. (При этом и во всех дальнейших рассмотрениях следует помнить определение 6 из [4] [2].) Следовательно,

$$F(xay) - F(xab_\nu) \in V \qquad (x, a \in \mathfrak{G}).$$

Рассмотрим $n$ функций $F_\nu(x) = F(xb_\nu)$. Для любого $\nu$ множество $x$-функций $F_\nu(xa)$ вполне ограничено по $a$. С помощью простых рассуждений (ср. в [1] соответствующую часть доказательства теоремы 9) выводится, что существуют элементы $a_1, \ldots, a_m$, такие, что каждому $a$ соответствует $\mu = \mu(a)$, для которого

$$F_\nu(xa) - F_\nu(xa_\mu) \in V \qquad (x \in \mathfrak{G}; \quad \nu = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, любому $a$ соответствует $\mu = \mu(a)$, такое, что при всех $x, y \in \mathfrak{G}$

$$F(xay) - F(xa_\mu y) = (F(xay) - F(xab_\nu)) + (F(xab_\nu) - F(xa_\mu b_\nu)) + \\ + (F(xa_\mu b_\nu) - F(xa_\mu y)) \in V + V - V \subset U.$$

Теорема 3. *Пусть $F(z)$ — почти периодическая функция. Пусть $z$ — произведение положительных или отрицательных целых степеней элементов $x', x'', \ldots$ $\ldots, x^{(p)}, a', a'', \ldots, a^{(q)} \in \mathfrak{G}$,* взятых в произвольном фиксированном порядке, и пусть $F(z)$ рассматривается как функция

$$F_{a',\ldots,a^{(q)}} = F_{a',\ldots,a^{(q)}}(x', \ldots, x^{(p)}) \tag{1}$$

на $L^{\mathfrak{G}^p}$, зависящая от параметров $a', \ldots, a^{(q)}$. Множество этих функций вполне ограничено по $a', \ldots, a^{(q)}$.

Легко видеть, что в этом доказательстве мы можем заменить в $z$ любое множество степеней некоторых переменных или степеней параметров на новые переменные или соответственно на новые параметры (при этом может увеличиться число индексов $p$ и $q$). Поэтому мы можем предположить, что $z$ имеет вид $a'x'a''x''\ldots$ или $x'a'x''a''\ldots$ . Обозначим число множителей, входящих в $z$, через $k$. Для $k = 2$ согласно определению 1 наша теорема справедлива. Рассмотрим теперь шаг индукции от $k$ к $k+1$. Обозначим произведение первых $k-1$ множителей в $z$ через $\xi$. Мы должны рассмотреть два случая: i) $z = \xi xa$; ii) $z = \xi ax$. Нижний индекс при $\xi$ будет обозначать, что фиксированные значения приписаны всем параметрам, входящим в $\xi$.

Для случая i мы знаем, что каждому $U \in \mathfrak{U}$ соответствуют величины $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n$, для которых

$$F(\xi x) \in \mathfrak{S}_{\nu=1}^{n}(F(\xi_\nu x) + V') \tag{2}$$

(см. [4, определения 6, 11])[3]. Для данного $U \in \mathfrak{U}$ пусть $V + V \subset U$. Заменяя в (2) $x$ на $xa$, получаем

$$F(\xi xa) \in \mathfrak{S}_{\nu=1}^{n}(F(\xi_\nu xa) + V'). \tag{3}$$

Определим элементы $a_1, \ldots, a_m$ таким образом, что

$$F(za) \in \mathfrak{S}_{\mu=1}^{m}(F(za_\mu) + V'). \tag{4}$$

Положив здесь $z = \xi_\nu x$ и подставляя результат в (3), получаем

$$F(\xi x a) \in \mathfrak{S}_{\mu=1}^{m} \mathfrak{S}_{\nu=1}^{n} (F(\xi_\nu x a_\mu) + V' + V') \subset \mathfrak{S}_{\mu=1}^{m} \mathfrak{S}_{\nu=1}^{n} (F(\xi_\nu x a_\mu) + U').$$

Тем самым случай i доказан.

В случае ii мы возьмем величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ так, что $F(\xi z) \in \mathfrak{S}_{\nu=1}^{n}(F(\xi_\nu z) + V')$. Следовательно,

$$F(\xi a x) \in \mathfrak{S}_{\nu=1}^{n} (F(\xi_\nu a x) + V'). \tag{5}$$

Согласно теореме 2 можно взять элементы $a_1, \ldots, a_m$, такие, что

$$F(yax) \in \mathfrak{S}_{\mu=1}^{m} (F(y a_\mu x) + V').$$

Положив здесь $y = \xi$ и подставив результат в (5), получаем

$$F(\xi a x) \in \mathfrak{S}_{\mu=1}^{m} \mathfrak{S}_{\nu=1}^{n} (F(\xi_\nu a_\mu x) + U').$$

Тем самым случай ii доказан.

Следствие. *Пусть $F(z)$ — почти периодическая функция, а $z$ — произведение положительных или отрицательных целых степеней переменных $x', x'', \ldots, x^{(p)}$ параметров $a', a'', \ldots, a^{(q)}$ и постоянных элементов $c', c'', \ldots, c^{(r)}$, взятых в произвольном фиксированном порядке. Тогда множество функций $F(z)$ $(\in L_b^{\mathfrak{G}^p})$ снова вполне ограничено по $a', a'', \ldots, a^{(q)}$.*

Итак, если мы рассмотрим элементы $c', \ldots, c^{(r)}$ как параметры, то получим большее множество функций $\in L^{\mathfrak{G}'}$, которое согласно теореме 3 вполне ограничено. Но подмножество вполне ограниченного множества также вполне ограничено.

Теорема 4. *Функция* (1) *из теоремы* 3 *почти периодична по $x', \ldots, x^{(p)}$ при любых фиксированных значениях параметров $a', \ldots, a^{(q)}$.*

Если мы умножим элемент $[x', \ldots, x^{(p)}] \in \mathfrak{G}^p$ на элемент $[b', \ldots, b^{(p)}]$ справа или слева, то аргумент $z$ в $F(z)$ перейдет в произведение целых положительных или отрицательных степеней переменных $x$, констант $a$ и параметров $b$. Заменяя в следствии теоремы 3 буквы $a$ и $c$ на $b$ и $a$, получим, что соответствующее множество функций вполне ограничено по параметру $b$. Согласно определению 1 функция (1) почти периодична.

Теорема 5. *Если $F_1, \ldots, F_k$ — почти периодические функции со значениями соответственно в линейных пространствах $L_1, \ldots, L_\kappa$, если $S_\kappa$ $(\kappa = 1, \ldots, k)$ — множество значений $F_k$ и если $\mathfrak{F}(f_1, \ldots, f_k)$ — функция, определенная при $f_k \in S_\kappa$ $(\kappa = 1, \ldots, k)$, равномерно непрерывная на этом множестве, область значений которой $\subset L$, то функция*

$$G(x) = \mathfrak{F}(F_1(x), \ldots, F_k(x))$$

*почти периодична.*

Функция $G(x)$ удовлетворяет определению 1 в силу теоремы 9 из [4][4], если применить эту теорему к функции $\mathfrak{F}(F_1, \ldots, F_k)$, рассматриваемой как функция от функций $F_1, \ldots, F_k$, и $L_\kappa, L$ в этой теореме положить равными $L_{\kappa b}^{\mathfrak{G}}, L_b^{\mathfrak{G}}$, а их области значений $S_\kappa$ — соответственно равными $\mathfrak{R}_{F_\kappa}, \mathfrak{L}_{F_\kappa}$ $(\kappa = 1, \ldots, k)$

Теорема 6. *Если $F, G \in A_p$, то $F \pm G \in A_p$. Если $F \in A_p$ и $\alpha(x)$ — числовая почти периодическая функция, то $\alpha F \in A_p$.*

Если $F \in A_p$, то множество функций $r_a F = F(xa)$ вполне ограничено. Если положить $x = 1$, то множество значений $F$ вполне ограничено. Теорема 6 вытекает из теоремы 5 в силу того, что функции $f_1 + f_2$ и $f_1 f_2$ равномерно непрерывны, если $f_1$ и $f_2$ пробегают вполне ограниченные множества. Замыкание такого множества компактно и сепарабельно (см. [4, теоремы 11, 7 и 16, определение 10])[5].

Теорема 7. *Множество $A_p$ замкнуто.*

Пусть $F$ — точка конденсации $A_p$, $U \in \mathfrak{U}$, $V + V \subset U$. Существует $G \in A_p$, такая, что $F \in G + V'$. Очевидно, что $r_a F \in r_a G + V'$[6]. Возьмем элементы $F_1, \ldots$ $\ldots, F_n \in A_p$, такие, что $\mathfrak{R}_G \subset \mathfrak{S}_{\nu=1}^n (F_\nu + V')$. Тогда

$$\mathfrak{R}_F \subset \mathfrak{S}_{\nu=1}^n (F_\nu + V' + V') \subset \mathfrak{S}_{\nu=1}^n (F_\nu + U'),$$

что доказывает вполне ограниченность $\mathfrak{R}_F$. Аналогично $\mathfrak{L}_F$ является вполне ограниченным.

Следствие. *Если последовательность почти периодических функций равномерно сходится, то предельная функция тоже почти периодична.*

Теорема 8. *Если $F \in A_p$, то множество $S = ((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}$* обладает следующими свойствами: i) $S = A_p$; ii) $S$ компактно и сепарабельно; iii) $S_{\text{conv}} = S$. Аналогичные утверждения верны также для $T = ((\mathfrak{L}_{\text{conv}}))_{cl}$.

Свойство i следует из теорем 4, 6 и 7; ii вытекает из того, что $S$ вполне ограничено (см. [4, теоремы 14 и 16])[7]; iii было доказано в [4, приложение 1].

Теорема 9. *Если $G \in ((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}$, то*

$$((\mathfrak{R}_G)_{\text{conv}})_{cl} \subset ((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}. \tag{6}$$

*То же самое имеет место, если мы заменим $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{L}$.*

Согласно предположению для любой $U \in \mathfrak{U}$ имеем [4, теорема 5] $G \subset (\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}} + U'$. Отсюда немедленно следует, что $\mathfrak{R}_G \subset (\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}} + U'$. Так как $U$ произвольна, то имеем [4, теорема 5][6] $\mathfrak{R}_G \subset ((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}$. Соотношение (6) теперь очевидно в силу свойства iii из теоремы 8.

Определение 3. *Мы будем писать $G \prec F$, если две почти периодические функции $G$ и $F$ связаны соотношением* (6).

Замечание. Из теоремы 9 вытекает, что отношение $G \prec F$ эквивалентно включению $G \in ((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}$.

Теорема 10. *Если $F \prec G$ и $G \prec H$, то $F \prec H$.*

Это утверждение сразу следует из теоремы 9.

Теорема 11. *Если $F \in A_p$ и $U \in \mathfrak{U}$, то существуют $G \prec F$ и число $\mu \geqq 0$, такие, что при $H \prec G$ и $a \in \mathfrak{G}$ (см. [4, определение 13])*[8] $\| H(a) \|_U^+ = \mu$.

Рассмотрим для $K \in ((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}$ числовую функцию

$$\| K \|_U^+ = \underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \| K(x) \|_U^+. \tag{7}$$

Эта функция непрерывна и, следовательно, на любом компактном сепарабельном множестве принимает минимальное и максимальное значения. Легко видеть, что при $K_1 \prec K_2$ имеет место неравенство $\| K_1 \|_U^+ \leqq \| K_2 \|_U^+$ Поэтому если $G$ — элемент, для которого (7) принимает минимальное значение, и если $\mu$ равно этому минимальному значению, то получаем

$$\| K \|_U^+ = \| H \|_U^+ = \mu \qquad \text{при } K \prec H \prec G.$$

Поэтому при $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$; $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ имеем

$$\underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \| \alpha_1 H(a_1 x) + \ldots + \alpha_n H(a_n x) \|_U^+ = \underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \| H(x) \|_U^+ = \mu.$$

Объединяя это с неравенством

$$\mu \geqq \underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \| H(x) \|_U^+ \geqq \underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \| H(a_\nu x) \|_U^+,$$

получаем, что числовая функция $\gamma(x) = \| H(x) \|_U^+$ обладает свойством

$$\underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \gamma(x) = \underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} (\alpha_1 \gamma(a_1 x) + \ldots + \alpha_n \gamma(a_n x)). \tag{8}$$

Согласно теореме 5 $\gamma(x)$ почти периодична, а из (8) следует, что $M_x \gamma(x) = \underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \gamma(x)$ (см. определение $M_x$ в [1, определение 4]). Следовательно, $\gamma(x)$ постоянна (см. [1, теорема 7, выражение (4)], где надо положить $f(x) = [\underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}} \gamma(x)] - \gamma(x)$), и доказательство теоремы закончено.

Следствие. *Если $F \in A_p$, $U \in \mathfrak{U}$, $f \in L$, то существует $G \prec F$ и число $\mu \geqq 0$, такие, что при $H \prec G$, $a \in \mathfrak{G}$*

$$\| H(a) - f \|_U^+ = \mu. \tag{9}$$

Применим теорему 11 к $F_1(x) = F(x) - f$ и обозначим полученную $G_1(x)$ через $G(x) - f$.

Теорема 12. *Если $F \in A_p$, то существует постоянная $H \prec F$.*

Обозначим через $S$ множество значений $F(x)$ и через $T$ множество $(S_{\text{conv}})_{cl}$; $S$ вполне ограничено (ср. доказательство теоремы 6). Следовательно, согласно теоремам 11, 14 из [4] $T$ тоже вполне ограничено. Если $f$ $(\in L)$ есть значение функции $G \prec \Gamma$, то $f$ является точкой конденсации элементов вида

$$\alpha_1 F(a_1 x) + \ldots + \alpha_n F(a_n x), \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0; \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1.$$

Но элемент такого вида содержится в $S_{\text{conv}}$. Поэтому $f \in T$. Следовательно, существует компактное сепарабельное множество $T \subset L$, содержащее области значений всех $G \prec F$.

Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — плотная в $T$ последовательность; $W_1, W_2, W_3, \ldots$ — полная система открытых окрестностей нуля. Запишем все пары $n, p = 1, 2, \ldots$ как последовательность $n_k, p_k, k = 1, 2, \ldots$, и определим последовательность функций $G_0, G_1, G_2, \ldots$ таким образом: $G_0 = F$; $G_{k+1}$ есть $G$, которая рассматривается в следствии теоремы 11, примененном к $F = G_k$, $U = U_k = W_{p_k}$, $f = f_{n_k}$.

Поэтому $F \succ G_0 \succ G_1 \succ G_2 \succ \ldots$ и для всех $H \prec G_k$

$$\| H(x) - f_{n_k} \|_{U_k}^+ = \mu_k, \tag{10}$$

где $\mu_k$ — число, зависящее от $k$.

Множества $((\mathfrak{R}_{G_k})_{\text{conv}})_{cl}$ монотонно убывают при $k \to \infty$ и являются замкнутыми и непустыми подмножествами компактного сепарабельного множества $((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}$. Следовательно, они имеют общий элемент $H$. Соотношения (10) оз-

начают, что при любом $p$ и любых $x, y \in \mathfrak{G}$ равенство

$$\| H(x) - f \|^{+}_{W_p} = \| H(y) - f \|^{+}_{W_p} \tag{11}$$

имеет место для всех $f = f_n$. Так как последовательность $f_n$ плотна и псевдометрика непрерывна, то соотношение (11) имеет место для всех $f \in T$. Положив $f = H(y)$, получаем $\| H(x) - H(y) \|^{+}_{W_p} = 0$. Следовательно, $H(x) - H(y) \in W_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ (см. [4, определение 13])[8] и отсюда $H(x) = H(y)$.

Следствие. *Если $F \in A_p$, то существуют $\varphi \in L$ и последовательность систем* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,m_n} \geqq 0,\ \alpha_{n,1} + \ldots + \alpha_{n,m_n} = 1,\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,m_n} \in \mathfrak{G}, \tag{12}$$

*такая, что для любого $U \in \mathfrak{U}$ существует $n_1 = n_1(U)$, при котором из $n \geqslant n_1$ вытекает*

$$\alpha_{n,1} F(a_{n,1} x) + \ldots + \alpha_{n,m_n} F(a_{n,m_n} x) - \varphi \in U$$

Обозначим постоянное значение функции $H$ из теоремы 12 через $\varphi$. Так как $(\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}}$ сепарабельно и $H$ — элемент из его замыкания, то $H$ есть предел последовательности (совпадающих или разных) элементов $(\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}}$. Тем самым следствие доказано.

Теорема 13. *Если $F \in A_p$, то существует $\psi \in L$ и последовательность систем* (12), *такие, что для любой $U \in \mathfrak{U}$ существует $n_1 = n_1(U)$, такое, что из $n \geqq n_1$ следует*

$$\alpha_{n,1} F(x a_{n,1} y) + \ldots + \alpha_{n,m_n} F(x a_{n,m_n} y) - \psi \in U.$$

Применим следствие теоремы 12 к функции $F(z^{-1}y)$ из $L^{\mathfrak{G}^2}$ (см. определение 2) и заменим $z^{-1}$ на $x$.

Определение 4. *Если $F \in A_p$, то любая $\psi \in L$, обладающая свойством, описанным в теореме* 13, *является средним $F$.*

Теорема 14. *Если $F, G \in A_p$ и $\psi, \chi$ — средние соответственно $F, G$, то $\psi \pm \chi$ — среднее $F \pm G$.* Если дано $U \in \mathfrak{U}$, то возьмем $V \in \mathfrak{U}$ так, что $2V - 2V \in U$. Предположим, что $\alpha_\mu \geqq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$, $a_\mu \in \mathfrak{G}$, $\beta_\nu \geqq 0$, $\beta_1 + \ldots + \beta_n = 1$, $b_\nu \in \mathfrak{G}$ и что

$$\alpha_1 F(x a_1 y) + \ldots + \alpha_m F(x a_m y) - \psi \in V, \tag{13}$$

$$\beta_1 F(x b_1 y) + \ldots + \beta_n F(x b_n y) - \chi \in V. \tag{14}$$

Заменим в (13) $y$ на $b_\nu y$, умножим это уравнение на $\beta_\nu$ и просуммируем по всем $\nu$. Отсюда, используя теорему 13 из [4][9], получаем

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\mu \beta_\nu F(x a_\mu b_\nu y) - \psi \in \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu V \subset 2V.$$

Аналогично, если в (14) мы заменим $x$ на $x a_\mu$, умножим на $\alpha_\mu$ и просуммируем по всем $\mu$, то получим

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\mu \beta_\nu G(x a_\mu b_\nu y) - \chi \in \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu V \subset 2V.$$

Следовательно,

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\mu \beta_\nu (F(xa_\mu b_\nu y) - G(xa_\mu b_\nu y)) - (\psi - \chi) \in 2V - 2V \subset U.$$

Так как $\alpha_\mu \beta_\nu \geqq 0$, $\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\mu \beta_\nu \geqq 1$, $a_\mu b_\nu \in \mathfrak{G}$ и $U$ произвольна, то получаем, что $\psi - \chi$ есть среднее $F - G$. Аналогично доказывается, что $\psi + \chi$ есть среднее $F + G$.

Следствие. *Если* $F_1, F_2, \ldots, F_N \in A_p$ $(N = 1, 2, 3, \ldots)$ *со средними соответственно* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ *и если* $U \in \mathfrak{U}$, *то существуют числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ *и элементы* $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$, *такие, что*

$$\alpha_1 F_\nu (xa_1 y) + \alpha_2 F_\nu (xa_2 y) + \ldots + \alpha_n F_\nu (xa_n y) - \psi_\nu \subset U$$

*одновременно для всех* $\nu = 1, 2, \ldots, N$.

Случай $N = 2$ рассматривается при доказательстве теоремы 14, и те же самые рассуждения позволяют перенести наше утверждение с $N$ на $N + 1$.

Теорема 15. *Любая почти периодическая функция имеет одно и только одно среднее.*

Если $\psi$ и $\chi$ обе являются средними $F$, то $\psi - \chi$ есть среднее $F - F = 0$. Но любое среднее 0 есть 0. Отсюда следует единственность среднего.

Определение 5. *Если* $F \in A_p$, *то ее (единственное) среднее будем обозначать через* $MF$ *или* $M_x F(x)$.

Теорема 16. *Среднее обладает следующими свойствами:*

1) *если* $F(x) = \varphi$ *(константа* $\in L$*), то* $MF = \varphi$;
2) *если* $\alpha$ *— число, то* $M(\alpha F) = \alpha MF$;
3) $M(F \pm G) = MF \pm MG$;
4) $M_x F(ax) = M_x F(x)$;
5) $M_x F(xa) = M_x F(x)$;
6) $M_x F(x^{-1}) = M_x F(x)$;
7) *если* $U \in \mathfrak{U}$, *то* $\| MF \|_U^+ \leqq M_x (\| F(x) \|_U^+) \leqq \| F \|_{U'}$;
8) *если* $U \in \mathfrak{U}$ *и* $F - G \in U$, *то* $MF - MG \in 2U$

Утверждения 1 и 2 очевидны; 3 вытекает из теоремы 14; 1, 5, 6 легко выводятся из определения 5. Первая половина свойства 7 следует из соотношения

$$\| \alpha_1 F(xa_1 y) + \ldots + \alpha_n F(xa_n y) \|_U^+ \leqq \alpha_1 \| F(xa_1 y) \|_U^+ + \ldots + \alpha_n \| F(xa_n y) \|_U^+$$

и непрерывности псевдометрики. Вторая половина эквивалентна доказанной ранее теореме о действительных почти периодических функциях (см. [1, теорема 7]). Что касается 8, то из $\| F - G \|_U^+ \leqq 1$ имеем $\| MF - MG \|_{U'}^+ \leqq 1$ и отсюда $MF - MG \in 2U$.

Теорема 17. *Свойствами* 1—3, 4 *(или* 5*),* 8 *теоремы* 16 *наше среднее определяется однозначно.*

Заменив $ab$ в $\mathfrak{G}$ на $ba$, получаем, что достаточно рассмотреть свойства 1—4. 8. Пусть $NF$ — некоторый объект, определенный на $A_p$ и удовлетворяющий этим условиям. Если $V + V \subset U \in \mathfrak{U}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ и $\alpha_1 F(a_1 x) + \ldots$

$...+\alpha_n F(a_n x) - MF \subset V$, то

$$NF - MF = N(\alpha_1 F(a_1 x) + \ldots + \alpha_n F(a_n x) - MF) \subset 2V \subset U.$$

Так как $U$ произвольна, то $NF = MF$.

Замечание. Из свойств 3, 7 теоремы 16 вытекает свойство 8. Следовательно, свойства 1—3, 4 (или 5) и 7 теоремы 16 определяют наше среднее однозначно.

Теорема 18. *Если* $x \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{G}$ *и* $F(x, y)$ *почти периодична по* $x, y$, *то* $F(x, y)$ *почти периодична по* $x$ *при фиксированном* $y$ *и почти периодична по* $y$ *при фиксированном* $x$, $G(x) = M_y F(x, y)$ *почти периодична по* $x$, $H(y) = M_x F(x, y)$ *почти периодична по* $y$:

$$\begin{aligned} MF &= M_x G(x) = M_x(M_y F(x, y)), \\ MF &= M_y H(y) = M_y(M_x F(x, y)). \end{aligned} \tag{15}$$

Если множества $F(ax, by)$, $F(xa, yb)$ вполне ограничены при $a \in \mathfrak{G}$, $b \in \mathfrak{G}$, то множества $F(ax, y)$, $F(xa, y)$, являющиеся их частями, вполне ограничены при $a \in \mathfrak{G}$. Следовательно, $F(x, y)$ почти периодична по $x$ при фиксированном $y$. Аналогично, если мы поменяем местами $x$ и $y$, то $F(x, y)$ почти периодична по $y$ при фиксированном $x$.

Пусть дано $U \in \mathfrak{U}$. Возьмем $V \in \mathfrak{U}$, такое, что $V + V \subset U$, и элементы $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$, такие, что

$$F(ax, y) \in \mathfrak{S}(F(a_1 x, y) + V', \ldots, F(a_m x, y) + V'),$$
$$F(xb, y) \in \mathfrak{S}(F(xb_1, y) + V', \ldots, F(xb_n, y) + V').$$

Согласно теоремам 16 и 8

$$G(ax) = M_y F(ax, y) \in \mathfrak{S}(M_y F(a_1 x, y) + U', \ldots, M_y F(a_m x, y) + U')$$

и аналогично

$$G(xb) \in \mathfrak{S}(M_y F(xb_1, y) + U', \ldots, M_y F(xb_n, y) + U').$$

Следовательно, $G(x)$ почти периодична. Это же имеет место для $H(y)$. Для доказательства первого соотношения в (15) нам надо показать только, что «среднее» $NF = M_x(M_y F)$ удовлетворяет условиям 1—4, 7 из теоремы 16. Это легко проверить. Например, для первой половины условия 7 имеем

$$\|NF\|_U^+ = \|M_x(M_y F(x, y))\|_U^+ \leqq M_x(\|M_y F(x, y)\|_U^+) \leqq M_x M_y(\|F\|_{U'}^+) = N(\|F\|_{U'}^+)$$

(см. теорему 10 из [1]). Аналогично проверяется второе соотношение в (15).

# Часть II
## РАЗЛОЖЕНИЯ ФУРЬЕ

Определение 6. *Если $\varphi(x)$ — числовая почти периодическая функция, $F \in A_p$, то обозначим через $\varphi \times F$ функцию*

$$M_y(\varphi(xy^{-1})F(y)) = M_y(\varphi(xy)F(y^{-1})),$$

*которая тоже принадлежит $A_p$.*

Теорема 19. Функция $\varphi \times F$ *линейна по $\varphi$ и $F$ и, кроме того, ассоциативна*: $(\varphi \times \psi) \times F = \varphi \times (\psi \times F)$.

Первое следует из условий 2, 3 теоремы 16. Второе вытекает из следующего формального вычисления, на каждом шагу которого используется одна из предшествующих теорем:

$$(\varphi \times \psi) \times F = M_y(M_z(\varphi(xy^{-1}z^{-1})\psi(z))F(y)) = M_yM_z(\varphi(xy^{-1}z^{-1})\psi(z)F(y)) = \\ = M_{(y,z)}((\varphi(xy^{-1}z^{-1})\psi(z)F(y)),$$

$$\varphi \times (\psi \times F) = M_y(\varphi(xy^{-1})M_z(\psi(yz^{-1})F(z))) = M_yM_z(\varphi(xy^{-1})\psi(yz^{-1})F(z)) = \\ = M_zM_y(\varphi(xy^{-1})\psi(yz^{-1})F(z)) = M_z(M_y(\varphi(xy^{-1})\psi(yz^{-1})F(z))),$$

и, подставляя $yz$ вместо $y$, получаем

$$\varphi \times (\psi \times F) = M_z(M_y(\varphi(xz^{-1}y^{-1})\psi(y)F(z))) = M_zM_y(\varphi(xz^{-1}y^{-1}) \times \\ \times \psi(y)F(z)) = M_{(y,z)}(\varphi(xy^{-1}z^{-1})\psi(z)F(y)).$$

Теорема 20. *Если $F(x, y)$ — почти периодическая функция из $L^{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}'}$ и $U \in \mathfrak{U}$, то существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ и элементы $a_\nu \in \mathfrak{G}$, такие, что при любых $x \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{G}'$*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu F(a_\nu x, y) - M_x F(x, y) \in U. \tag{16}$$

При фиксированном $y$ функция $F(x, y)$ почти периодична по $x$. Отсюда согласно следствию теоремы 14, если $y$ принимает любое конечное число определенных значений, то можно найти величины $\alpha_\nu$, $a_\nu$, при всех $x$ удовлетворяющие (16).

Возьмем теперь $V \in \mathfrak{U}$, такое, что $2V + V - 2V \subset U$, и элементы $b_1, \dots, b_m$, такие, что $F(x, yb) \in \mathfrak{S}(F(x, yb_1) + V', \dots, F(x, yb_m) + V')$. Положив $y = 1$, получим

$$F(x, b) \in \mathfrak{S}(F(x, b_1) + V', \dots, F(x, b_m) + V').$$

Мы определим величины $\alpha_\nu$, $a_\nu$ так, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu F(a_\nu x, b_\mu) - M_x F(x, b_\mu) \in V \tag{17}$$

при $\mu = 1, \dots, m$. Каждому $b$ соответствует $b_\mu$, такое, что

$$F(x, b) - F(x, b_\mu) \in V. \tag{18}$$

Следовательно, согласно условию 8 из теоремы 16

$$M_x F(x, b) - M_x F(x, b_\mu) \in 2V, \tag{19}$$

с другой стороны, из (18) вытекает

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu F(a_\nu x, b) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu F(a_\nu x, b_\mu) \in 2V. \tag{20}$$

Комбинируя (17), (19), (20), получаем, что при любом $b \in \mathfrak{G}'$

$$\sum_{\nu=}^{n} \alpha_\nu F(a_\nu x, b) - M_x F(x, b) \in 2V + V - 2V \subset U.$$

Тем самым теорема доказана.

Определение 7. *Весовой функцией назовем действительную почти периодическую функцию* $\varphi(x)$, *обладающую свойствами*: $\varphi(x) \geqq 0$, $M\varphi = 1$ *Специальная весовая функция есть весовая функция, являющаяся конечной линейной комбинацией коэффициентов представления* (см. [1, гл. III]).

Теорема 21. *Если* $F \in A_p$ *и* $\varphi(x)$ — *весовая функция, то* $\varphi \times F \prec F$.

Для $U \in \mathfrak{U}$ возьмем $V \in \mathfrak{U}$, такое, что $V + V \subset U$. Тогда $\varphi \times F = M_y(\varphi(y) \times F(y^{-1}x))$. По теореме 20 существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ и элементы $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$, такие, что

$$\varphi \times F - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi(a_\nu y) F(y^{-1} a_\nu^{-1} x) \in V \tag{21}$$

Функция $\psi(y) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi(a_\nu y)$ есть весовая функция. Следовательно, существуют элементы $y_1$, $y_2$, такие, что $\psi(y_1) \geqq 1$, $\psi(y_2) \leqq 1$. Поэтому можно найти $\gamma$, $0 \leqq \gamma \leqq 1$, так, что $\gamma\psi(y_1) + (1-\gamma)\psi(y_2) = 1$. Из (20) легко выводится, что

$$\varphi \times F \subset \gamma \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi(a_\nu y_1) F(y_1^{-1} a_\nu^{-1} x) + (1-\gamma) \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi(a_\nu y_2) \times$$
$$\times F(y_2^{-1} a_\nu^{-1} x) + U'.$$

Легко видеть, что функция от $x$ в правой части $\in (\mathfrak{R}_F)_{\mathrm{conv}}$. Следовательно, $\varphi \times F \in (\mathfrak{R}_F)_{\mathrm{conv}} + U'$ при всех $U' \in \mathfrak{U}'$. Поэтому (см. [4, теорема 5])[6] $\varphi \times F \in ((\mathfrak{R}_F)_{\mathrm{conv}})_{cl}$

Лемма 1. *Если* $\varphi(x, y)$ — *действительная почти периодическая функция по* $x, y$, *то*

$$\psi(x) = \operatorname*{l.u.b.}_{y \in \mathfrak{G}} \varphi(x, y)$$

*почти периодична по* $x$.

Если $|\varphi(ax, by) - \varphi(a_\nu x, b_\nu y)| \leqq \varepsilon$, то и

$$|\operatorname*{l.u.b.}_{y \in \mathfrak{G}'} \varphi(ax, by) - \operatorname*{l.u.b.}_{y \in \mathfrak{G}'} \varphi(a_\nu x, b_\nu y)| \leqq \varepsilon,$$

т. е.

$$|\operatorname*{l.u.b.}_{y \in \mathfrak{G}'} \varphi(ax, y) - \operatorname*{l.u.b.}_{y \in \mathfrak{G}'} \varphi(a_\nu x, y)| \leqq \varepsilon.$$

Следовательно, если $\mathfrak{R}_\varphi$ вполне ограничено, то и $\mathfrak{R}_\psi$ вполне ограничено. Аналогично и для $\mathfrak{L}_\psi$.

Лемма 2. *Если* $\psi(x)$ — *весовая функция и* $\varepsilon > 0$, *то существует специальная весовая функция* $\chi(x)$, *такая, что*

$$|\psi(x) - \chi(x)| \leqq \varepsilon, \quad x \in \mathfrak{G}.$$

Согласно аппроксимационной теореме [1, теорема 30] для любого $\delta > 0$ существует конечная линейная комбинация $\chi_1(x)$ коэффициентов представления, такая, что

$$|\psi(x) - \chi_1(x)| \leqq \delta. \qquad (22)$$

Можно предположить, что $\chi_1(x)$ — действительная, в противном случае заменим ее на $(\chi_1(x) + \overline{\chi_1(x)})/2$. Далее мы можем считать, что она $\geqq 0$. В противном случае используем, что $\chi_1(x) + \delta$ удовлетворяет неравенству (22), если $\delta$ заменить на $2\delta$. Поскольку $M\psi = 1$, то из (22) вытекает $1 - \delta \leqq M\chi_1 \leqq 1 + \delta$. Следовательно, для $\chi = \chi_1/(M\chi_1)$ получаем

$$|\psi(x) - \chi(x)| \leqq |\psi(x) - \chi_1(x)| + \left|\left(1 - \frac{1}{M\chi_1}\right)\chi_1\right| \leqq \delta + \frac{\delta}{1-\delta}\,[\underset{x \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}}\, \psi(x) + \delta],$$

и если $\delta$ достаточно малò, то это выражение не превосходит $\varepsilon$.

Теорема 22 *Если $F \in A_p$ и $U \in \mathfrak{U}$, то существует специальная весовая функция $\chi$, такая, что $\chi \times F - F \in U'$. $F(x^{-1}y) - F(y)$ почти периодична по $x, y$. Следовательно, $\|F(x^{-1}y) - F(y)\|_U^+$ тоже почти периодична по $x, y$ (теорема 5). Согласно лемме 1*

$$t(x) = \underset{y \in \mathfrak{G}}{\text{l. u. b.}}\, \|F(x^{-1}y) - F(y)\|_U^+$$

*почти периодична по $x$.*

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию

$$\omega_\varepsilon(u) = \begin{cases} 1 - |u|/\varepsilon & \text{при } |u| \leqq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |u| \geqq \varepsilon \end{cases}$$

и почти периодическую (теорема 5) функцию $\psi_\varepsilon(x) = \omega_\varepsilon(t(x))$. Имеем: 1) $\psi_\varepsilon(x) \geqq 0$; 2) $\psi_\varepsilon(1) = 1$, так как $t(0) = 0$; 3) если $\psi_\varepsilon(x) > 0$, то $\|F(x^{-1}y) - F(y)\|_U^+ \leqq \varepsilon$ при всех $y \in \mathfrak{G}$: 4) $m_\varepsilon = M_x\psi_\varepsilon(x) > 0$ согласно утверждению 4 теоремы 7 из 1]. Поэтому

$$\|\psi_\varepsilon(z)(F(z^{-1}x) - F(x))\|_U^+ \leqq \psi_\varepsilon(z)\,\|F(z^{-1}x) - F(x)\|_U^+ \leqq \psi_\varepsilon(z)\,t(z),$$

а это выражение равно 0, если $\psi_\varepsilon(z) = 0$, и $\leqq \varepsilon\psi_\varepsilon(z)$, если $\psi_\varepsilon(z) \neq 0$. Итак,

$$\|\psi_\varepsilon \times F - m_\varepsilon F\|_U^+ \leqq \varepsilon m_\varepsilon$$

и для весовой функции $\psi(x) = \psi_\varepsilon(x)/m$ имеем

$$\|\psi \times F - F\|_U^+ \leqq \varepsilon.$$

Для специальной весовой функции $\chi(x)$ из леммы 2 получаем

$$\|\chi \times F - F\|_U^+ \leqq \varepsilon + \|(\chi - \psi) \times F\|_U^+ \leqq \varepsilon + M_x\|\psi(xy^{-1}) - \chi(xy^{-1})F(y)\|_U^+ \leqq$$
$$\leqq \varepsilon + \varepsilon M_x(\max\|\pm F(y)\|_U^+) \leqq \varepsilon + \varepsilon C,$$

где $C$ — не зависящая от $\varepsilon$ постоянная. Взяв $\varepsilon < (1 + C)^{-1}$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 23. *Если $F \in A_p$, то существует такая последовательность специальных весовых функций $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), что $F$ есть предел последовательности $\varphi_n \times F$, $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Рассмотрим множество $S$ функций вида $\varphi \times F$, где $\varphi$ пробегает множество всех специальных весовых функций. По теореме 22 $F \subset S_{cl}$. Но $S_{cl} \subset ((\Re_F)_{\text{conv}})_{cl}$ (теорема 21) сепарабельно. Следовательно, $F$ является пределом (равных или различных) элементов $\in S$.

Определение 8. *Если $D(x) = \{D_{\rho\sigma}(x)\}_{\rho,\sigma=1,\ldots,s}$ — неприводимое нормальное представление $\mathfrak{G}$ (см. [1, гл. 3, определения 9, 10]), то для $F \in A_p$ рассмотрим*

$$f_{\rho\sigma}(D) = M_x(D_{\sigma\rho}(x^{-1})F(x)) = M(\overline{D_{\rho\sigma}}F)$$

*и матрицу*

$$f^D = \{f_{\rho\sigma}(D)\}_{\rho,\sigma=1,\ldots,s},$$

*где $f_{\rho\sigma}(D)$ — коэффициент $(D, \rho, \sigma)$-разложения $F$; $f^D$ — матрица $D$-разложения.*

Теорема 24. *Коэффициенты и матрицы разложения обладают следующими свойствами:*

1. $M(\overline{D_{\rho\sigma}}(\alpha F)) = \alpha M(\overline{D_{\rho\sigma}}F), \quad \alpha \in L.$

2. $M(\overline{D_{\rho\sigma}}(F + G)) = M(\overline{D_{\rho\sigma}}F) + M(\overline{D_{\rho\sigma}}G).$

3. *Если $F$ — предел последовательности $F_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$, то для любых $(D, \rho, \sigma)$ $M(\overline{D_{\rho\sigma}}F)$ является пределом последовательности $M(\overline{D_{\rho\sigma}}F_N)$, $N = 1, 2, \ldots$*

4. *Если $G = \varphi \times F$ и $g_{\rho\sigma}(D)$, $\varphi_{\rho\sigma}(D)$, $f_{\rho\sigma}(D)$ — коэффициенты разложения соответственно $G, \varphi, F$, то $g^D = \varphi^D f^D$, т. е.*

$$g_{\rho\sigma}(D) = \sum_{\tau=1}^{s} \varphi_{\rho\tau}(D) f_{\tau\sigma}(D).$$

*В частности, матрица $g^D$ — нулевая, если $f^D$* или *$\varphi^D$ (или обе) — нулевые.*

5. *Если $D^N$ $(N = 1, 2, 3, \ldots)$ — (конечная или есконечная) последовательность неприводимых неэквивалентных нормальных представлений и $s^N$ — их соответствующие порядки, если $h_{\rho\sigma}$ — элементы $L$ и если имеет место равенство*

$$F = \sum_{N=1}^{\infty} \left(s^N \sum_{\rho,\sigma=1}^{s^N} h_{\rho\sigma}^N D_{\rho\sigma}^N\right), \tag{23}$$

*означающее, что $F \in A_p$ есть предел $m \to \infty$ последовательности элементов*

$$F_m = \sum_{N=1}^{m} \left(s^N \sum_{\rho,\sigma=1}^{s^N} h_{\rho\sigma}^N D_{\rho\sigma}^N\right),$$

*принадлежащих $A_p$, то*

$$M(\overline{D_{\rho\sigma}}F) = \begin{cases} 0, & \text{если } D \neq D^N, \\ h_{\rho\sigma}^N, & \text{если } D = D^N, \end{cases}$$

*где $N = 1, 2, \ldots$*

Утверждения 1 и 2 очевидны, 3 легко выводится из того, что $G(x, y) \in U$ влечет $M_y G(x, y) \in 2U$ (теорема 16, свойство 8); утверждение 4 вытекает из соотношения

$$g_{\rho\sigma}^D = M_x(D_{\sigma\sigma}(x^{-1}) M_y(\varphi(xy^{-1}) F(y))) = M_y(F(y) M_x(D_{\rho\sigma}(x^{-1}) \varphi(xy^{-1}))) =$$

$$= M_y(F(y) M_z(D_{\rho\sigma}(y^{-1}z^{-1}) \varphi(z))) = \sum_{\tau=1}^{s} M_y(F(y) D_{\sigma\tau}(y^{-1})) M_z(D_{\tau\rho}(z^{-1}) \varphi(z)).$$

Что касается утверждения 5, то, если число представлений $D^N$ конечно, оно получается прямым вычислением $M_x(\overline{D_{\rho\sigma}}(x)F(x))$ с использованием утверждений 1, 2 и теоремы 21 из [1], а в общем случае с помощью еще и утверждения 3.

Теорема 25. *Если функция $F \in A_p$, то ее разложение содержит не более счетного числа не равных нулю матриц.*

Согласно утверждениям 4 и 3 из теоремы 24 это верно, если $F$ имеет вид $\varphi \times G$, где $\varphi$ — специальная весовая функция, или если $F$ есть предел таких функций. Теперь достаточно применить теорему 23.

Определение 9. *Если $F \in A_p$, $D^N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ — последовательность неприводимых нормальных представлений (в произвольном фиксированном порядке) с отличными от нуля матрицами разложения $F$ и соответствующими порядками $s^N$ и если $f_{N,\rho\sigma} = M_x(D^N_{\rho\sigma}(x^{-1})F(x))$, то мы будем называть формальный ряд*

$$\sum_{N=1}^{\infty} s^N \sum_{\rho,\sigma=1}^{s^N} f_{N,\rho\sigma} D^N_{\rho\sigma} \tag{24}$$

*разложением Фурье функции $F$.*

Назовем последовательность $F_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ формально сходящейся (к $F$), если последовательность разложений Фурье функций $F_m$ формально сходится (к разложению Фурье функции $F$), т. е. если для любых $(D, \rho, \sigma)$ последовательность $M(\overline{D_{\rho\sigma}}F_m)$ имеет предел (а именно $M(\overline{D_{\rho\sigma}}F)$).

Замечание. В теореме 24 устанавливаются свойства разложения Фурье: в 1 и 2 доказывается аддитивность; в 3 — что ряд Фурье предела есть формальный предел ряда Фурье; 4 дает важное правило вычисления ряда Фурье свертки почти периодической функции с числовой почти периодической функцией. Наконец. 5 означает, что сумма равномерно сходящегося ряда вида (23) является его собственным разложением Фурье.

Теорема 26. (Теорема единственности.) *Почти периодические функции, имеющие одно и то же разложение Фурье, равны.*

Если $G$ и $H$ имеют одно и то же разложение, то разложение функции $F = G - H$ тождественно обращается в нуль. Из

$$D_{\rho\sigma} \times F = M_y(D_{\rho\sigma}(xy^{-1})F(y)) = \sum_{\tau=1}^{s} D^{(x)}_{\rho\tau} M_y(D_{\tau\sigma}(y^{-1})F(y)) \tag{25}$$

вытекает, что $D_{\rho\sigma} \times F$ обращается в 0 при любых $(D, \rho, \sigma)$. Следовательно, $\varphi \times F = 0$ для любой специальной весовой функции. Но $F$ есть предел таких функций (теорема 23), поэтому $F = 0$.

## Часть III

## ТЕОРЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ И СУММИРОВАНИЯ

Теорема 27. (Теорема аппроксимации.) *Если $F$ — почти периодическая, то она есть предел последовательности конечных линейных комбинаций вида $\Sigma f D_{\rho\sigma}$, где $f \in L$. Более точно, если $D^N$ $(N = 1, 2, 3, \ldots)$ — представления, входящие в разложение Фурье функции $F$, порядки которых равны соответственно $s^N$, то существуют элементы $f^m_{N,\rho\sigma}$ из $L$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, такие, что для любо-*

*го $m$ только конечное число их не равно нулю и что $F$ есть предел при $m \to \infty$ конечных комбинаций*

$$F_m = \sum_{N=1}^{\infty}\left(s^N \sum_{\rho,\sigma=1}^{s^N} f^m_{N,\rho\sigma} D^N_{\rho\sigma}\right).$$

Функция $F$ есть предел последовательности $F_m = \varphi_m \times F$, где $\varphi_m$ — специальные весовые функции. Используя (25), получаем, что эта последовательность удовлетворяет всем условиям теоремы.

Теорема 28. *Пусть последовательность $F_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ состоит из элементов вполне ограниченного или компактного подмножества $A_p$. Тогда для сходимости этой последовательности достаточно, чтобы она была формально сходящейся.*

Так как замыкание вполне ограниченного множества компактно (см. [4, теорема 11 и определение 10]), то достаточно рассмотреть только второй случай. В силу компактности рассматриваемая последовательность имеет по крайней мере одну точку накопления. Используя компактность, мы должны показать, что не существует более одной точки накопления. В противном случае имеются две последовательности $F_{p_m}$, $F_{q_m}$ в $F_m$ с различными пределами, равными соответственно $G$ и $H$. Разложение Фурье $G$ есть формальный предел Фурье-разложений функций из подпоследовательности $F_{p_m}$, а так как последовательность $F_{p_m}$ формально сходится, то к последовательности $F_m$. Аналогично, разложение Фурье $H$ есть формальный предел разложений последовательности $F_m$. Итак, $G$ и $H$ имеют одно и то же разложение Фурье и согласно теореме 26 $G = H$, что противоречит нашей гипотезе.

Определение 10. *Функцию $F \in A_p$ будем называть класс-функцией, если при всех $x$ и $y$ $F(yxy^{-1}) = F(x)$ или, что эквивалентно, если $F(yx) = F(xy)$ при всех $x$ и $y$.*

*Формальный ряд* (24) *будем называть класс-рядом, если*

$$f_{N,\rho\sigma} = f_N \delta_{\rho\sigma}. \tag{26}$$

Теорема 29. *Если $F(x) \in A_p$, то $F_0(x) = M_y(F(yxy^{-1}))$ есть класс-функция, и если* (24) *есть разложение Фурье $F(x)$, то разложение Фурье $F_0(x)$ равно*

$$\sum_{N=1}^{\infty} s^N f_N \sum_{\rho=1}^{s^N} D^N_{\rho\rho},$$

*где*

$$f_N = \frac{1}{s^N} \sum_{\rho=1}^{s^N} f_{N,\rho\rho}.$$

Для того чтобы функция $F$, принадлежащая $A_p$, являлась класс-функцией, необходимо и достаточно, чтобы ее разложение Фурье было класс-рядом.

Имеем

$$F_0(zxz^{-1}) = M_y F(yzxz^{-1}y^{-1}) = M_y F(yxy^{-1}) = F_0(x).$$

Следовательно, $F_0(x)$ есть класс-функция. При фиксированном представлении $\{D_{\rho\sigma}\}$ имеем

$$M_x(D_{\rho\sigma}(x^{-1})F_0(x)) = M_x M_y(D_{\rho\sigma}(x^{-1})F(yxy^{-1})) = M_x M_y(D_{\rho\sigma}(y^{-1}xy^{-1})F(x)) =$$

$$= M_y \sum_{p,q=1}^{s} D_{\rho p}(y^{-1}) D_{q\sigma}(y) M_x(D_{pq}(x^{-1}) F(x)) = \frac{\delta_{\rho\sigma}}{s} \sum_{p=1}^{s} M_x(D_{pp}(x^{-1}) F(x)).$$

Этим утверждение о ряде Фурье функции $F_0(x)$ доказано.

Если разложение Фурье $F$ есть класс-ряд, то функции $F$ и $F_0$ имеют одно и то же разложение Фурье. По теореме 26 $F = F_0$ и, следовательно, $F$ есть класс-функция, так как класс-функцией является $F_0$.

Обратно, если $F(x) = F(yxy^{-1})$, то $F(x) = M_y F(yxy^{-1}) = F_0(x)$ и согласно первой части нашей теоремы разложение Фурье функции $F_0$ есть класс-ряд.

Теорема 30. (Теорема суммирования). *Пусть $D^N (N = 1, 2, 3, \ldots)$ — последовательность неприводимых нормальных представлений, имеющий порядки $s^N$. Существует последовательность специальных весовых функций $\varphi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, обладающая следующими свойствами:*

1. *Каждая $\varphi_m$ есть класс-функция.*
2. *Все коэффициенты Фурье функции $\varphi_m$ являются $\geqq 0$, $\leqq 1$.*
3. *Любая почти периодическая функция, разложение Фурье которой не содержит других представлений, кроме данных, есть предел последовательности функций $\varphi_m \times F$ $(m = 1, 2, \ldots)$.*

*В частности, существует квадратная таблица чисел $r_N^m$, $m$, $N = 1, 2, \ldots$, обладающая следующими свойствами:*

α) *при любом $m$ только конечное число из этих чисел не равно нулю;*

β) $0 \leqq r_N^m \leqq 1$;

γ) *если почти периодическая функция $F$ имеет разложение Фурье $\sum_{N=1}^{\infty} s^N \sum_{\rho,\sigma=1}^{s^N} f_{N,\rho\sigma} D_{\rho\sigma}^N$ (любое число коэффициентов $f_{N,\rho\sigma}$ может обращаться в нуль), то $F$ есть предел при $m \to \infty$ конечных комбинаций*

$$F_m = \sum_{N=1}^{\infty} r_N^m s^N \sum_{\rho,\sigma=1}^{s^N} f_{N,\rho\sigma} D_{\rho\sigma}^N.$$

Возьмем не равные нулю числа $\varepsilon_N$ так, что ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon_N s^N \left( \sum_{\tau=1}^{s^N} D_{\tau\tau}^N(x) \right) \tag{27}$$

равномерно сходится, определяя, таким образом, числовую почти периодическую функцию $f(x)$. Существуют специальные весовые функции $\chi_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, такие, что последовательность функций $f_m(x) = \chi_m \times f(x)$ равномерно сходится к $f(x)$. Согласно теореме 21 из [1] $f \times D_{\rho\sigma}^N = \varepsilon_N D_{\rho\sigma}^N$. Но $f_m \times D_{\rho\sigma}^N = \chi_m \times (f \times D_{\rho\sigma}^N)$. Рассматривая $\varepsilon_N \neq 0$, получаем

$$\lim_{m\to\infty} \chi_m \times D_{\rho\sigma}^N = D_{\rho\sigma}^N. \tag{28}$$

В частности,

$$\lim_{m\to\infty} M_x (D_{\rho\sigma}^N(x^{-1}) \chi_m(x)) = \delta_{\rho\sigma}.$$

Рассмотрим теперь класс-функцию

$$\psi_m(x) = M_y \chi_m(y x y^{-1}). \tag{29}$$

Очевидно, что $\psi_m(x)$ — весовая функция и по теореме 29 она имеет вид

$$\psi_m(x) = \sum_D s_D a_D^m \left( \sum_{\tau=1}^{s_D} D_{\tau\tau} \right), \tag{30}$$

где сумма содержит конечное число слагаемых, так что является специальной весовой функцией. Из (28) следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} a_D^m = 1$. Функция

$$\psi_m' = \bar{\psi}_m(x^{-1}) = \sum_D s_D \bar{a}_D^m \left( \sum_{\tau=1}^{s_D} D_{\tau\tau} \right)$$

обладает всеми свойствами $\psi_m$. Наконец мы введем класс-функцию $\varphi_m = \psi_m \times \times \psi_m'$, для которой возьмем разложение

$$\varphi_m = \sum_D s_D r_D^m \left( \sum_{\tau=1}^{s_D} D_{\tau\tau} \right),$$

где

$$r_D^m = |a_D^m|^2$$

и

$$\lim_{m\to\infty} r_D^m = 1 \qquad \text{при } D = D^N. \tag{31}$$

Легко видеть, что $\varphi_m$ — снова весовая функция. Ее коэффициенты $r_D^m$ все $\geqq 0$, и так как $r_D^m$, $\varphi_m(x)$ действительны и $\geqq 0$, то

$$r_D^m = M_x(D_{11}(x^{-1})\varphi_m(x)) \leqq M_x(|D_{11}(x^{-1})||\varphi_m(x)|) \leqq M_x(\varphi_m(x)) = 1.$$

Следовательно, выполнены свойства 1 и 2 из нашей теоремы. Используя (31), получаем из утверждения 4 теоремы 24, что для любой $F$, разложение Фурье которой не содержит других представлений, кроме данных, последовательность $\varphi_m \times F$ формально сходится к $F$. По теореме 21 эта последовательность содержится в компактном множестве $((\mathfrak{R}_F)_{\text{conv}})_{cl}$. Тем самым мы можем применить теорему 28, и утверждение 3 доказано.

Вторая половина утверждения теоремы 30 непосредственно вытекает из первой половины.

Определение 11. *Совокупность неприводимых нормальных представлений будет называться модулем $\mathfrak{M}$, если она содержит вместе с любым представлением комплексно-сопряженное к нему и ряд Фурье произведения двух любых коэффициентов представления не содержит никаких других представлений, кроме данных*[2]. *Модуль будем называть счетным, если он содержит конечное или счетное число представлений.*

Лемма 3. *Всегда существует минимальный модуль, содержащий данное множество представлений. Если это множество счетно, то и минимальный модуль является счетным.*

---

[2] Если $D^M$ и $D^N$ — любые два нормальных представления, то в том смысле, в котором эти символы используются в теории представлений групп, прямое произведение $D^M D^N$ есть конечная сумма $\Sigma_p c_p^{MN} D^p$ ($c_p^{MN}$ — композиционные коэффициенты). Следовательно, произведение любых двух коэффициентов представлений имеет конечное разложение Фурье.

Рассмотрим все конечные подсистемы данного множества коэффициентов представления и комплексно-сопряженных им. Построим всевозможные произведения их степеней. Тогда множество представлений, содержащихся в рядах Фурье всех таких произведений, составляет искомый модуль.

Определение 12. *Пусть дан модуль $\mathfrak{M}$. Будем обозначать через $\{\mathfrak{M}\}$ множество из $A_p$, состоящее из таких функций, разложение Фурье которых не содержит других представлений, кроме принадлежащих $\mathfrak{M}$.*

Теорема 31. *Пусть дан модуль $\mathfrak{M}$. Множество $\{\mathfrak{M}\}$ обладает следующими свойствами:*

1. *Если $F(x)$ содержится в $\{\mathfrak{M}\}$, то любая $F(xa)$ принадлежит $\{\mathfrak{M}\}$.*
2. *Если $F(x)$ содержится в $\{\mathfrak{M}\}$, то любая $F(ax)$ принадлежит $\{\mathfrak{M}\}$.*
3. *Если $F(x)$ содержится в $\{\mathfrak{M}\}$, то любая $\alpha F(x)$ принадлежит $\{\mathfrak{M}\}$.*
4. *Если $F(x)$ и $G(x)$ содержатся в $\{\mathfrak{M}\}$, то $F(x) \pm G(x)$ принадлежат $\{\mathfrak{M}\}$.*
5. *Если $F_1, F_2, \ldots$ содержатся в $\{\mathfrak{M}\}$ и если $F$ — предел последовательности $F_n$, то $F$ принадлежит $\{\mathfrak{M}\}$.*
6. *Если $f_1, \ldots, f_n$ — числовые функции из $\{\mathfrak{M}\}$ и $F(u_1, \ldots, u_n)$ — числовая функция, которая равномерно непрерывна по совокупности $u_1, \ldots, u_n$, то $F(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ тоже содержится в $\{\mathfrak{M}\}$.*
7. *Если хотя бы одна из двух функций $\alpha(x)$, $F(x)$ содержится в $\{\mathfrak{M}\}$, то $\alpha \times F(x)$ принадлежит $\{\mathfrak{M}\}$ ($\alpha(x)$ — числовая).*

Свойства 1—5 легко вытекают из формальных свойств разложения Фурье, 7 сразу вытекает из утверждения 4 теоремы 24. Что касается свойства 6, то если $f$ и $g$ являются числовыми конечными комбинациями представлений из $\{\mathfrak{M}\}$, то $\bar{f}$ и $fg$ согласно определению $\{\mathfrak{M}\}$ тоже принадлежат $\{\mathfrak{M}\}$. Применяя теорему об аппроксимации и свойство 5, получаем, что то же самое имеет место для $\bar{f}$ и $fg$ при любых числовых функциях $f$, $g$ из $\{\mathfrak{M}\}$ Следовательно, свойство 6 имеет место, если $F(u_1, \ldots, u_n)$ есть полином от $u_1, \ldots, u_n$ и комплексно-сопряженных им величин. Если $F(u_1, \ldots, u_n)$ равномерно непрерывные на образе $f_1, \ldots, f_n$, который является ограниченным множеством, так как $f_1, \ldots, f_n$ п.п., то $F(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ есть равномерный предел полиномов от $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ и комплексно-сопряженных им функций. Используя теперь 5, получаем доказательство 6.

Теорема 32. *Если $\mathfrak{M} = (D^1, D^2, \ldots)$ — счетный модуль, то в $\{\mathfrak{M}\}$ существует последовательность специальных весовых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, такая, что:*

(i) $\varphi_m = \sum_{N=1}^{\infty} s^N r_N^m \left(\sum_{\tau=1}^{s^N} D_{\tau\tau}^N\right)$;

(ii) $0 \leqq r_N^m \leqq 1, \quad \lim\limits_{m\to\infty} r_N^m = 1.$

Так же как при доказательстве теоремы 30, возьмем $\varepsilon_N \neq 0$ так, что ряд (27) равномерно сходится, и построим указанные там специальные весовые функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

Согласно теореме 30 эти $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ обладают свойствами (i), (ii) из нашей теоремы. Поэтому нужно доказать только, что они принадлежат $\{\mathfrak{M}\}$.

Так как $f(x)$ принадлежит $\{\mathfrak{M}\}$, то для любого конечного подмножества $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{G}$ все $f(xa_1), \ldots, f(xa_n)$ также принадлежат $(\mathfrak{M})$. То же самое имеет место для непрерывной функции от них

$$\mathrm{Max}\,(|f(xa_1) - f(a_1)|, \ldots, |f(xa_n) - f(a_n)|) = \underset{y=a_1,\ldots,a_n}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,(|f(xy) - f(y)|)$$

Поскольку $f(z)$ почти периодична, можно выбрать последовательность таких множеств $a_1, \ldots, a_n$, что она равномерно сходится к функции сдвига

$$t(x) = \underset{y \in \mathfrak{G}}{\mathrm{l.u.b.}} (|f(xy) - f(y)|).$$

Поэтому $t(x)$ и $\psi_\varepsilon(x) = \omega_\varepsilon(t(x))$ из теоремы 22, являющаяся непрерывной функцией от $t(x)$, а также $\psi(x) = \psi_\varepsilon(x)/M_x\psi_\varepsilon(x)$ принадлежат $\{\mathfrak{M}\}$.

Функция $\chi_1(x)$ из леммы 2 содержит только такие представления, которые входят в ряд Фурье функции $\psi(x)$. Поэтому она тоже принадлежит $\{\mathfrak{M}\}$, а вместе с ней и $\chi(x)$. То же самое имеет место для $\chi$ из теоремы 22, а также для $\chi_1, \chi_2, \ldots$, рассматривавшихся в доказательстве теоремы 30, и для $\psi_1, \psi_2, \ldots$, так как они содержат только такие представления, которые входят в ряды Фурье соответствующих функций $\chi_1, \chi_2, \ldots$

Наконец, отсюда следует, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \subset \{\mathfrak{M}\}$, и тем самым доказательство закончено.

Теорема 33. (Теорема отделимости.) *Пусть $F$ — почти периодическая функция с разложением Фурье*

$$\sum_D \left(s_D \sum_{\rho,\sigma=1}^{s_D} f_{D_{\rho\sigma}} D_{\rho\sigma}\right) \tag{32}$$

*и пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный модуль. Тогда существует почти периодическая функция, которую мы обозначим через $F_{\mathfrak{M}}$, разложение Фурье которой состоит в точности из тех членов*

$$s_D \sum_{\rho,\sigma=1}^{s_D} f_{D_{\rho\sigma}} D_{\rho\sigma} \tag{33}$$

*из (32), для которых $D$ содержится в $\mathfrak{M}$. Кроме того, $F_{\mathfrak{M}} \prec F$.*

Данный модуль $\mathfrak{M}$ не обязан, вообще говоря, быть счетным, но мы можем заменить его на счетный модуль, порожденный входящими в (32) представлениями из $\mathfrak{M}$. Следовательно, можно считать $\mathfrak{M}$ счетным. Пусть он содержит представления $D^1, D^2, \ldots$ С помощью специальных весовых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из теоремы 32 построим функции $\varphi_1 \times F, \varphi_2 \times F, \ldots$ По теореме 21 все функции $\varphi_m \times F \prec F$. Используя свойства $\varphi_m$, получаем, что последовательность $\varphi_m \times F$ является формально сходящейся. По теореме 28 последовательность $\varphi_m \times F$ сходится к предельной функции $f_{\mathfrak{M}}$, а согласно теоремам 24, 4 и 32 ряд Фурье функций $f_{\mathfrak{M}}$ имеет требуемый вид.

Теорема 34. *Пусть $F$— почти периодическая функция, а $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ — последовательность монотонно возрастающих модулей, сумма которых содержит все представления, входящие в разложение $F$.*

*Тогда последовательность функций*

$$F_{\mathfrak{M}_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

*сходится к $F$.*

Функции (34) формально сходятся к $F$, и все они $\prec F$. Согласно теореме 28 $F$ есть предел этой последовательности.

Теорема 35. (Теорема разложения.) *Пусть $F$ — почти периодическая функция и пусть представления, входящие в разложение $F$, можно разбить*

*на последовательность систем* $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ *таким образом, что при любом* $k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *минимальный модуль, содержащий* $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_k)$, *не имеет элементов, входящих в* $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_{k+1}, \mathfrak{Z}_{k+2}, \ldots)$. *Для любого* $k$ *существует почти периодическая функция* $F_{\mathfrak{Z}_k}$, *разложение Фурье которой состоит в точности из тех членов* (33) *суммы* (32), *для которых* $D$ *содержится в* $\mathfrak{Z}_k$. *Ряд* $F_{\mathfrak{Z}_1} + F_{\mathfrak{Z}_2} + \ldots$ *сходится к* $F$.

Если обозначить минимальный модуль, содержащий $\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_k$, через $\mathfrak{M}_k$, то нужная функция $F_{\mathfrak{Z}_k}$ равна $F_{\mathfrak{M}_k}$ при $k = 1$ и $F_{\mathfrak{M}_k} - F_{\mathfrak{M}_{k-1}}$ при $k \geqq 2$, после чего наша теорема сводится к теореме 34.

## Часть IV

## ПРИМЕНЕНИЯ К ГИЛЬБЕРТОВУ ПРОСТРАНСТВУ

В этой части мы будем предполагать, что $L$ есть либо гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, либо пространство $\mathfrak{B}$ всех ограниченных преобразований $\mathfrak{H}$. Будем рассматривать эти пространства с помощью различных топологий, которые изучались в гл. IV из [4][10] или в цитируемых там работах. Согласно тому, рассматриваем ли мы $\mathfrak{H}$ с топологией, задаваемой окрестностями из $\mathfrak{U}_1$ или из $\mathfrak{U}_2$, будем обозначать $\mathfrak{H}$ соответственно через $\mathfrak{H}_1$ или $\mathfrak{H}_2$. Через $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_5$ будем обозначать $\mathfrak{B}$ с топологией, задаваемой системой окрестностей соответственно $\mathfrak{U}_3$, $\mathfrak{U}_4$ и $\mathfrak{U}_5$.

Теорема 36. ($\alpha$) *Если* $F(x) \in \mathfrak{H}^{\mathfrak{S}}$ *почти периодична в* $\mathfrak{H}_1^{\mathfrak{S}}$, *то она почти периодична и в* $\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{S}}$.

($\beta$) *Если* $F(x) \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{S}}$ *почти периодична в* $\mathfrak{B}_3^{\mathfrak{S}}$, *то она почти периодична и в* $\mathfrak{H}_4^{\mathfrak{S}}$.

($\gamma$) *Если она почти периодична в* $\mathfrak{B}_4^{\mathfrak{S}}$, *то почти периодична и в* $\mathfrak{B}_5^{\mathfrak{S}}$.

($\delta$) $F(x)$ *почти периодична в* $\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{S}}$ *тогда и только тогда, когда числовая функция* $(F(x), g)$, *являющаяся скалярным произведением* $F(x)$ *и постоянной* $g \in \mathfrak{H}$, *почти периодична при любой* $g \in \mathfrak{H}$.

($\varepsilon$) $F(x)$ *почти периодична в* $\mathfrak{B}_4^{\mathfrak{S}}$ *тогда и только тогда, когда функция* $F(x)f$ (*т. е. значение* $F(x)$, *действующее на фиксированную* $f \in \mathfrak{H}$) *почти периодична в* $\mathfrak{H}_1^{\mathfrak{S}}$ *при любой* $f \in \mathfrak{H}$.

($\zeta$) $F(x)$ *почти периодична в* $\mathfrak{B}_5^{\mathfrak{S}}$ *тогда и только тогда, когда* $F(x)f$ *почти периодична в* $\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{S}}$ *при любой* $f \in \mathfrak{H}$, *т. е. тогда и только тогда, когда числовая функция* $(F(x)f, g)$ *почти периодична для любой пары* $f, g \in \mathfrak{H}$.

К ($\alpha$). Топология $\mathfrak{H}_2$ слабее топологии $\mathfrak{H}_1$. Более точно: любой $U_2 \in \mathfrak{U}_2$ соответствует $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, такая, что $U_1 \subset U_2$. Следовательно, если множество $S \subset \mathfrak{H}$ вполне ограничено в $\mathfrak{H}_1$, то оно вполне ограничено и в $\mathfrak{H}_2$. Тем самым наше предложение доказано, если воспользоваться определением 1.

К ($\beta$) и ($\gamma$) можно применить те же рассуждения, что и к ($\alpha$).

К (δ). Пусть $S$ — любое множество из $\mathfrak{H}_b^{\mathfrak{S}}$. Если $g \in \mathfrak{H}$, то обозначим через $S_g$ множество числовых функций $(F(x), g)$, где $F \in S$, а для любого конечного числа элементов $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{H}$ обозначим через $S_{g_1,\ldots,g_n}$ множество $n$-мерных вектор-функций с компонентами $(F(x), g_1), \ldots (F(x), g_n)$, где $F \in S$. Легко видеть, что $S$ вполне ограничено в $\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{S}}$ тогда и только тогда, когда все множества $S_{g_1,\ldots,g_n}$ вполне ограничены. С другой стороны, мы должны доказать, что $S$ вполне ограничено в $\mathfrak{H}_2$ тогда и только тогда, когда все $S_g$ вполне ограничены. Поэтому достаточно доказать, что при фиксированном $S$ полная ограниченность всех множеств $S_g$ влечет полную ограниченность всех множеств $S_{g_1,\ldots,g_n}$. Это вытекает из теоремы 9 в [4][4], если учесть, что вектор $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ может рассматриваться как непрерывная функция его компонент $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в естественной топологии векторных пространств.

К (ε) и (ζ) применимы такие же рассуждения, что и к (δ).

Теорема 37. *Пусть $F(x)$ — почти периодическая функция, ее разложение Фурье таково (во всей этой главе мы будем писать коэффициенты Фурье $\alpha_{\rho\sigma}(D)$ без множителей $s_D$ степени $D$):*

$$F(x) \sim \sum_{D,\rho,\sigma} \alpha_{\rho\sigma}(D)\, D_{\rho\sigma}(x). \tag{35}$$

Если $F(x)$ принадлежит $\mathfrak{B}^{\mathfrak{S}}$, то $\alpha_{\rho\sigma}(D) \in \mathfrak{H}$ и $(F(x), g)$ при любой $g \in \mathfrak{H}$ имеет разложение Фурье

$$(F(x), g) \sim \sum_{D,\rho,\sigma} (\alpha_{\rho\sigma}(D), g)\, D_{\rho\sigma}(x). \tag{36}$$

Если $F(x)$ принадлежит $\mathfrak{B}^{\mathfrak{S}}$, то $\alpha_{\rho\sigma}(D) \in \mathfrak{B}$. Для любой $f \in \mathfrak{H}$ функция $F(x) f$ имеет разложение Фурье

$$F(x) f \sim \sum_{D,\rho,\sigma} (\alpha_{\rho\sigma}(D) f)\, D_{\rho\sigma}(x), \tag{37}$$

и при любых $f,\ g \in \mathfrak{H}$ разложение Фурье $(F(x) f, g)$ имеет вид

$$(F(x) f, g) \sim \sum_{D,\rho,\sigma} (\alpha_{\rho\sigma}(D) f, g)\, D_{\rho\sigma}(x). \tag{38}$$

Принимая во внимание определение $\alpha_{\rho\sigma}(D)$, достаточно доказать

$$M_x(F(x), g) = (M_x F(x), g) \tag{39}$$

для случая (36) и

$$M_x(F(x) f) = (M_x F(x)) f \tag{40}$$

для случая (37); (38) получается их комбинированием.

По отношению к сильной топологии ($\mathfrak{H}_1$ или $\mathfrak{B}_4$) среднее обладает всеми свойствами среднего в слабой топологии ($\mathfrak{H}_2$ или $\mathfrak{B}_5$). Следовательно, в силу единственности среднего (теорема 17) достаточно рассмотреть слабую топологию. В этом случае соотношения (39), (40) снова получаются при помощи приложения теоремы 17, так как $(M_x F(x), g)$ и $(M_x F(x)) f$ обладают свойствами, гребуемыми в условиях этой теоремы.

Теорема 38. *Если $F(x)$ — почти периодическая функция класса $\mathfrak{B}_\nu^{\mathfrak{S}}$ ($\nu = 3, 4, 5$) и $\alpha \in \mathfrak{B}$, то $\alpha F(x)$ и $F(x)\alpha$ ($\alpha F$ и $F\alpha$ — операторные произведения $F$ и $\alpha$) — тоже почти периодические функции этого же класса и разложения Фурье $\alpha F$ и $F\alpha$ могут быть получены из разложения Фурье $F(x)$ путем почленного умножения на $\alpha$ справа или слева.*

Первая половина теоремы вытекает из того факта, что при фиксированном $\alpha$ $\alpha F$ и $F\alpha$ — непрерывные функции $F$ в каждой из топологий $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_5$. Вторая половина (в случае $\alpha F$) вытекает из формулы (38) теоремы 37, если в формуле из нашего утверждения, связывающей разложения $\alpha F$ и $F$, мы применим (38) и затем заменим $F$, $f$, $g$ на $\alpha F$, $f$, $g$ в члене, стоящем слева, и на $F$, $f$, $\alpha^* g$ ($\alpha^*$ — сопряженная $\alpha$ величина) в члене, стоящем справа, и сравним результаты. Для $F\alpha$ заменим $F$, $f$, $g$ соответственно на $F_\alpha$, $f$, $g$ и $F$, $\alpha f$, $g$.

Теорема 39. *Пусть $F(x)$ — почти периодическая функция из $\mathfrak{B}_5^{\mathfrak{S}}$ и ее разложение Фурье задается выражением (35). Если $F(x)$ — представление группы при помощи унитарных преобразований, т. е. если $F(xy) = F(x)F(y)$, $F(1) = 1$, $F(x^{-1}) = F(x)^*$, то мы имеем следующее:*

i) *$F(x)$ почти периодична как функция из $\mathfrak{B}_4^{\mathfrak{S}}$; более того, $F$ есть предел в топологии $\mathfrak{B}_4$ последовательности*

$$F_m = \sum_{N=1}^{m} \Bigl( \sum_{\rho,\sigma=1}^{s_{D^N}} \alpha_{\rho\sigma}(D^N)\, D^N_{\rho\sigma}(x) \Bigr) \tag{41}$$

ii) *коэффициенты Фурье обладают свойствами*

$$\alpha_{\rho\sigma}(D)\,\alpha_{\tau\nu}(E) = 0, \qquad \text{если } D \neq E, \tag{42}$$

$$\alpha_{\rho\sigma}(D)\,\alpha_{\tau\nu}(D) = \delta_{\sigma\tau}\alpha_{\rho\nu}(D), \qquad \rho, \sigma, \tau, \nu = 1, \dots, s_D, \tag{43}$$

$$\alpha_{\rho\sigma}(D)^* = \alpha_{\sigma\rho}(D), \qquad \rho, \sigma = 1, \dots, s_D; \tag{44}$$

iii) *система операторов $\alpha_{\rho\rho}(D)$ есть разложение единицы, т. е. каждый из них есть проекционный оператор, любые два ортогональны и их сумма равна тождественному оператору.*

Обратно, если множество элементов $\alpha_{\rho\sigma}(D)$ принадлежащих $\mathfrak{B}$, удовлетворяет условиям ii и iii, то ряд (35) есть разложение Фурье почти периодической функции $F(x)$, обладающей требуемыми свойствами.

Замечание относительно теоремы. Перед доказательством теоремы мы хотим указать на алгебраический аспект утверждения.

Так как $\alpha_{\rho\rho}(D)$ — проектор, то он соответствует замкнутому линейному многообразию $\mathfrak{M}_\rho^D$. Выберем ортонормальную систему, определяющую $\mathfrak{M}_\rho^D : \psi_{11}^D, \psi_{12}^D, \dots$ (эта последовательность пуста, конечна или счетна). Далее, из (43) и (44) следует

$$\alpha_{\rho 1}(D)^*\,\alpha_{\rho 1}(D) = \alpha_{11}(D), \qquad \alpha_{\rho 1}(D)\,\alpha_{\rho 1}(D)^* = \alpha_{\rho\rho}(D),$$

а это означает, что $\alpha_{\rho 1}(D)$ отображает $\mathfrak{M}_1^D$ на $\mathfrak{M}_\rho^D$ взаимно однозначно и унитарно, в то время как $\alpha_{\rho 1}(D) f \equiv 0$, если $f$ ортогональна $\mathfrak{M}_1^D$. Поэтому если положить $\psi_{\rho\nu}(D) = \alpha_{\rho 1}(D)\,\psi_{1\nu}(D)$, то $\psi_{\rho 1}(D)$, $\psi_{\rho 2}(D), \dots$ определяют $\mathfrak{M}_\rho^D$. Согласно (43) имеем $\alpha_{\rho\gamma}(D)\,\alpha_{\nu 1}(D) = \alpha_{\rho 1}(D)$, и отсюда следует, что $\alpha_{\rho\sigma}(D)\,\psi_{\sigma\nu}(D) = \psi_{\rho\nu}(D)$.

Так как согласно условию iii $\sum_{D,\rho} \alpha_{\rho\rho}(D) = 1$, то совокупность всех $\mathfrak{M}_\rho^D$ определяет $\mathfrak{H}$, и поскольку согласно (42) — (44) $\alpha_{\rho\sigma}(D)^* \alpha_{\tau\nu}(E) = 0$, если $D \neq E$ или $\sigma \neq \tau$, то $\mathfrak{M}_\rho^D$ ортогональны между собой. Следовательно, $\psi_{\rho\nu}(D)$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathfrak{H}$. Для этой системы получаем

$$\alpha_{\tau\nu}(E)\,\psi_{\rho\nu}(D) = \begin{cases} 0, & \text{если } D \neq E \text{ или } \nu \neq \rho, \\ \psi_{\tau\nu}(D), & \text{если } D = E,\ \nu = \rho. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что $\alpha_{\tau\nu}(D)$ образуют разложение Фурье функции $F(x)$, получаем формулы

$$F(x)\,\psi_{\rho\nu}(D) = \sum_{\tau=1}^{s_D} D_{\tau\rho}(x)\,\psi_{\tau\nu}(D).$$

Тем самым наша теорема утверждает, что представление $F(x)$ может быть разложено на конечное число неприводимых представлений $D(x)$. Подпространства, соответствующие этому разложению, определяются с помощью

$$\psi_{1\nu}(D),\ \psi_{2\nu}(D), \ldots, \psi_{s_D\nu}(D) \quad \text{для всех } D,\ \nu. \tag{45}$$

Перейдем к доказательству. Пусть $F(x)$ удовлетворяет всем предположениям, $F(x, y)$ есть почти периодическая функция от $(x, y)$ и при любом $y$ — почти периодическая функция от $x$. Из аппроксимационных свойств разложения Фурье вытекает, что разложение Фурье $F_y(x) = F(xy)$ как функция от $x$ может быть формально получено из ряда (35), а именно

$$F_y(x) \sim \sum_{D,\rho,\sigma} \alpha_{\rho\sigma}(D;\, y)\, D_{\rho\sigma}(x), \tag{46}$$

где

$$\alpha_{\rho\sigma}(D;\, y) = \sum_{\tau=1}^{s_D} \alpha_{\rho\tau}(D)\, D_{\sigma\tau}(y). \tag{47}$$

С другой стороны, $F_y(x) = F(x)\,F(y)$ и по теореме 38

$$F_y(x) \sim \Sigma\alpha_{\rho\sigma}(D)\, F(y)\, D_{\rho\sigma}(x). \tag{48}$$

Сравнивая (46) и (48), получаем для всех $D$, $\rho$, $\sigma$

$$\alpha_{\rho\sigma}(D)\, F(y) = \sum_{\tau=1}^{s} \alpha_{\rho\tau}(D)\, D_{\sigma\tau}(y). \tag{49}$$

Возьмем теперь $y$ переменным и снова применим теорему 38. Это дает соотношения (42) и (43). Для доказательства (44) нам нужно только сравнить соотношения

$$F(x^{-1}) \sim \Sigma\alpha_{\rho\sigma}(D)\, D_{\rho\sigma}(x^{-1}) = \Sigma\alpha_{\rho\sigma}(D)\, \overline{D_{\sigma\rho}(x)}, \tag{50}$$

$$F(x)^* \sim \Sigma\alpha_{\rho\sigma}(D)^*\, \overline{D_{\rho\sigma}(x)} \tag{51}$$

(которые вытекают из аппроксимационных свойств рядов Фурье) и использовать то, что представления $\{\overline{D}_{\rho\sigma}\}$ тоже образуют множество неприводимых нормальных представлений $\mathfrak{G}$.

Если применить (44) при $\rho = \sigma$, то получим, что $\alpha_{\rho\rho}(D)$ самосопряжен, а (43) дает равенство $(\alpha_{\rho\rho}(D))^2 = \alpha_{\rho\rho}(D)$. Следовательно, каждый $\alpha_{\rho\rho}(D)$ есть

проектор. Из (42) и (43) вытекает, что любые два из них ортогональны. Поэтому любое конечное число их, а также их (бесконечных) сумм снова есть проектор. Нужно еще доказать, что $\sum_{D,\rho} \alpha_{\rho\rho}(D)$ есть единица и что выполняется условие i.

Пусть $f$ — любой элемент из $\mathfrak{H}$. Вычислим разность

$$F_p(x) f - F_q(x) f, \qquad p > q,$$

где $F_p(x)$ определена при помощи (41). Пусть $D$ — любое представление, входящее в $F_p(x) f - F_q(x) f$. Если

$$\beta^D(x) = \sum_{\rho,\sigma=1}^{s_D} \alpha_{\rho\sigma}(D) D_{\rho\sigma}(x),$$

то

$$\| \beta(x) f \|^2 = (\beta(x) f, \beta(x) f) = \sum_{\rho,\sigma,\tau,\nu=1}^{s_D} D_{\rho\sigma}(x) \overline{D_{\tau\nu}(x)} (\alpha_{\rho\sigma}(D) f, \alpha_{\tau\nu}(D) f).$$

Но

$$(\alpha_{\rho\sigma}(D) f, \alpha_{\tau\nu}(D) f) = (\alpha_{\tau\nu}(D)^* \alpha_{\rho\sigma}(D) f, f) = (\alpha_{\nu\tau}(D) \alpha_{\rho\sigma}(D) f, f) = \delta_{\tau\rho}(\alpha_{\nu\sigma}(D) f, f).$$

Следовательно,

$$\| \beta(x) f \|^2 = \sum_{\nu,\sigma=1}^{s_D} \left( \sum_{\tau=1}^{s_D} D_{\tau\sigma}(x) \overline{D_{\tau\nu}(x)} \right) (\alpha_{\nu\sigma}(D) f, f) =$$

$$= \sum_{\nu,\sigma=1}^{s_D} \delta_{\nu\sigma}(\alpha_{\nu\sigma}(D) f, f) = \sum_{\rho=1}^{s_D} (\alpha_{\rho\rho}(D) f, f) = \sum_{\rho=1}^{s_D} \| \alpha_{\rho\rho}(D) f \|^2.$$

Поэтому

$$\| F_p(x) f - F_q(x) f \|^2 = \sum_{N=q+1}^{p} \sum_{\rho=1}^{s_{D^N}} \| \alpha_{\rho\rho}(D^N) f \|^2. \qquad (52)$$

Так как $\alpha_{\rho\rho}(D)$ — взаимно ортогональные проекторы и правая часть (52) не зависит от $x$, то отсюда легко вытекает, что последовательность функций $F_m(x)$ равномерно сходится в топологии $\mathfrak{B}_4$. Поэтому функция $F(x)$ есть предел последовательности (41) и она почти периодична в классе $\mathfrak{B}_4^{\mathfrak{S}}$. Далее,

$$F(1) = \lim_{m \to \infty} F_m(1) = \lim_{m \to \infty} \sum_{N=1}^{m} \sum_{\rho=1}^{s_{D^N}} \alpha_{\rho\rho}(D^N) = \sum_{D,\rho} \alpha_{\rho\rho}(D).$$

Но согласно предположению $F(1) = 1$, и тем самым доказана последняя оставшаяся часть условий iii

Обратно, пусть множество элементов $\alpha_{\rho\sigma}(D)$ из $\mathfrak{B}$ удовлетворяет уловиям ii и iii. Аналогично предыдущему можно вывести отсюда соотношение (52). Поэтому последовательность $F_m(x)$, определенная в (41), сходится в топологии $\mathfrak{B}_4$ к почти периодической функции $F(x)$, разложение Фурье которой есть равномерно сходящийся ряд (35). Групповые свойства $F(x)$ легко проверяются, исходя из вида ее ряда (35) и используя известные свойства ii, iii.

Теорема 40. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ — метрическое, локально-компактное сепарабельное пространство, в котором произведение $xy$ является непрерывной функцией от $(x, y)$. Мы рассмотрим на $\mathfrak{G}$ правоинвариантную меру Хаара и гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, состоящее из всех измеримых по Лебегу функ-*

*ций на $\mathfrak{G}$, интегрируемых с квадратом. Пусть $\mathfrak{T}(x)$ для любого $x$ означает унитарный оператор, который преобразует любой элемент $f(t) \in \mathfrak{H}$ в $f(tx)$.*

*Тогда, для того чтобы $\mathfrak{G}$ была компактной, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{T}$ был бы почти периодической функцией в $\mathfrak{B}_5^{\mathfrak{S}}$.*

Очевидно, что $\mathfrak{T}(x)$ обладает следующими свойствами:

$$\mathfrak{T}(x)^{-1} = \mathfrak{T}(x)^*, \qquad \mathfrak{T}(xy) = \mathfrak{T}(x)\,\mathfrak{T}(y), \qquad \mathfrak{T}(1) = 1.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{T}(x)$ непрерывно зависит от $x$ в топологии $\mathfrak{B}_5$.

Если $\mathfrak{G}$ компактна, то любая непрерывная функция почти периодична, и тем самым необходимость нашего условия доказана. Обратно, пусть $\mathfrak{T}(x)$ — почти периодическая функция. Рассмотрим ее разложение Фурье и полную ортонормированную систему $\psi_{\rho\nu}$ $(D)$, построенную в замечании к теореме 39. Возьмем одну из ее непустых подсистем (45) и обозначим соответствующие функции через $\psi_1, \ldots$ $\ldots, \psi_s$. Согласно последнему соотношению из этого замечания имеем

$$F(x)\,\psi_p(t) = \psi_p(xt) = \sum\nolimits_\tau D_{\tau\rho}(x)\,\psi_\tau(t) \tag{53}$$

всюду, за исключением, быть может, зависящего от $x$ $t$-множества меры 0. По теореме Фубини существует значение $t = t_0$, при котором (53) выполняется для всех $x$, кроме множества меры 0. Так как $D(x)$ унитарен, то

$$\sum\nolimits_\rho |\psi_\rho(xt_0)|^2 = \sum\nolimits_\rho |\psi_\rho(t_0)|^2 = C.$$

Интегрируя по $\mathfrak{G}$, получаем в левой части $s_D$, а в правой части умноженную на $C$ меру $\mathfrak{G}$. Следовательно, если $s_D > 0$, то $C \neq 0$, и тем самым мера $\mathfrak{G}$ конечна. Если же мера $\mathfrak{G}$ конечна, то не существует числа $\varepsilon_0 > 0$ и бесконечного множества точек из $\mathfrak{G}$, расстояние между любыми двумя из которых больше $\varepsilon_0$. Поэтому $\mathfrak{G}$ вполне ограничена. Так как $\mathfrak{G}$, кроме того, локально-компактна, то она полна. Отсюда вытекает компактность $\mathfrak{G}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann J. von.* Almost periodic functions in a group. I.— Trans. Amer. Math. Soc., 1934, vol. 36, p. 445—492. (Рус. пер. см. наст. кн.)
2. *Bochner S.* Abstrakte fastperiodische Funktionen.— Acta math., 1933, bd 61, s. 149—184.
3. *Bochner S.* Fastperiodische Lösungen der Wellengleichung.— Acta math., 1934, bd 62, s.227— 237
4. *Neumann J. von.* On complete topological spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 37, p. 1—20.
5. *Bochner S.* Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I.— Math. Ann., 1926, Bd. 96, S. 119—147.

# К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕРЫ*

## ВВЕДЕНИЕ

1. Общая проблема линейной меры[1] (в дополнение к несколько более широкой постановке вопроса, имеющейся в работе [1] А. Лебега [1]) может быть сформулирована следующим образом.

Можно ли сопоставить каждому ограниченному линейному множеству $\mathfrak{M}$ неотрицательное число, удовлетворяющее условиям:

α) $\mu(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots) = \mu(\mathfrak{M}_1) + \mu(\mathfrak{M}_2) + \ldots$, где $\mathfrak{M}_1, \ldots$ — произвольная конечная или счетная последовательность ограниченных попарно непересекающихся множеств.

β) Если множество $\mathfrak{M}$ есть трансляция[2] множества $\mathfrak{N}$ (оба ограничены), то $\mu(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{N})$.

Ф. Хаусдорф [3] доказал, что условия α, β исключают друг друга, если не считать тривиального решения $\mu(\mathfrak{M}) \equiv 0$. В самом деле, например, лебегова мера определена только для так называемых измеримых множеств и не все множества измеримы.

Учитывая это, естественно рассмотреть более слабое условие вместо α, а именно:

α*) Для любой конечной последовательности $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_m$ ограниченных попарно непересекающихся множеств (достаточно положить $m = 2$) выполнено

$$\mu(\mathfrak{M}_1 + \ldots + \mathfrak{M}_m) = \mu(\mathfrak{M}_1) + \ldots + \mu(\mathfrak{M}_m).$$

Долгое время не было ясно, существует ли мера, удовлетворяющая условиям α* и β, пока исследования Банаха не дали решения; разумное обобщение условий α и β привело к успеху. Вместо линейных множеств можно поставить вопрос для плоских, пространственных множеств или множеств в $n$-мерном евклидовом пространстве и для них сформулировать общую проблему. О переносе условий α и β, учитывая случай размерности 1, думать не приходится, однако можно попытаться сделать это для условий α* и β.

2. Формулировка задачи в $n$-мерном пространстве выглядит так: каждому ограниченному множеству $\mathfrak{M}$ в евклидовом пространстве $R_n$ размерности $n$ сопоставить неотрицательное число $\mu(\mathfrak{M})$ так, что выполняются условия:

$\alpha_n^*$) Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ не пересекаются, то $\mu(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) = \mu(\mathfrak{M}) + \mu(\mathfrak{N})$[4].

---

* Fund. math., 1929, t. 13, s. 73—116.

[1] Лебег ставит вопрос об интеграле от произвольных ограниченных функций по любому конечному отрезку, удовлетворяющему обычным условиям. Его вопрос сводится к вопросу о мере (см. далее).

[2] Преобразование координат $x$ по формуле $x' = x + a$, $a$ — константа.

[3] См. [2, с. 401].

[4] Вместо двух множеств можно рассматривать любое конечное число.

$\beta_n$) Если ограниченное множество $\mathfrak{N}$ получается из $\mathfrak{M}$ преобразованием $R_n$ в себя, сохраняющим длины[5], то $\mu(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{N})$.

Вместо $R_n$ можно рассматривать единичную сферу $K_n$[6]. В этом случае $\mu(\mathfrak{M})$ нужно определять для всех подмножеств $K_n$, а в условии $\beta_n$ рассматривать лишь преобразование, переводящее $K_n$ в себя и сохраняющее длины. Тривиальное решение $\mu(\mathfrak{M}) \equiv 0$, естественно, нужно исключить в случае $R_n$ условием $\mu(\overline{\mathfrak{M}}) > 0$, где $\overline{\mathfrak{M}}$ — единичный куб в $R_n$.[7] (или соответственно все $K_n$); с помощью умножения на положительную константу такая мера может быть нормирована условием

$\gamma_n$) $\mu(\overline{\mathfrak{M}}) = 1$.

Очевидно, что если существуют нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям $\alpha_n^*$, $\beta_n$ для $n \geqslant 3$, то тогда должны существовать также решения и для $K_3$, даваемые обычным ограничением на поверхность сферы[8].

Хаусдорф[9] показал с помощью метода, который будет далее предметом нашего внимания, что уже для $K_3$ условия $\alpha_n^*$, $\beta_n$ не являются совместными, тем самым в лучшем случае они выполнены для $n = 1, 2$. Для этих $R_n$ С. Банах показал, что $\alpha_n^*$ и $\beta_n$ совместны, т. е. дал доказательство существования неотрицательной аддитивной ортогонально-инвариантной меры как для прямой, так и для плоскости[10]

Таким образом, евклидово пространство меняет свой характер при переходе к размерности 3: для $n < 3$ существует общее понятие меры, а для $n \geqslant 3$ его уже нет!

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что внутренней причиной этого феномена (отсутствие меры при $n \geqslant 3$) в значительной мере является определенная теоретико-групповая особенность группы вращений. Но прежде всего мы должны проанализировать «парадокс Хаусдорфа» (отсутствие общей меры в $K_3$ и $R_n$, $n > 3$) и несколько результатов Банаха и Тарского, относящихся к этому парадоксу.

3. Хаусдорф (см. [2, с. 469]) показал следующее: сферу $K_3$ можно разбить на множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, каждое из которых есть поворот другого на 120° относительно некоторой оси и в то же время каждое из них есть поворот на 180° относительно подходящей оси объединения двух других. Таким образом, мера каждого из этих

---

5 Такое преобразование имеет вид $x_i' = \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $\{a_{ij}\}$ — ортогональная матрица, а $a_1, \ldots, a_n$ — константы.

6 То есть $(n-1)$-мерное множество всех точек с условием $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

7 То есть множество всех точек: $0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$.

8 Если имеется мера $\mu$ на $R_n$, $n > 3$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n^*$ и $\beta_n$, то мера на $R_3$ может быть получена как ее ограничение на множества $\mathfrak{M} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{M}', 0 \leqslant x_k \leqslant 1, k \geqslant 4\}$. Тогда $\mu'(\mathfrak{M}') = \mu(\mathfrak{M})$. Далее, если имеется мера $\mu$ на $R_3$, то мера $\mu'$ на $K_3$ строится так: $\mu'(\mathfrak{M}') = \mu(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}'$ — произвольное множество в $K_3$, а $\mathfrak{M}$ — множество точек $\{(x_1, x_2, x_3): (x_1/r, x_2/r, x_3/r) \in \mathfrak{M}'\}$, $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $0 < r < 1$. Мера $\mu'$ удовлетворяет условиям, требуемым для мер на $K_3$.

9 См. [2, с. 469].

10 См. [3, с. 30—31].

множеств должна быть, с одной стороны, равна 1/3, а с другой — 1/2, что невозможно. Собственно, эти множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ образуют не все $K_3$, нужно добавить еще множество, состоящее из счетного числа точек; но счетные множества имеют меру 0 для всякой меры, удовлетворяющей условиям $\alpha_n^*$ и $\beta_n$, так что это обстоятельство несущественно.

Банах и Тарский смогли углубить этот «парадокс», используя весьма содержательный и глубокий метод доказательства, основанный на теореме эквивалентности Бернштейна—Кантора. При этом они привлекли понятие конечной равносоставленности [11]

Два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются равносоставленными, если существуют два разбиения этих множеств:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \ldots + \mathfrak{M}_k, \quad \mathfrak{M}_u \cap \mathfrak{M}_v = 0, \qquad u \neq v,$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \ldots + \mathfrak{N}_k, \quad \mathfrak{N}_u \cap \mathfrak{N}_v = 0, \qquad u = v,$$

где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{N}_2$, ... , $\mathfrak{M}_k$ и $\mathfrak{N}_k$ конгруэнтны, т. е. каждый есть образ второго при сохраняющем длины отображении. Банах и Тарский доказали, что как в $K_3$, так и в $R_n$, $n \geqslant 3$, любые два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ равносоставлены, если они ограничены и имеют внутренние точки. (В $R_1$ и $R_2$ это не так, поскольку Банах доказал существование общей меры, а равносоставленность двух множеств влечет равенство их мер.) Несуществование общей меры в $K_3$ и $R_n$, $n \geqslant 3$, следует из приведенного уточнения примера Хаусдорфа. Результат Банаха—Тарского приводит к дальнейшим замечательным парадоксам; например, шар единичного радиуса можно разбить на девять частей так, что существуют вращения, переводящие первые пять частей, равно как и последние четыре части, на весь шар!

Кроме того, это же утверждение показывает, что в $K_3$ (и в $R_n$, $n \geqslant 3$) не существует общей меры, даже если отбросить условие неотрицательности, поскольку всякое множество с внутренними точками ввиду $\alpha_n^*$ и $\beta_n$ должно иметь одинаковую меру, и следовательно, нулевую [12], то же относится и к разности этих множеств, а тем самым ко всем ограниченным множествам вообще [13].

4 Мы рассмотрели в пунктах 1—3 состояние общей теории меры на основе работ Хаусдорфа—Банаха—Тарского и в конце п. 2 приблизились к объяснению резкого перехода от размерностей $n = 1, 2$ к $n = 3, 4, \ldots$ Было сказано, что в последующем мы выясним то специальное теоретико-групповое свойство $R_n$, которое лежит в основе данного замечательного феномена. Чтобы сделать это более ясным, необходимо, однако, несколько обобщить постановку вопроса.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество [14], $\mathfrak{A}$ — его подмножество, $\mathfrak{G}$ — группа взаимно однозначных преобразований на себя [15].

Под общей неотрицательной аддитивной мерой на $\mathfrak{M}$, инвариантной относительно всех отображений из $\mathfrak{G}$ и нормированной посредством $\mathfrak{A}$, кратко [$\mathfrak{M}$,

---

[11] См. [4, с. 244], а также пункты 5, 6.

[12] Поскольку объединение двух таких множеств имеет ту же меру, что и каждое из них.

[13] Для «парадокса» Хаусдорфа неотрицательность меры существенна, так как там фигурирует счетное множество, мера которого равна нулю из-за неотрицательности меры.

[14] С произвольными элементами, т. е. абстрактное множество.

[15] Обозначим через $x$, $y$, ... элементы $\mathfrak{M}$, его подмножества через $\mathfrak{N}$, $\mathcal{P}$, ... ; $\sigma$, $\tau$ — преобразования $\mathfrak{M}$; $\sigma x$ — образ $x$; $\sigma\mathfrak{N}$ — образ $\mathfrak{N}$ под действием $\sigma$; $\sigma\tau$ — произведение преобразований.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}$]-мерой, мы понимаем сопоставление каждому подмножеству $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$[16] числа $\mu(\mathfrak{N}) \geqslant 0$, так что:

$\alpha'$) для непересекающихся $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$ $\mu(\mathfrak{N}+\mathfrak{P}) = \mu(\mathfrak{N}) + \mu(\mathfrak{P})$;

$\beta'$) для $\sigma$ из $\mathfrak{G}$ $\mu(\mathfrak{N}) = \mu(\sigma\mathfrak{N})$;

$\gamma'$ $\mu(\mathfrak{N}) = 1$[17].

Вопрос теперь, очевидно, в том, при каких условиях на тройку $(\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G})$ существует $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-мера.

Как известно, каждый элемент $\sigma$ из $\mathfrak{G}$ определяет взаимно однозначное преобразование $\mathfrak{G}$: всякому $\tau$ сопоставляется $\sigma\tau$. Покажем, что в случае, когда $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-мера существует, легко дать необходимые и достаточные условия существования $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меры[18]. Впрочем, это условие всегда выполнено, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$, так же как и в нашем примере, где $\mathfrak{M} = K_n$, $\mathfrak{A} = K_n$. Оно выполнено и в том случае, когда $\mathfrak{M} = R_n$, $\mathfrak{A}$ — единичный куб, а $\mathfrak{G}$ сохраняет лебегову меру (например, группа ортогональных преобразований) (см. примеч. 18).

Поэтому на первый план выдвигается задача о существовании $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-меры[19]. Это свойство можно считать свойством $\mathfrak{G}$ как абстрактной группы[20]. Группу будем называть измеримой, если она обладает этим свойством[[2]].

В этой работе с помощью обобщения метода Банаха доказывается следующее.

A. Всякая абелева группа $\mathfrak{G}$ измерима.

B. Если группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель $\mathcal{H}$, такой, что $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{G}/\mathcal{H}$ измеримы, то и $\mathfrak{G}$ измерима[21].

Для конечных групп A и B определяют в точности класс разрешимых групп. Обобщая это на бесконечные группы, можно сказать, что все разрешимые группы измеримы.

Результаты Банаха для прямой и плоскости становятся ясными: на прямой все сводится к группе трансляций, которая является абелевой; на плоскости группа трансляций образует абелев нормальный делитель в группе всех сохраняющих длины (и ориентацию) преобразований, а фактор-группа есть абелева группа поворотов плоскости.

К A и B добавим третий принцип построения измеримых групп.

C. Пусть $M$ — такое семейство групп, что для любых двух групп этого семейства одна из них есть подгруппа другой. Тогда их объединение есть снова группа, и если все группы из $M$ измеримы, то и объединение — измеримая группа.

К сожалению, имеет место четвертый принцип, который нарушает аналогию с разрешимыми группами, а именно:

---

[16] Так как никаких условий (типа ограниченности в $R_n$) здесь не налагается, то значение $+\infty$ для $\mu(\mathfrak{N})$ не исключается.

[17] Ранее было $\mathfrak{M} = R_n$ или $K_n$, $\mathfrak{U}$ — внутренность единичного куба или $K_n$, $\mathfrak{G}$ — группа преобразований, сохраняющих длины.

[18] См. п. 5 введения.

[19] Данное условие достаточно, но не необходимо. Однако фактически это можно не принимать в расчет; как видно из наших примеров, несуществование $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-меры влечет такие свойства $\mathfrak{G}$, что интересующая нас мера также не существует, ср. пункты 4, 5.

[20] То есть изоморфные группы $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$ одновременно имеют или не имеют это свойство.

[21] Так как мы имеем дело только с абстрактными группами, нас не интересует природа их элементов.

D. Любая конечная группа измерима.

Это тривиально: для любого подмножества $\mathfrak{G}'$ конечной группы $\mathfrak{G}$ определим $\mu(\mathfrak{G}')$ как отношение числа элементов в $\mathfrak{G}'$ к числу элементов в $\mathfrak{G}$, которое задает, очевидно, $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-меру.

5. В п. 4 мы изучили благоприятные ситуации (в $R_1$ и $R_2$ общая мера существует). Остается рассмотреть неблагоприятный случай, объясняюший парадокс Хаусдорфа—Банаха—Тарского. Если внимательно рассмотреть конструкцию 1/3-, 1/2-сферы Хаусдорфа, то видно, что исходной точкой является следующее обстоятельство: существуют два отображения $K_3$ на $K_3$, сохраняющие длины (т. е. вращение вокруг нуля) $\sigma$, $\tau$, между которыми нет нетривиальных соотношений вида

$$\sigma^{u_1}\tau^{v_1}\ldots\sigma^{u_m}\tau^{v_m} = 1;$$

здесь $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$—целые числа и все, кроме, быть может, $u_1$ и $v_m$, не равны нулю; если $u_1 = v_m = 0$, то $m > 1$, $m = 1$ в этом случае отвечает единице группы [22].

Так как группа, порожденная двумя такими $\sigma$, $\tau$ (множество всех элементов вида $\sigma^{u_1}\tau^{v_1}\ldots\sigma^{u_m}\tau^{v_m}$), есть свободная группа с двумя образующими, то предыдущее можно выразить так: группа всех вращений вокруг 0 в $R_n$, $n \geqslant 3$, содержит свободную группу с двумя образующими в качестве подгруппы. То, что это обстоятельство служит причиной упомянутых парадоксов, мы увидим далее.

Обобщим понятие конечной равносоставленности, принадлежащее Банаху—Тарскому, следующим образом.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество, $\mathfrak{G}$ — группа взаимно однозначных преобразований $\mathfrak{M}$ на себя. Два подмножества $\mathfrak{N}$, $\mathcal{P}$ из $\mathfrak{M}$ называются равносоставленными относительно $\mathfrak{G}$ (коротко, $\mathfrak{G}$-равносоставленными), если существуют два конечных разбиения на одинаковое число попарно непересекающихся множеств

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \ldots + \mathfrak{N}_k, \qquad \mathfrak{N}_u \cap \mathfrak{N}_v = 0, \qquad u \neq v,$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_k, \qquad \mathcal{P}_u \cap \mathcal{P}_v = 0, \qquad u \neq v,$$

и $k$ элементов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ из $\mathfrak{G}$, таких, что $\mathcal{P}_1 = \sigma_1\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathcal{P}_k = \sigma_k\mathfrak{N}_k$. (Если $O_n$ и $O'_n$ — группы отображений $\mathcal{R}_n$ и $K_n$ соответственно на себя, сохраняющих длины, то это понятие переходит в понятие равносоставленности, рассмотренное выше [3].)

Независимо от природы группы $\mathfrak{G}$ для понятия равносоставленности справедливы теоремы (сформулированные Банахом—Тарским для $\mathfrak{G} = O_n, O'_3$ соответственно; мы пишем $\mathfrak{N} \sim \mathcal{P}$, имея в виду, что $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{G}$-равносоставлено с $\mathcal{P}$):

A. Отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности, т. е. $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathcal{P}$ влечет $\mathcal{P} \sim \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \sim \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \sim \mathcal{R}$ влечет $\mathfrak{N} \sim \mathcal{R}$.

B. Отношение $\sim$ аддитивно, т. е. если $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_l$ и $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_l$ — два набо-

---

22 Хаусдорф допускает соотношение вида $\sigma^2 = 1$, $\tau^3 = 1$, но это не существенно, так как переход к $\sigma' = \tau\sigma\tau\sigma\tau\sigma\tau^2$, $\tau' = \tau^2\sigma\tau\sigma\tau\sigma\tau$ дает переменные, для которых вообще нет нетривиальных соотношений.

ра попарно непересекающихся множеств и $\mathfrak{N}_1 \sim \mathcal{P}_1 \dots \mathfrak{N}_l \sim \mathcal{P}_l$, то $\mathfrak{N}_1 + \dots + \mathfrak{N}_l \sim \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_l$.

C. Если $\mathfrak{N} \sim \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$[23], $\mathcal{P} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N} \sim \mathcal{P}$[24].

D. Если $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_l$ и $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l$ — два набора попарно непересекающихся множеств и $\mathfrak{N}_1 \sim \dots \sim \mathfrak{N}_l$, $\mathcal{P}_1 \sim \dots \sim \mathcal{P}_l$, равно как $\mathfrak{N}_1 + \dots + \mathfrak{N}_l \sim \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_l$, то $\mathfrak{N}_1 \sim \mathcal{P}_1$ [25] (т. е. отношение равносоставленности можно делить на $l$).

Понятно, что для каждой $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меры (для любого $\mathfrak{A}$) $\mathfrak{G}$-равносоставленные множества имеют равные меры.

Если $\mathfrak{A}$ может быть разложено на две непересекающиеся части, с каждой из которых оно $\mathfrak{G}$-равносоставлено, т. е.

$$\mathfrak{A} = W + V,\ W \cap V = 0, \qquad W \sim \mathfrak{A} \sim V,$$

то оно, разумеется, имеет меру нуль и, следовательно, $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меры не существует. Множество $\mathfrak{A}$ с таким свойством мы называем равносоставленным со своей половиной.

В дополнение к теореме Хаусдорфа—Банаха—Тарского можно легко заключить, что если $\mathfrak{G}$ имеет свободную подгруппу с двумя образующими и никакая точка $\mathfrak{M}$ не является неподвижной для преобразований из этой подгруппы, отличных от тождественного, то $\mathfrak{M}$ равносоставлено со своей половиной, равно как и всякое инвариантное относительно каждого преобразования из $\mathfrak{G}$ подмножество $\mathfrak{M}$. Следовательно, в такой ситуации не существует $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{G}]$-меры, а для описанного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ — никакой $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меры

Для получения нужного дополнения к результатам Хаусдорфа—Банаха—Тарского требуется нечто большее, поскольку среди преобразований, которые рассматриваются там, есть вращения, имеющие неподвижные точки. В случае $\mathfrak{M} = R$ единичный куб $\mathfrak{A}$ не является инвариантным относительно $O_n$, и мы должны здесь проникнуть в положение дел несколько глубже. В этой работе будет получено достаточное условие, которое охватывает все интересующие нас случаи (несуществования $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меры).

Вот это условие.

Должно существовать $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ и конечное число отображений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ из $\mathfrak{G}$ со следующими свойствами: с одной стороны, $\mathfrak{A} \subset \rho_1\mathfrak{A}' + \rho_2\mathfrak{A}' + \dots + \rho_m\mathfrak{A}'$, а с другой — для всякого $N = 1, 2, \dots$ можно выбрать свободную подгруппу из $\mathfrak{G}$ с двумя образующими $\sigma$, $\tau$, так что для всех $u_1, v_1, \dots, u_p, v_p$, $|u_1| + |v_1| + \dots$

$\dots + |u_p| + |v_p| \leqslant N$ выполнено $\sigma^{u_1}\tau^{v_1} \dots \sigma^{u_p}\tau^{v_p}\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$.

Если никакой из элементов этих подгрупп, отличных от единицы, не имеет неподвижных точек, то этим можно ограничиться. Но в остальных случаях приходится требовать большего:

---

23 $\mathfrak{N} \subset \mathcal{P}$ означает, что $\mathfrak{N}$ есть подмножество $\mathcal{P}$[4].

24 Свойство C аналогично теореме Кантора—Бернштейна об эквивалентности [5]. Эта аналогия есть самое существенное уточнение метода Хаусдорфа, сделанное Банахом—Тарским [4, с. 256].

25 Банах и Тарский указывают и используют свойство D для $l = 2$ (и, следовательно, для $l = 2^s$ см. [4, теорема 11, следствие 12]; в этой работе также используется $l = 2^s$, см. примеч. 55) Однако теорема Кенига и Валко [5] дает возможность применять свойство D для любого числа $l$. Она используется также для изучения $K_3$.

существует натуральное $k$ (не зависящее от $N$ из предыдущей формулировки), что для всех $s = 1, 2, \ldots, k$ можно указать свободную подгруппу, удовлетворяющую предыдущему требованию (для всякого $N$); при этом не существует точки из $\mathfrak{M}$, которая была бы неподвижной одновременно для некоторых нетождественных преобразований каждой из этих $k$ подгрупп.

(Данное условие можно видоизменять разными способами, но это для нас не столь важно; однако условие нельзя существенно упростить. Причина его некоторой сложности в том, что мы должны рассматривать неинвариантные относительно $\mathfrak{G}$ множества и учитывать наличие неподвижных точек. Теоретико-групповой смысл состоит в том, что существует свободная подгруппа с двумя образующими. Впрочем, в каждом специальном случае возможны упрощения, и лишь общность наших рассмотрений вынуждает использовать несколько громоздкие рассуждения.)[6]

К сказанному выше осталось добавить, что это условие действительно выполняется в интересующих нас случаях. Рассмотрим, оставляя в стороне вопрос о неподвижных точках, требования, на $\mathfrak{A}$. Очевидно, они выполнены для $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$ (можно выбрать $m = 1$, $\rho$ — тождественное, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} = \mathfrak{M}$, следовательно, для $\mathfrak{M} = K_n$ $\mathfrak{A} = K_n$). Пусть $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{M}$, например $\mathfrak{M} = R_n$, и $\mathfrak{G}$ содержит трансляции; тогда условие выполнено, если $\mathfrak{A}$ ограничено, имеет внутренние точки, и можно выбрать свободную подгруппу с двумя образующими так, что $\sigma$, $\tau$ являются сколь угодно близкими к тождественному отображениями (т. е. для всякого $P > 0$ и $\varepsilon > 0$ $\sigma x$ и $\tau x$ отличаются от $x$ меньше чем на $\varepsilon$ для всех $x$ из шара радиуса $P$ [26]).

Итак, наше условие сводится к тому, что можно выбрать свободные подгруппы $\mathfrak{G}$, которые удовлетворяют условию о неподвижных точках и которые имеют образующие, сколь угодно близкие к тождественному отображению. В части II будет доказано, что это возможно.

**6.** Все приведенные выше результаты подводят нас к выводу о том, что в рассматриваемой проблеме решающую роль играют свойства абстрактной группы. Искомая мера может быть построена с помощью принципов A—D п. 4. Такая мера не существует, если $\mathfrak{G}$ содержит свободную подгруппу с двумя образующими $\sigma$, $\tau$ (в соответствии с п. 5 нужно потребовать, чтобы $\sigma$, $\tau$ были сколь угодно близкими к единичному отображению и удовлетворяли дополнительному условию, связанному с неподвижными точками)[27]. Причины различия евклидовых пространств в размерностях $n = 1, 2$ и $n = 3, 4, \ldots$ заключаются в том, что группы $O_n$ — группы линейных отображений, сохраняющих длины, а именно для $n =$

---

[26] Следует лишь выбрать шары $K_0$, $K_1$, $K_2$ так, что $K_0$ лежит, но не совпадает с $K_1$, $\mathfrak{A}$ содержит $K_1$ и содержится в $K_2$; положить $\mathfrak{A}' = K_0$ и выбрать трансляции $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ так, что $\rho_1 K_0 + \ldots + \rho_m K_0$ покрывает $K_2$ (это, очевидно, возможно сделать, т. е. $\rho_1 \mathfrak{A}' + \ldots + \rho_n \mathfrak{A}'$ покрывает $K_2$). Если $\sigma$, $\tau$ достаточно близки к тождественному отображению, то $\sigma^{u_1}\tau^{v_1} \ldots \sigma^{u_m}\tau^{v_m}$, $|u_1| + |v_1| + \ldots + |u_m| + |v_m| \leqslant N$ тоже близки к тождественному, следовательно, $\sigma^{u_1}\tau^{v_1} \ldots \sigma^{u_m}\tau^{v_m} K_0$ содержится в $K_1$ и поэтому $\sigma^{u_1}\tau^{v_1} \ldots \sigma^{u_m}\tau^{v_m}\mathfrak{A}'$ является частью $\mathfrak{A}$.

[27] Поэтому группа $\mathfrak{G}$, образованная с помощью принципов A — D п. 4, заведомо не имеет свободной подгруппы с двумя образующими; это легко установить и непосредственно.

$= 1$, 2 они разрешимы (см. п. 4), а для $n = 3, 4, \ldots$ содержат свободную подгруппу с двумя образующими (уже $O_3$ имеет такую подгруппу).

Само евклидово пространство меняется несущественно. Достаточно, однако, взять другую группу (вместо $O_n$), и положение сразу меняется. Например, поскольку группа трансляций [28] $T_n$ абелева, то при всех $n$ существует $[R_n$, единичный куб, $T_n]$-мера. Напротив, группа $A_n$ всех аффинных преобразований [29] при $n = 2$ содержит свободную подгруппу с двумя образующими, поэтому уже в $R_2$ не существует неотрицательной аддитивной (нормированной единичным квадратом) меры, инвариантной относительно всех таких преобразований. Таким образом, вся патология Хаусдорфа—Банаха—Тарского имеет место, даже если заменить $O_2$ на $A_2$.

Чтобы найти подобный парадокс на прямой, мы должны принять во внимание, что нет отличных от трансляций непрерывных преобразований (с точностью до отражения, что здесь несущественно), сохраняющих меру; банахова мера на прямой имеет все нужные свойства (в плоскости же она не является аффинно-инвариантной). Но и здесь можно увидеть картину, напоминающую плоские и пространственные парадоксы. Для этого введем определение.

Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathcal{P}$ — два линейных множества; $\mathfrak{R}$ *меньше* $\mathcal{P}$, если существует взаимно однозначное отображение $\mathfrak{R}$ на $\mathcal{P}$, которое увеличивает расстояние между любыми двумя точками (из $\mathfrak{R}$).

Далее, $\mathfrak{R}$ *конгруэнтно меньше* $\mathcal{P}$, если оба множества можно разложить на попарно непересекающиеся части

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots + \mathfrak{R}_u, \qquad \mathfrak{R}_u \cap \mathfrak{R}_v = 0 \qquad (u \neq v),$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_k, \qquad \mathcal{P}_u \cap \mathcal{P}_v = 0 \qquad (u \neq v),$$

причем $\mathfrak{R}_1$ меньше $\mathcal{P}_1$, $\mathfrak{R}_2$ меньше $\mathcal{P}_2, \ldots, \mathfrak{R}_k$ меньше $\mathcal{P}_k$.

Далее доказывается, что каждое линейное ограниченное множество с внутренними точками конгруэнтно меньше, чем любое другое множество с этими свойствами. Например, каждый отрезок конгруэнтно меньше любого другого отрезка. Таким образом, мера Банаха имеет следующее парадоксальное свойство: мера уменьшается при отображении, которое увеличивает все длины.

7. В работе рассматривается, кроме сформулированных до сих пор теорем и примеров, еще одно применение, которое также можно считать примером. Сконструируем континуум таких попарно непересекающихся линейных множеств, что отрезок $[0, 1]$ конгруэнтно меньше, чем каждое из них. Все эти множества

---

[28] То есть если $x_1, \ldots, x_n$ — координаты, то трансляция есть преобразование $x_1' = x_1 + a_1, + \ldots$
$\ldots + x_n' = x_n + a_n$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — константы).

[29] То есть преобразование

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n,$$

где $a_{11}, \ldots, a_{nn}, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — константы. Определитель матрицы $\{a_{pq}\}$, $p, q = 1, \ldots, n$, равен 1.

имеют положительную внешнюю меру Лебега [30]. Тем самым если построить любые объединения сконструированных множеств, то для двух различных объединений симметрическая разность [31] не является множеством лебеговой меры 0. Известно, что мощность множества измеримых по Лебегу множеств равна мощности множества неизмеримых по Лебегу множеств, а именно $2^{\aleph}$. Это несколько удивительно, поскольку в вещественной теории функций патология обычно преобладает. Наша конструкция помогает понять, что и здесь это так. Большое число измеримых множеств возникает из-за 0-множеств [32]. Если пренебречь ими, то картина меняется. Более точно, назовем множества $\mathfrak{N}$, $\mathscr{P}$ эквивалентными $\mathfrak{N} \approx \mathscr{P}$, если мера их симметрической разности есть 0-множество. Так, $\mathfrak{N} \approx \mathfrak{N}$ и из $\mathfrak{N} \approx \mathscr{P}$ вытекает $\mathscr{P} \approx \mathfrak{N}$, а из $\mathfrak{N} \approx \mathscr{P}$, $\mathscr{P} \approx \mathscr{R}$ следует $\mathfrak{N} \approx \mathscr{R}$, то $\approx$ есть отношение эквивалентности. Каждый класс эквивалентности содержит либо только измеримые, либо только неизмеримые множества. Следовательно, можно и классы считать измеримыми или неизмеримыми.

Легко доказать, что мощность совокупности измеримых классов $\aleph$[33]. Из нашего примера следует, что всего существует $2^{\aleph}$ классов (это нельзя вывести из мощностных соображений, поскольку каждый класс содержит $2^{\aleph}$ элементов!), следовательно, существует $2^{\aleph}$ неизмеримых классов [7].

8. Остается сказать о роли принципа выбора в этой работе [34]. Здесь положение таково: во всех доказательствах предложений отрицательного характера (т. е. доказательств несуществования определенных мер и конструкции патологических равносоставленных множеств) мы используем его. Это аналогично тому, как при обычном построении неизмеримого множества осуществляют одновременный выбор по одному элементу из континуального семейства попарно непересекающихся непустых множеств.

При доказательстве всех предложений положительного характера (существование общих мер) используется эффективное упорядочение соответствующих множеств. В случае евклидова пространства $R_n$ используется полная упорядоченность континуума. Известно, что это эквивалентно одновременному выбору из всех его $2^{\aleph}$ подмножеств.

Структура работы такова: в части I мы рассматриваем вопросы существования [$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}$]-мер и измеримых групп (см. п. 4 введения). В части II исследуется $\mathfrak{G}$-равносоставленность и связанные с ней патологии. Наконец, в части III мы изучаем свойства отношения конгруэнтности и примеры, относящиеся к лебеговой мере.

---

[30] Каждое множество, которое конгруэнтно меньше, чем множество меры Лебега 0, имеет меру Лебега 0. Но множество, конгруэнтно меньшее другого множества, может иметь внешнюю меру, большую, чем внешняя мера второго!

[31] Симметрическая разность двух множеств $\mathfrak{N}$, $\mathscr{P}$ есть множество точек, содержащихся только в одном из них: $\mathfrak{N} + \mathscr{P} \setminus \mathfrak{N} \cap \mathscr{P}$.

[32] Каждое подмножество 0-множества есть 0-множество. Если мощность первого $\aleph$, то существует $2^{\aleph}$ таких множеств.

[33] Для каждого измеримого множества существует содержащее его множество той же меры (эквивалентное ему!) и являющееся пересечением счетной совокупности открытых множеств но существует лишь континуум таких множеств.

[34] См. [4, с. 245].

## Часть I

## ФОРМУЛИРОВКА ОБЩЕГО ПОНЯТИЯ МЕРЫ

**1.** В п. 1 введения группа $\mathfrak{G}$ называлась измеримой, если существовала $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-мера (см. там же). Мы будем работать с несколько более общим определением, которое в действительности равносильно предыдущему. Именно, назовем группу $\mathfrak{G}$ измеримой, если на ней существует «обобщенное среднее значение»[35], при этом среднее значение определено следующим образом.

*«Ограниченное групповое число»* есть вещественнозначная функция на группе с ограниченным множеством значений (т. е. принадлежащим некоторому интервалу); будем обозначать ограниченные групповые числа $f$, $g$, ...

Групповое число $f$ ставит в соответствие элементу $\sigma$ из $\mathfrak{G}$ вещественное число $f(\sigma)$. Если $f$, $g$ — ограниченные групповые числа, то очевидным образом определены ($a$ — вещественное число, $\tau$ — элемент $\mathfrak{G}$) ограниченные групповые числа

$$af, \ f \pm g, \ f_\tau:$$

$$(af)(\sigma) = af(\sigma), \qquad (f \pm g)(\sigma) = f(\sigma) \pm g(\sigma), \qquad f_\tau(\sigma) = f(\tau a).$$

Ограниченное групповое число неотрицательно, если $f(\sigma) \geqslant 0$.

*«Общее среднее значение»* на $\mathfrak{G}$ есть соответствие, по которому каждому ограниченному групповому числу $f$ сопоставляется вещественное число $M(f)$, так что выполнены условия:

α) $M(af) = aMf, \quad M(f + g) = M(f) + M(g)$;

β) где $\tau$ из $\mathfrak{G}$: $M(f_\tau) = M(f)$;

γ) если $f$ неотрицательно, то $M(f) \geqslant 0$;

δ) если $f(\sigma) = 1$, то $M(f) = 1$[36,[8]].

Если группа $\mathfrak{G}$ является измеримой в этом смысле, то ясно, что она измерима и в прежнем: положив для множества $\mathcal{H}$ группы $\mathfrak{G}$

$$f^H(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ лежит в } \mathcal{H}, \\ 0, & \text{если } \sigma \text{ не лежит в } \mathcal{H}. \end{cases}$$

Тогда $f^H$ есть ограниченное групповое число, а $M(f^H) = \mu(H)$ есть $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ мера. Справедливо и обратное; если $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-мера $\mu(\mathcal{H})$ существует, то можно сконструировать общее среднее значение $M(f)$ на $\mathfrak{G}$[37—38].

---

[35] Мы говорим «среднее значение» вместо «интеграл», так как «объем» группы нормирован единицей.

[36] Вся эта концепция обобщает построение Банаха [3].

[37—38] Именно, с помощью известного метода, который сводит интеграл Лебега к линейной мере Лебега.

Пусть $f$ — ограниченное групповое число, $K_\varepsilon = (\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots)$ — бесконечная цепочка вещественных чисел с шагом, меньшим $\varepsilon$ (т. е. $k_n \to \pm\infty$, когда $n \to \pm\infty$, $k_n < k_{n-1} < {}_n + \varepsilon$), и $\mathcal{H}(f, K_\varepsilon, n)$ — множество всех σ со свойством

$$K_n \leqslant f(\sigma) < K_{n+1}.$$

Проведем теперь упомянутое в п. 4 введения построение, а именно дадим для измеримой группы $\mathfrak{G}$ необходимое и достаточное условие существования $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меры.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{G}$ — измеримая группа, то $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-мера существует тогда и только тогда, когда существует неотрицательная мера $\mu(\mathfrak{N})$ для всех подмножеств $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{M}$, для которой выполняется условие $\alpha'$ из п. 4 введения и которая имеет свойство $\mu(\sigma\mathfrak{A}) = 1$ для всех $\sigma \in \mathfrak{G}$*[39].

Необходимость ясна, остается доказать достаточность, т. е. с помощью меры $\mu(\mathfrak{N})$ в условиях леммы построить $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меру. Пусть $\mathfrak{N}$ — подмножество $\mathfrak{M}$. Определим групповое число $f^{(\mathfrak{N})}$, которое ограничено и неотрицательно:

$$f^{(\mathfrak{N})}(\sigma) = \mu(\sigma\mathfrak{N})$$

и определим общую меру $\nu(\mathfrak{N})$ посредством $\nu(\mathfrak{N}) = M(f^{(\mathfrak{N})})$ (см. примеч. 38). Сразу видно, что $\mu$ является $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-мерой.

Что касается условий леммы 1, то они легко проверяются. А именно:

Лемма 2. *Общая мера, удовлетворяющая условиям леммы 1, существует тогда и только тогда, когда выполнено такое условие: если $\mathfrak{N}$ — подмножество $\mathfrak{M}$ и функция $\varphi^{(\mathfrak{N})}$ определена условием*

$$\varphi^{(\mathfrak{N})}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ лежит в } \mathfrak{N}, \\ 0, & \text{если } x \text{ не лежит в } \mathfrak{N}, \end{cases}$$

*то ни для какой системы $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ из $\mathfrak{G}$ и системы вещественных чисел $a_1, \ldots, a_k$ со свойством*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k > 0$$

*невозможно для всех $x$ соотношение*

$$a_1\varphi^{(\sigma_1\mathfrak{A})}(x) + a_2\varphi^{(\sigma_2\mathfrak{A})}(x) + \ldots + a_k\varphi^{(\sigma_k\mathfrak{A})}(x) \leqslant 0.$$

---

Так как $\mathscr{H}(f, K_\varepsilon, n)$ пусты (за исключением конечного числа $n$), то в сумме

$$M(f, K_\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \mu(\mathscr{H}, (f, K_\varepsilon, n))$$

— конечное число слагаемых. Можно доказать, что при $\varepsilon \to 0$ $M(f, K_\varepsilon)$ стремится к пределу $M(f)$: легко проверить, что $M(f)$ является общим средним значением на $\mathfrak{G}$.

Стоит заметить, что среднее значение ограниченных групповых чисел на $\mathfrak{G}$ можно обобщить на односторонне ограниченные групповые числа т. е. на функции $f$, определенные на всей группе $\mathfrak{G}$ и имеющие конечную нижнюю грань. При этом условия $\alpha$ — $\delta$ определения сохраняются. Но нужно допускать $\infty$ в качестве значения среднего.

Именно, пусть $f$ — ограниченное снизу групповое число, $A > 0$, $f_A(\sigma) = \min(f(\sigma), A)$. Тогда $M(f_A)$ монотонно возрастает по $A$ и

$$M^*(f_A) = \lim_{A\to\infty} M(f_A)$$

является, как легко видеть, нужным обобщением.

[39] Как видно, вместо условия $\beta'$ здесь использовано усиление условия $\gamma'$, но это усиление незначительно.

Необходимость условия легко доказать. Пусть $\mu(\mathfrak{N})$ — общая мера со свойствами леммы 1. Пусть $E$ пробегает все $2^k - 1$ непустые подмножества множества $(1, 2, \ldots, k)$. Пусть $\mathfrak{A}_E$ — множество всех $x$, которые содержатся во всех $\sigma_l \mathfrak{A}$, когда $l$ принадлежит $E$, и только в них.

Все $\mathfrak{A}_E$ попарно не пересекаются, и $\sigma_l \mathfrak{A}$ является объединением всех $\mathfrak{A}_E$, для которых $l$ принадлежит $E$. Это записывается с помощью формулы

$$\sigma_l \mathfrak{A} = \sum_{l \text{ в } F} \mathfrak{A}_E.$$

Так как $\mu(\sigma_l \mathfrak{A}) = 1$ для всех $l$, можно написать

$$\sum_{l=1}^{k} a_l \mu(\sigma_l \mathfrak{A}) > 0, \qquad \sum_{l=1}^{k} a_l \sum_{l \text{ в } E} \mu(\mathfrak{A}_E) > 0,$$

$$\sum_E \mu(\mathfrak{A}_E) \sum_{l \text{ в } E} a_l > 0.$$

Если мы сможем показать, что для всех $E$ с непустым $\mathfrak{A}_E$ имеет место $\Sigma_{l \text{ в } E}\, a_l \leqslant 0$, тогда цель будет достигнута: так как для других $E$ должно быть $\mu(\mathfrak{A}_E) = 0$, мы получаем противоречие с упомянутым выше неравенством. Итак, допустим, что $\mathfrak{A}_E$ — непустое множество. Тогда для всех $x \in \mathfrak{A}_F$

$$\sum_{l=1}^{k} a_l \varphi^{(\sigma_l \mathfrak{A})}(x) = \sum_{l \text{ в } F} a_l.$$

Так как левая сторона $\leqslant 0$, как мы допустили, то все доказано.

Чтобы доказать достаточность, нужно пользоваться теоремой о полной упорядоченности. Доказательство этой части отложим до следующего пункта. Однако мы хотим установить, что в случаях, упомянутых в п. 4 введения ($\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M} = R_n$, $\mathfrak{A}$ — единичный куб, $\mathfrak{G}$ отображает единичный куб только на измеримые множества меры 1), условия 2 выполнены.

Для $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ имеет место $\sigma_l \mathfrak{A} = \mathfrak{M}$ для всех $l$. Поэтому всегда

$$\sum_{l=1}^{k} a_l \varphi^{(\sigma_l \mathfrak{A})}(x) = \sum_{l=1}^{k} a_l > 0,$$

тем самым все доказано. Во втором из названных случаев доказательство необходимости можно дословно повторить и при этом везде вместо $\mu(\mathfrak{N})$ писать внешнюю меру Лебега. Хотя эта мера, вообще говоря, не аддитивна, тем не менее она имеет это свойство для интересующих нас множеств $\mathfrak{A}_E$: так как все $\sigma_l \mathfrak{A}$ измеримы, то измеримо и $\mathfrak{A}_E$

2. Доказательство достаточности, которое мы должны провести, строится с помощью указания общей меры $\mu(\mathfrak{N})$, удовлетворяющей требованиям леммы 1. Здесь мы следуем методу Банаха [40]

Прежде всего, множество всех подмножеств $\mathfrak{M}$ вполне упорядочено так, что множества $\sigma \mathfrak{A}$ ($\sigma$ из $\mathfrak{G}$) являются начальными элементами. Пусть все множество имеет порядковый тип $\Omega$ и пусть его элементы — $\mathfrak{N}_\alpha$, где $\alpha$ пробе-

---

[40] Метод доказательства родствен методу Банаха [3] и отличается лишь тем, что простота рассматриваемого случая приводит к некоторым упрощениям в его рассуждениях.

гает все порядковые ординалы, меньше $\Omega$. Пусть $\sigma\mathfrak{R}$ при разных $\sigma$ образуют начальный отрезок $\alpha < \Xi$.

Сопоставим каждому $\mathfrak{R}_\alpha$, $\alpha < \Omega$, неотрицательное число $m(\mathfrak{R}_\alpha)$ таким образом, чтобы выполнялось следующее условие: пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — любые порядковые числа, меньше $\Omega$, и $a_1, \ldots a_k$ — любые вещественные числа, тогда неравенство

$$a_1 m(\mathfrak{R}_{\alpha_1}) + a_2 m(\mathfrak{R}_{\alpha_2}) + \ldots + a_k m(\mathfrak{R}_{\alpha_k}) > 0$$

невозможно, если

$$a_1 \varphi^{(\mathfrak{R}_{\alpha_1})}(x) + a_2 \varphi^{(\mathfrak{R}_{\alpha_2})}(x) + \ldots + a_k \varphi^{(\mathfrak{R}_{\alpha_k})}(x) \leqslant 0$$

для всех $x$ из $\mathfrak{M}$ ($\varphi^{(\mathfrak{R})}$ определено так же, как в лемме 2). (Если по крайней мере для одного из множеств $\mathfrak{R}_{\alpha_n}$ $m(\mathfrak{R}_{\alpha_n}) = \infty$ и при этом $a_n < 0$, то мы считаем, что первое соотношение не выполнено.)

Для всех $\alpha < \Xi$, т. е. для $\mathfrak{R}_\alpha = \sigma\mathfrak{A}$ (из условия леммы), вытекает, что $m(\mathfrak{R}_\alpha) = 1$. Если удастся провести такое сопоставление для всех $\alpha < \Omega$, то мы достигнем цели, так как, во-первых, для всех $\sigma$ из $\mathfrak{G}$ $m(\sigma\mathfrak{A}) = 1$ и, во-вторых, для непересекающихся $\mathfrak{R}$ и $\mathcal{P}$ выполнено тождество

$$\varphi^{(\mathfrak{R}+\mathcal{P})}(x) - \varphi^{(\mathfrak{R})}(x) - \varphi^{(\mathcal{P})}(x) = 0,$$

поскольку в неравенстве можно положить вначале $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = -1$, а затем $a_1 = -1$, $a_2 = a_3 = 1$ и получить

$$m(\mathfrak{R} + \mathcal{P}) - m(\mathfrak{R}) - m(\mathcal{P}) = 0.$$

Нужное продолжение $m(\mathfrak{R}_\alpha)$ (с $\alpha < \Xi$ на все $\alpha < \Omega$) проводим с помощью трансфинитной индукции, а именно мы доказываем, что если $m(\mathfrak{R}_\alpha)$ определено для $\alpha < \xi$ ($\Xi < \xi < \Omega$) согласно условию, то можно определить его и для $\alpha = \xi$ (применяемый метод доказательства, как уже говорилось, тесно связан с методом Банаха [3]).

Условие выполнено для всех $\alpha < \xi$; что может возникнуть нового при $\alpha = \xi$? Очевидно, здесь могут быть случаи, когда по крайней мере один элемент из $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равен $\xi$ (без ограничения общности это ровно один элемент, например $\alpha_k$). Кроме того, $a_k \neq 0$ (иначе ничего нового нет) или после несущественного умножения на положительное число $a_k = \pm 1$.

Тогда наше условие имеет следующий вид (после небольшого изменения обозначений): если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h < \xi$, а $a_1, \ldots, a_h$ — вещественные числа и для всех $x$ из $\mathfrak{M}$

$$a_1 \varphi^{(\mathfrak{R}_{\alpha_1})}(x) + a_2 \varphi^{(\mathfrak{R}_{\alpha_2})}(x) + \ldots + a_h \varphi^{(\mathfrak{R}_{\alpha_h})}(x) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi^{(\mathfrak{R}_\xi)}(x) \text{ (соответственно } \geqslant \varphi^{(\mathfrak{R}_\xi)}(x)),$$

то

$$a_1 m(\mathfrak{R}_{\alpha_1}) + a_2 m(\mathfrak{R}_{\alpha_2}) + \ldots + a_h m(\mathfrak{R}_{\alpha_h}) \leqslant m(\mathfrak{R}_\xi) \text{ (соответственно } \geqslant m(\mathfrak{R}_\xi)).$$

Следовательно, мы должны выбрать $m(\mathfrak{N}_\xi)$ так, чтобы оно было не меньше (соответственно не больше) всех чисел

$$a_1 m(\mathfrak{N}_{\alpha_1}) + a_2 m(\mathfrak{N}_2) + \ldots + a_h m(\mathfrak{N}_{\alpha_h})$$

для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$; $a_1, a_2, \ldots, a_h$, при которых в первом неравенстве для всех $x$ выполнено условие $\leqslant$ (соответственно $\geqslant$).

Такое число действительно существует, если каждая из только что названных нижних границ не больше, чем каждая из названных верхних границ. Но это на самом деле так: из двух соотношений

$$a_1 \varphi^{(\mathfrak{N}_{\alpha_1})}(x) + a_2 \varphi^{(\mathfrak{N}_{\alpha_2})}(x) + \ldots + a_h \varphi^{(\mathfrak{N}_{\alpha_h})}(x) \leqslant \varphi^{(\mathfrak{N}_\xi)}(x),$$

$$b_1 \varphi^{(\mathfrak{N}_{\beta_1})}(x) + b_2 \varphi^{(\mathfrak{N}_{\beta_2})}(x) + \ldots + b_j \varphi^{(\mathfrak{N}_{\beta_j})}(x) \geqslant \varphi^{(\mathfrak{N}_\xi)}(x)$$

следует

$$a_1 \varphi^{(\mathfrak{N}_{\alpha_1})}(x) + \ldots + a_k \varphi^{(\mathfrak{N}_{\alpha_h})}(x) - b_1 \varphi^{(\mathfrak{N}_{\beta_1})}(x) - \ldots - b_j \varphi^{(\mathfrak{N}_{\beta_j})}(x) \leqslant 0,$$

т. е. (поскольку все $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \ldots, \beta_j < \xi$)

$$a_1 m(\mathfrak{N}_{\alpha_1}) + \ldots + a_h m(\mathfrak{N}_{\alpha_h}) - b_1 m(\mathfrak{N}_{\beta_1}) - \ldots - b_j m(\mathfrak{N}_{\beta_j}) \geqslant 0,$$

как и требуется[19].

Леммы 1 и 2 вместе с замечанием в конце предыдущего пункта дают следующую теорему, оправдывающую анонс в п. 4 введения.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{G}$ — измеримая группа, то $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-мера существует в том и только в том случае, когда выполнены условия леммы* 2.

Эти условия выполнены, например, для $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$ или если $\mathfrak{M}$ есть $n$-мерное евклидово пространство, $\mathfrak{A}$ — единичный куб и каждое преобразование из $\mathfrak{G}$ переводит измеримое множество меры 1 в такое же множество.

**3.** Теперь перейдем к доказательству принципов A — D образования измеримых групп, сформулированных в п. 4 введения.

Доказательство принципа D опускается, так как оно уже было фактически проведено. Принцип B нетрудно доказать непосредственно. Именно, пусть $\mathcal{H}$ — измеримый нормальный делитель $\mathfrak{G}$ и пусть фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathcal{H}$ измерима, тогда для групповых чисел $\mathcal{H}$ и соответственно $\mathfrak{G}/\mathcal{H}$ мы пишем $f, g, \ldots$ и соответственно $F, G, \ldots$ Пусть $M(f)$ (соответственно $N(F)$) — общее среднее значение на $\mathcal{H}$ (соответственно $\mathfrak{G}/\mathcal{H}$). Если $\Phi$ — ограниченное групповое число на $\mathfrak{G}$, то определено ограниченное групповое число $f$ на $\mathcal{H}$, а именно совпадающее с ним на $\mathcal{H}$ и не определенное в остальных случаях. Если определить $M(\Phi) = M(f)$, то $M(\Phi)$ имеет все свойства общего среднего на $\mathfrak{G}$, за исключением свойства $M(\Phi_\tau) = M(\Phi)$; это имеет место лишь для $\tau$ из $\mathcal{H}$. Однако $M(\Phi_\tau) = M(\Phi_\rho)$, если $\tau$, $\rho$ являются элементами одного и того же класса смежности $\Sigma$ по $\mathcal{H}$, т. е. лежат в одном и том же элементе $\mathfrak{G}/\mathcal{H}$. Будем обозначать его через $M(\Phi, \Sigma)$, оно является ограниченным групповым числом на $\mathfrak{G}/\mathcal{H}$[41] как

[41] Так как из $|\Phi(\sigma)| \leqslant a$ следует $|f(\sigma)| \leqslant a$, то $|M(\Phi)| = |M(f)| \leqslant a$; это же верно для всех $\Phi_\tau$, поэтому $|M(\Phi, \Sigma)| \leqslant a$.

функция параметра $\Sigma$. Это групповое число обозначим $F_\Phi$. Положим $M^*(\Phi) = N(F_\Phi)$, легко проверить, что это есть общее среднее значение на $\mathfrak{G}$.

Все эти соображения не очень глубоки в противоположность доказательствам принципов A и C. При доказательстве этих утверждений мы опираемся на некоторые соображения Банаха.

Доказательство принципа A совпадает дословно с рассуждениями Банаха в [3], где (если использовать нашу терминологию) Банах доказывает измеримость линейной группы трансляций ($O_1$, ср. примеч. 2). Если проследить за этими рассуждениями [42], то видно, что из всех свойств линейной группы трансляций существенна лишь ее коммутативность [43] В частности, так как совпадают $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{G}$ : $\mathfrak{M}$ состоит из всех вещественных чисел $x$, $\mathfrak{G}$—из отображений $x' = x + a$, которые соответствуют вещественным числам $a$, и если рассматривать $x$ и $a$ как элементы $\mathfrak{G}$, то $x'$ (как элемент $\mathfrak{G}$) есть их теоретико-групповое произведение.

Если заменить вещественные числа последовательно элементами абелевой группы $\mathfrak{G}$, а сумму — теоретико-групповым произведением[44], то рассуждения Банаха дают доказательство принципа A, а именно конструкцию общего среднего значения любой абелевой группы $\mathfrak{G}$. Так как все соображения остаются прежними, мы не углубляемся в детали.

Осталось доказать принцип C. Заметим, что множество групп можно упорядочить так, что для двух элементов $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ из $M$ $\mathfrak{G}'$ меньше, чем $\mathfrak{G}''$, если $\mathfrak{G}'$ является подгруппой $\mathfrak{G}''$; не ограничивая общности, будем считать, что это полная упорядоченность. Действительно, имеется конфинальное с $M$ (в смысле введенного порядка) вполне упорядоченное подмножество $M'$ в $M$ [45]; так как из-за конфинальности оно имеет те же объединения, что и $M$, достаточно рассмотреть лишь его вместо $M$. Итак, теперь $M$ — вполне упорядоченное множество, имеющее порядковый тип $\Omega$; обозначим его элементы $\mathfrak{G}_\alpha$, где $\alpha$ пробегает порядковые числа, меньшие $\Omega$. Пусть $\mathfrak{G}$ есть объединение множеств $\mathfrak{G}_\alpha$. Так как каждая группа $\mathfrak{G}_\alpha$ является измеримой, то существует для каждого $\alpha$ общее среднее значение $M_\alpha(f)$. Нам надо найти общее среднее значение на $\mathfrak{G}$.

Если $f$ — ограниченное групповое число на $\mathfrak{G}$, то для каждого $\mathfrak{G}_\alpha$ можно определить ограниченное групповое число $f_{(\alpha)}$, которое совпадает на $\mathfrak{G}_\alpha$ с $f$, и положить

$$M_\alpha(f) = M_\alpha(f_{(\alpha)})$$

(аналогично приведенному выше). Тогда $M_\alpha(f)$ имеет все свойства среднего значения на $\mathfrak{G}$, за исключением того, что

$$M_\alpha(f_\tau) = M_\alpha(f)$$

выполнено лишь для $\tau$ из $\mathfrak{G}_\alpha$. Рассмотрим поэтому последовательность всех $M_\alpha(f)$, $\alpha < \Omega$; она является ограниченной[46], и если заменить $f$ на $f_\tau$ ($\tau$ из $\mathfrak{G}$),

---

[42] См. [3, с. 9—10].

[43] Так же как и при доказательстве основной теоремы 1.

[44] Естественно, замена происходит только в аргументах. Значения групповых чисел остаются вещественными, и суммирование обычное.

[45] Конфинальность означает, что за каждым элементом из $M$ следует элемент из $M'$ [2].

[46] Если $|f(\sigma)| \leqslant a$, то $|f_\alpha(\sigma)| \leqslant a$ и, следовательно, $|M_\alpha(f)| = |M_\alpha(f(\alpha))| \leqslant a$.

тогда по крайней мере финальная часть последовательности остается неизменной (так как $\tau$ принадлежит $\mathfrak{G}$, то тем самым одному из $\mathfrak{G}_\alpha$ и, следовательно, $\mathfrak{G}_\beta$ для всех $\alpha \leqslant \beta < \Omega$; поэтому $M_\beta(f)$ не меняется).

Предположим, что мы ввели на множестве $\mathfrak{G}_\alpha$ для всех $\alpha < \Omega$ закон композиции $\alpha \circ \beta$ (из $\alpha < \Omega$, $\beta < \Omega$ следует $\alpha \circ \beta < \Omega$), который ассоциативен, т. е. $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$. Тогда возможно без затруднений применить определение общего среднего значения из п. 1 части I, как и к $\mathfrak{G}$: а именно в этом определении совершенно не важны свойства группы [47], имеет значение лишь наличие закона композиции [10]. Но если для каждого финального отрезка $\mathfrak{G}$ существует такое $\alpha$, что все $\alpha \cdot \xi$ являются элементами этого отрезка (это, разумеется, несовместимо с групповым свойством), то мы утверждаем, что из существования общего среднего значения на множестве всех порядковых чисел, меньших $\Omega$ (в смысле нашего правила композиции), следует существование среднего значения на $\mathfrak{G}$ (в прежнем смысле), т. е. вытекает измеримость $\mathfrak{G}$.

Действительно, пусть даны два ограниченных групповых числа на порядковых числах, меньших $\Omega$, т. е. две последовательности $\bar{f}(\xi)$, $\bar{g}(\xi)_{\xi<\Omega}$, которые совпадают на финальном отрезке множества. Выберем $\alpha$ так, что все $\alpha \circ \xi$ являются элементами этого отрезка. Тогда $\bar{f}_\alpha = \bar{g}_\alpha$ и, следовательно, среднее значение $\bar{f}_\alpha$ равно среднему значению $\bar{g}_\alpha$, т. е. среднеее значение $\bar{f}$ равно среднему значению $\bar{g}$. Поэтому среднее значение последовательности $M_\xi(f)$ является общей мерой на $\mathfrak{G}$.

Метод Банаха, который применялся при доказательстве принципа A, не использует в полной мере того, что $\mathfrak{G}$ — группа. Важны лишь ассоциативность и коммутативность теоретико-группового произведения — в этом легко убедиться, анализируя метод. Поэтому общее среднее на $\mathfrak{G}$ определено, если $\alpha \circ \beta$ коммутативно.

Итак, теперь возникает следущая задача: найти операцию на порядковых числах со свойствами:

1) из $\alpha < \Omega$, $\beta < \Omega$ следует $\alpha \circ \beta < \Omega$;
2) $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ и $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$;
3) для каждого $\alpha' < \Omega$ существует такое $\alpha$, что для всех $\xi$ имеем $\alpha \circ \xi > \alpha'$.

Сначала заметим, что $\Omega$ можно считать степенью $\omega$. Если $\Omega$ не является предельным числом, тогда $M$ имеет последний элемент, который и есть $\mathfrak{G}$, и при этом является измеримым. Тогда доказательство завершено. Если $\Omega$ — предельное число, то его можно выбрать наименьшим среди всех конфинальных множеств с $M$, поэтому $\Omega$ является степенью $\omega$, поскольку каждое другое порядковое число является конфинальным с еще меньшим порядковым числом [48]

Нельзя определить $\alpha \circ \beta$ посредством $\alpha + \beta$, так как эта операция не имеет свойства $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. Но небольшая вариация этого определения приводит к цели. Каждое порядковое число $\xi$ можно одним и только одним способом представить в виде

$$\xi = c_1 \omega^{\eta_1} + c_2 \omega^{\eta_2} + \ldots + c_k \omega^{\eta_k},$$

---

[47] То есть для всякого $\alpha$ отображения $\xi' = \xi \circ \alpha$ и $\xi'' = \alpha \circ \xi$ являются взаимно однозначными отображениями $\mathfrak{G}$ на себя и что существует элемент $\alpha^{-1}$, который служит обратным отображением.

[48] Ср. [2].

где $k$ и $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — положительные целые конечные числа; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ — порядковые числа [49]. Пусть теперь

$$\alpha = c_1\omega^{\eta_1} + c_2\omega^{\eta_2} + \ldots + c_k\omega^{\eta_k},$$

$$\beta = d_1\omega^{\eta_1} + d_2\omega^{\eta_2} + \ldots + d_k\omega^{\eta_k}$$

(одинаковой системы показателей у $\alpha$ и $\beta$ можно достичь, допуская нулевые значения коэффициентов $c_l$, $d_l$).

Определим

$$\alpha\circ\beta = (c_1 + d_1)\,\omega^{\eta_1} + (c_2 + d_2)\,\omega^{\eta_2} + \ldots + (c_k + d_k)\,\omega^{\eta_k}.$$

Тогда $\alpha\circ\beta$ имеет желаемые свойства 1 — 3.

Содержание этого пункта можно суммировать в следующем:

Теорема 4. *Применение принципов* A—D *из п. 4 введения не выводит из класса измеримых групп*[11].

## Часть II

## О РАВНОСОСТАВЛЕННОСТИ

1. В п. 5 введения мы определили понятие $\mathfrak{G}$-равносоставленности двух подмножеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$ заданного множества $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{G}$ есть группа взаимно однозначных преобразований $\mathfrak{M}$ на себя) и сформулировали свойства A — D $\mathfrak{G}$-равносоставленности.

Доказательства этих свойств проводятся дословно, так же как и в работе Банаха—Тарского [4], и мы не будем заниматься этим.

Свойство A соответствует теоремам 1, 2, B — теореме 4, C — теореме 8 и D — теореме 11, но всюду вместо теоремы Куратовского нужно здесь привлечь теорему Кенига и Валко, которая справедлива для произвольного $l$ (см. примеч. 25). Следовательно, мы установили:

Теорема 5. *Понятие $\mathfrak{G}$-равносоставленности для любых групп $\mathfrak{G}$ обладает свойствами* A — D *п. 5 введения.*

Теперь покажем, что $\mathfrak{A}$ является равносоставленным со своей половиной, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}$ удовлетворяют условию п. 5 введения. Возьмем отображения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ и $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, в соответствии с этим условием имеем

$$\mathfrak{A} \subset \rho_1\mathfrak{A}' + \rho_2\mathfrak{A}' + \ldots + \rho_m\mathfrak{A}';$$

можно определить для $\mathfrak{A}$ разложение

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_m, \qquad \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{A}_\nu = 0,$$

$$\mathfrak{A}_\mu \subset \rho_\mu\mathfrak{A}', \qquad \mu \neq \nu,$$

число $N$ определим несколько позже.

---

[49] См. [2, с. 120—121].

Далее, выберем (в зависимости от $N$!) в соответствии с условием свободную подгруппу $\mathfrak{G}$ с двумя образующими $\sigma$, $\tau$ и обозначим ее $\mathcal{H}$. Каждый элемент $\mathcal{H}$ можно представить (единственным образом) в виде

$$\sigma^{u_1}\tau^{v_1}\ldots\sigma^{u_n}\tau^{v_n}$$

($n$ — целое положительное; $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ — целые, не равные нулю, за возможным исключением $u_1$ и $v_n$). Разложим $\mathcal{H}$ на подмножества $\mathcal{H}_t$ ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где $\mathcal{H}_t$ определяется посредством $u_1 = t$. Очевидно, что $\sigma^{s-t}\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_s$ и для $t \neq 0$ $\tau\mathcal{H}_t \subset \mathcal{H}_0$[50].

Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех точек $\mathfrak{M}$, которые не являются неподвижными точками никакого нетождественного отображения. Каждый элемент $\mathcal{H}$ отображает $\mathcal{F}$ на себя[51].

Два элемента $\mathcal{F}$ назовем эквивалентными и обозначим $x \sim y$, если существует элемент из $\mathcal{H}$, который переводит один в другой. Так как $\mathcal{H}$ — группа, то имеют место свойства: $x \sim x$; из $x \sim y$ следует $y \sim x$; из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$. Поэтому $\mathcal{F}$ распадается в объединение попарно непересекающихся классов эквивалентных между собой элементов Выберем из каждого класса по одному элементу и обозначим через $\mathcal{K}$ полученное множество[12]. Из определения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$ следует, что если $\sigma$ пробегает элементы $\mathcal{H}$, то $\sigma\mathcal{K}$ пробегает попарно непересекающиеся множества, которые в сумме составляют $\mathcal{F}$. Обозначим объединение всех $\sigma\mathcal{K}$, где $\sigma$ пробегает $\mathcal{H}_t$, через $\mathcal{K}_t$; очевидно, что $\mathcal{K}_t$ ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — попарно непересекающиеся множества, которые вместе образуют $\mathcal{F}$. Из соответствующих соотношений для $\mathcal{H}_t$ следует, что $\sigma^{s-t}\mathcal{K}_t = \mathcal{K}_s$ и для $t \neq 0$ $\tau\mathcal{K}_t \subset \mathcal{K}_0$[52].

Возьмем число $h$, значение которого определим несколько позже, но здесь заметим лишь, что $N$ (и через него $\mathcal{H}_t$, $\sigma$, $\tau$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, равно как и $\mathcal{K}_t$) определяется в зависимости от $h$. Каждому числу $l = 1, 2, \ldots, k$ сопоставим определенное отображение подмножества $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{A}_1 \cap \rho_1\mathcal{F} + \ldots + \mathfrak{A}_m \cap \rho_m\mathcal{F},$$

эти $h$ отображений мы теперь и сконструируем.

Заметим, что $l$-е отображение ($l = 1, 2, \ldots, h$) является отображением, которое входит в определение $\mathfrak{G}$-равносоставленности, т. е. (на разных частях $\mathfrak{J}$!) оно совпадает с некоторым отображением из $\mathfrak{G}$, своим для каждой из конечного числа частей. Сначала отобразим множество $\mathfrak{A}_\mu \cap \rho_\mu\mathcal{F}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) с помощью $\rho_\mu^{-1}$. При этом оно переходит в $\rho_\mu^{-1}\mathfrak{A}_\mu \cap \mathcal{F}$, т. е. в подмножество $\mathfrak{A}'$ и $\mathcal{F}$. Разложим его на части, одна из которых лежит в $\mathcal{K}_0$, а другая — в $\sum_{t\neq 0}\mathcal{K}_t$. Отобразим эти части с помощью $\sigma^{h+l}$ (соответственно $\sigma^l\tau$). Таким образом,

---

[50] Если $v$ — элемент $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{J}$ — подмножество $\mathfrak{G}$, то $v\mathfrak{J}$ есть множество всех $v\sigma$, где $\sigma$ пробегает все элементы $\mathfrak{J}$.

[51] Если $x$ — неподвижная точка $v$ (из $\mathcal{H}$), то $wx$ есть неподвижная точка $wvw^{-1}$ (так же как $v$ и $w$ — элементы $\mathcal{H}$). Если $v$ не есть единица, то и $wvw^{-1}$ не является единицей.

[52] Уже здесь проявляется парадоксальная ситуация, имеющаяся в примере Хаусдорфа (строящегося чуть иначе): все $\mathcal{H}_t$ «равновелики», однако их объединение по $t \neq 0$ не превосходит $\mathcal{H}_0$!

каждая часть отображена взаимно однозначно на подмножество $\mathcal{K}_{h+l}$ (соответственно $\mathcal{K}_l$). Следовательно, так как эти множества не пересекаются, отобразим наше множество взаимно однозначно на $\mathcal{K}_l + \mathcal{K}_{l+h}$. Если мы применим еще отображение $\sigma^{2(\mu-1)h}$, то получим взаимно однозначное отображение на $\mathcal{K}_{2(\mu-1)h+l} + \mathcal{K}_{(2\kappa-1)h+l}$. При этом наше итоговое отображение совместимо с требуемым в определении $\mathfrak{G}$-равносоставленности.

Итак, все множество $\mathfrak{J}$ отображается с помощью $l$-го отображения на подмножество множества

$$\mathcal{K}_l + \mathcal{K}_{h+l} + \mathcal{K}_{2h+l} + \ldots + \mathcal{K}_{2(m-1)h+l} + \mathcal{K}_{(2m-1)h+l}$$

с соблюдением требований $\mathfrak{G}$-равносоставленности. Поэтому образы при этих отображениях $l = 1, 2, \ldots, h$ попарно не пересекаются.

Далее, видно, что для каждого из этих отображений всякая точка образа возникает из точки множества $\mathfrak{A}'$ при применении либо $\sigma^{2(\mu-1)h+l}$, либо $\sigma^{(2\mu-1)h+l}$. Следовательно, она является точкой из $\mathfrak{A}$, если $N = 2mh$, что в дальнейшем будет предполагаться. Мы указали $h$ попарно непересекающихся подмножеств $\mathfrak{A}$, каждое из которых $\mathfrak{G}$-равносоставлено с $\mathfrak{J}$.

Если бы всякое нетождественное отображение из $\mathcal{H}$ не имело неподвижных точек, то тогда имело бы место соотношение $\mathcal{F} = \mathfrak{M}$ и, следовательно, $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}$; можно положить при этом $h = 2$. Если положение иное, то в соответствии с условием п. 5 введения мы выбираем $k$ свободных подгрупп с двумя образующими так, чтобы были выполнены эти условия и никакая точка из $\mathfrak{M}$ не является неподвижной для некоторых нетождественных элементов каждой из этих подгрупп [13]. Обозначим эти подгруппы через $\mathcal{H}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots$), их образующие — $\sigma_\varkappa$, $\tau_\varkappa$ и соответствующие множества, которые построены выше, — $\mathcal{F}_\varkappa$, $\mathfrak{J}_\varkappa$. По предыдущему имеем $\mathcal{F}_1 + \ldots + \mathcal{F}_k = \mathfrak{M}$, следовательно, $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \ldots + \mathfrak{J}_k = \mathfrak{A}$. Отсюда получим разложение $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \ldots + \mathfrak{J}_k, \qquad \mathfrak{J}_\varkappa \cap \mathfrak{J}_\lambda = 0 \quad (\varkappa \neq \lambda)$$

и $\mathfrak{J}_\varkappa \subset \mathfrak{J}$. Так как в $\mathfrak{A}$ существует $h$ попарно непересекающихся подмножеств, каждое из которых является равносоставленным с $\mathfrak{J}_\varkappa$, это тем более имеет место и для $\mathfrak{J}_\varkappa$. Обозначим эти подмножества множества $\mathfrak{A}$ через $\mathcal{K}_{1,\varkappa}, \mathcal{K}_{2,\varkappa}, \ldots$ $\ldots, \mathcal{K}_{h,\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$).

Считаем теперь, что в $\mathfrak{G}$ существует $k$ отображений $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, которые отображают $\mathfrak{A}$ на $k$ попарно непересекающихся подмножеств $\eta_1\mathfrak{A}, \eta_2\mathfrak{A}, \ldots, \eta_k\mathfrak{A}$. Это не ограничивает общности наших рассмотрений[53], [14]. Тогда $\mathfrak{J}_\varkappa$ равно-

[53] В наших примерах это почти всегда выполнено, хотя это свойство не вытекает из условий п. 5 введения, поэтому нам надо доказать, что это требование не вносит ничего существенного во всех случаях. Это мы делаем с помощью следующего примера.

Вместо $\mathfrak{M}$ рассматриваем последовательность множеств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$, каждое из которых отображается взаимно однозначно на $\mathfrak{M}$ (при этом они являются попарно непересекающимися); пусть точка $x \in \mathfrak{M}$ соответствует $x_p$ из $\mathfrak{M}_p$ ($p = 1, 2, \ldots$). $x_1$ отождествляется с $x$ (тем самым $\mathfrak{M}$ с $\mathfrak{M}_1$). Объединение всех $\mathfrak{M}_1, \ldots$ обозначим $\mathfrak{M}^*$. Вместо $\mathfrak{G}$ рассматриваем следующую группу $\mathfrak{G}^*$: пусть $\sigma$ — любой элемент $\mathfrak{G}$ и $u(p) = q$ — любая подстановка чисел $1, 2, \ldots$, тогда формула $\sigma_u x_p = \sigma(x)_{u(p)}$ определяет общий элемент $\sigma_u$ и группы $\mathfrak{G}^*$ (если обозначить тождественную подстановку $u(p) = p$ символом 1, то можно отождествить $\sigma_1$ и $\sigma$). Рассмотрим $\mathfrak{A}$, как и выше.

составленно с $\mathcal{K}_{l,\varkappa}$ ($l = 1, 2, \ldots h$), следовательно, и с $\eta_\varkappa \mathcal{K}_{l,\varkappa}$ и все $\eta_\varkappa \mathcal{K}_{l,\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ и $l = 1, 2 \ldots, h$) попарно не пересекаются (для различных $\varkappa$, поскольку они $\subset \eta_\varkappa \mathfrak{A}$; для одного и того же $\varkappa$, но разных $l$, поскольку они есть образы попарно непересекающихся множеств $\mathcal{K}_{l,\varkappa}$). Поэтому $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}_k + \ldots$ $\ldots + \mathfrak{J}'_k$ $\mathfrak{G}$-равносоставлено с

$$U_l = \eta \mathcal{K}_{l,1} + \eta_2 \mathcal{K}_{l,r} + \ldots + \eta_k \mathcal{K}_{l,k},$$

а все $U_l$ попарно не пересекаются и с $\subset \eta_1 \mathfrak{A} + \ldots + \eta_k \mathfrak{A}$.

Положим $h = 2k$ и вместо $\eta_\varkappa \mathfrak{A}$ будем писать $\mathfrak{A}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$); $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ — попарно непересекающиеся множества, равно как и $U_1, \ldots, U_{2k}$ и все $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, $U_1, \ldots, U_{2k}$ $\mathfrak{G}$-равносоставлены, при этом $U_1 + U_2 + \ldots + U_{2k} \subset \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_k$[54].

Пусть для сокращения

$$\mathcal{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_k, \qquad \mathcal{B} = U_1 + U_2 + \ldots + U_k, \qquad \mathcal{C} = U_{k+1} + \ldots + U_{2k}.$$

Тогда $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ попарно $\mathfrak{G}$-равносоставлены и $\mathcal{B} + \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = 0$.

Из свойства С (см. п.5 введения) следует сразу, что и $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$ $\mathfrak{G}$-равносоставлено с $\mathcal{A}$, поэтому $\mathcal{B} + \mathcal{C}' = \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}' = 0$.

Очевидно, можно разложить $\mathcal{C}'$ (как и $\mathcal{A}$) на попарно непересекающиеся множества $U'_1, \ldots, U'_k$, каждое из которых $\mathfrak{G}$-равносоставлено с $\mathfrak{A}$. Получим

$$(U_1 + U'_1) + (U_2 + U'_2) + \ldots + (U_k + U'_k) =$$
$$= \mathcal{B} + \mathcal{C}' = \mathcal{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_k.$$

При этом, с одной стороны, множества $U_1$, $U'_1$, $U_2$, $U'_2, \ldots$, $U_k$, $U'_k$ и, с другой — множества $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ попарно не пересекаются, а $U_1 + U'_1$, $U_2 + U'_2, \ldots, U_k + U'_k$ попарно $\mathfrak{G}$-равносоставлены точно так же, как и $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{A}_k$.

Поэтому применимо D (см. п. 5 введения) (т. е. можно делить на $k$[55]): $U_1 + U'_1$ $\mathfrak{G}$-равносоставлено с $\mathfrak{A}_1$. Но так как $U_1, U'_1, \mathfrak{A}_1$ — все $\mathfrak{G}$-равносоставлены, то отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ (как и $U_1 + U'_1$) можно разложить на две части, каждая из которых $\mathfrak{G}$-равносоставлена с $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{G}$-равносоставленной со своей половиной.

---

Для подмножеств $\mathfrak{M}$ (т. е. $\mathfrak{M}_1$) понятие $\mathfrak{G}$-равносоставленности, очевидно, совпадает с понятием $\mathfrak{G}^*$-равносоставленности. Следовательно, $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}^*$ имеет те же свойства, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ в смысле п. 5 введения. Кроме того, в $\mathfrak{G}^*$ существуют отображения $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, которые нужны будут в дальнейшем: если $u_{ij}$ — транспозиция $i$ в $j$ и $l$ — тождественное отображение из $\mathfrak{G}$, то $l_{u_{11}}, l_{u_{12}}, \ldots, l_{u_{1k}}$ и есть требуемые отображения.

Если мы, используя это предположение, докажем (что в дальнейшем и делается), что $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{G}^*$-равносоставлено со своей половиной, то оно будет и $\mathfrak{G}$-равносоставлено со своей половиной, как это следует из сказанного выше.

54 Парадокс здесь выявлен: $2k$-кратное $\mathfrak{A}$ (в смысле $\mathfrak{G}$-равносоставленности) является подмножеством $k$-кратного!

55 Так как в условии п. 5 введения, очевидно, можно заменить $k$ любым $k' \geqslant k$, то можно предполагать, что $k$ имеет вид $2^s$. Поэтому D нам нужно в той мере, в какой оно дано у Банаха и Тарского (см. [4]), а не в более глубокой форме Кенига и Валко (ср. примеч. 25).

Тем самым мы доказали, следуя нашей программе, теорему.

Теорема 6. *Если условие из п. 5 введения выполнено, то* $\mathfrak{A}$ (*в указанном там смысле*) $\mathfrak{G}$-*расносоставлено со своей половиной, следовательно, не существует никакой* $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-*меры*.

2. Осталось показать выполнение условий теоремы 6 в интересующих нас случаях (именно $\mathfrak{G} = O_n'$, $O_n$, $A_n$; $\mathfrak{M} = K_n$, $R_n$, $R_n$ и $\mathfrak{A} = K_n$, единичный куб, единичный куб; ср. пункты 5, 6 введения). Как мы уже знаем, все зависит от того, содержат ли $O_n'$, $O_n$, $A_n$ свободную подгруппу с двумя образующими, произвольно близкими к тождественному преобразованию, и, в частности, можно ли выбрать эти подгруппы так, чтобы выполнялись условия о неподвижных точках (ср. п. 5 введения и примеч. 26; $K_n$, единичный куб, единичный куб подпадают под примененный там прием, поскольку в первом случае $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$, а во втором и третьем — $\mathfrak{A}$ ограничено и имеет внутренние точки, а $\mathfrak{G}$ содержит все трансляции). Если это будет доказано, то мы даже сможем утверждать, что любое ограниченное множество $\mathfrak{A}$ с внутренними точками $O_n'$-, $O_n$-, $A_n$-равносоставлено со своей половиной [56]

Теоретико-групповая причина возможности таких конструкций в том, что в $O_n'$, $O_n$, $A_n$ ($n \geqslant 3$, 3, 2) не имеют место нетривиальные тождественные соотношения, т. е. для всех систем $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ ($m$ — положительное целое число, $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ — целые неравные нулю числа, за исключением разве лишь $u_1$ и $v_m$) существуют такие $\sigma, \tau$ (из $O_n'$, $O_n$, $A_n$), что

$$\sigma^{u_1}\tau^{v_1}\ldots\sigma^{u_m}\tau^{v_m} \neq 1$$

(1 означает тождественное преобразование, т. е. единицу $O_n'$, $O_n$, $A_n$), естественно, за исключением тривиального случая $m = 1$, $u_1 = v_1 = 0$. К этому мы еще вернемся, сейчас же мы хотим показать, как упомянутое соображение позволяет чисто алгебраически сконструировать нужные подгруппы $\mathfrak{G}$.

Прежде всего построим свободную подгруппу с двумя образующими[15]. Каждая из трех групп $O_n'$, $O_n$, $A_n$ может, очевидно, преобразована взаимно однозначно, непрерывно и алгебраически[57] в конечное число параметров $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$, при этом, разумеется, параметры $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ будут подчинены определенным ограничениям. Можно считать, что тождественному преобразованию отвечают значения параметров (0, 0, ..., 0) и что $X_1, \ldots, X_\alpha$ произвольны в некоторой окрестности (0, 0, ... 0).

Выберем теперь в качестве $\sigma$ и $\tau$ параметры $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\alpha$ таким образом, чтобы они являлись алгебраически независимыми числами [58].

---

[56] Нетрудно получить отсюда результат Банаха — Тарского, по которому любые два ограниченных множества с внутренними точками являются $O_n'$-, $O_n$-равносоставленными ($n \geqslant 3$), но мы не будем останавливаться на деталях.

[57] То есть все коэффициенты преобразований зависят от $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ непрерывно и алгебраически.

[58] Конечное множество вещественных чисел называется алгебраически независимым, если не существует никакого нетривиального полинома с рациональными целыми коэффициентами, которые обращаются в нуль, если их подставить в качестве переменных, т. е. между ними нет никаких нетривиальных алгебраических соотношений.

Существование нетривиальных соотношений

$$\sigma^{u_1}\tau^{v_1}\dots\sigma^{u_m}\tau^{v_m} = 1$$

означало бы алгебраическое соотношение между параметрами, которое не может выполняться тождественно, так как справедливо не для всех $\sigma$, $\tau$ из $O'_n$, $O_n$, $A_n$ (по предположению!). Следовательно, для наших $\sigma, \tau$ оно определенно не выполняется (поскольку $X_1, \dots, X_\alpha$, $Y_1, \dots, Y_\alpha$ алгебраически независимы). Тем самым они определяют свободную группу. Для того чтобы $\sigma$ и $\tau$ были близки к единице, параметры $X_1$, $X_2$, ..., $X_\alpha$, $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_\alpha$ должны быть близки к 0 (они могут быть выбраны произвольно) [16].

Итак, мы получим свободную подгруппу с двумя образующими, которые находятся в произвольно выбранной окрестности единицы, если найдем алгебраически независимые значения параметров $X_1$, ..., $X_\alpha$, $Y_1$, ..., $Y_\alpha$, достаточно близкие к нулю, в остальном же эти значения могут быть произвольными. Осталось еще найти такое $k$ и $k$ таких систем, чтобы выполнялось условие о неподвижных точках. Будет доказано, что $k = n + 1$, и построено $n + 1$ таких $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$ ($\nu = 1$, $2$, ..., $n + 1$), что их параметры $X_{1,\nu}$, $X_{2,\nu}$, ..., $X_{\alpha,\nu}$, $Y_{1,\nu}$, ..., $Y_{\alpha,\nu}$ являются $2(n+1)\alpha$ алгебраически независимыми числами (достаточно близкими к 0).

Это действительно можно доказать: $n + 1$ (отличных от тождественного!) отображений

$$\sigma_\nu^{u(1,\nu)}\tau_\nu^{v(1,\nu)}\dots\sigma_\nu^{u(m_\nu,\nu)}\tau_\nu^{v(m_\nu,\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n+1)$$

не имеют ни одной общей неподвижной точки. В самом деле, поскольку $X_{1,\nu}, \dots$ $\dots, X_{\alpha,\nu}$, $Y_{1,\nu}, \dots, Y_{\alpha,\nu}$ алгебраически независимы (и так как существование неподвижной точки означает каждый раз наличие определенного — возможно, тождественно выполненного — алгебраического соотношения между значениями параметров $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$), достаточно показать, что в зависимости от $u(1, \nu)$, $v(1, \nu), \dots$ $\dots, u(m_\nu, \nu)$, $v(m_\nu, \nu)$ существуют такие $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n+1$), что у приведенных выше отображений нет общих неподвижных точек.

Рассмотрим множество неподвижных точек отображений

$$\sigma_\nu^{u(1,\nu)}\tau_\nu^{v(1,\nu)}\dots\sigma_\nu^{u(m_\nu,\nu)}\tau_\nu^{v(m_\nu,\nu)},$$

оно, во всяком случае, является линейным подмногообразием размерности $n' \leqslant$ $\leqslant n$ [59]. Можно выбрать $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$ так, что ($u(1, \nu), \dots, v(m_\nu, \nu)$ зафиксированы, причем в отличие от $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$) упомянутые выше выражения не равны 1, и тогда $n' < n$.

---

Сразу видно, что для $n$ заданных алгебраических чисел $X_1, X_2, \dots, X_n$ существует только счетное подмножество $X_{n+1}$, таких, что $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ алгебраически зависимы. Поэтому $X_{n+1}$ можно выбрать так, что $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ также алгебраически независимы. Следовательно, существует последовательность $X_1$, $X_2$, ..., каждое конечное подмножество которой алгебраически независимо. Можно даже указать такое числовое подмножество, имеющее мощность континуума, с использованием принципа выбора вслед за Лебегом [6] и Штейницем [7] или эффективно (ср. работу автора [8]).

[59] То есть $n'$-мерным подпространством $R_n$. В случае $K_n$ это множество должно содержать нуль, и мы рассматриваем те его точки, которые лежат в $K_n$.

Пусть наименьшее возможное значение $n'$ (по всем различным $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$ из нашей группы) будет $m_\nu$, оно меньше $n$. Поэтому можно указать $m_\nu$-мерное линейное многообразие, которое алгебраически зависит от параметров $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$ и которое содержит все неподвижные точки рассмотренного элемента. Так как $X_1, \ldots, X_\alpha$, $Y_1, \ldots, Y_\alpha$ алгебраически независимы, то это многообразие исчерпывает все неподвижные точки при нашем специальном выборе $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$. Поэтому достаточно доказать, что $n+1$ линейных многообразий не имеют никакой общей точки или (поскольку $X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots, X_{\alpha,\nu}$, $Y_{1,\nu}, Y_{2,\nu}, \ldots, Y_{\alpha,\nu}$ есть $2(n+1)$ алгебраически независимых числа) что можно так выбрать $\sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_{n+1}, \tau_{n+1}$, что упомянутые соответствующие $m_1$-, $m_2$-, ... $m_{n+1}$-мерные многообразия не имеют общих точек.

Но теперь они совершенно произвольны, так как если мы заменим $\sigma_\nu$, $\tau_\nu$ на $v\sigma_\nu v^{-1}$, $v\tau_\nu v^{-1}$ ($v$ из $O_n'$, $O_n$, $A_n$), то соответствующие линейные многообразия переходят в свой образ при отображении $v$; но $n+1$ произвольных линейных многообразий размерности, меньшей чем $n$, в самом деле не имеют никакой общей точки (ср. примеч. 59).

Итак, мы у цели; остается лишь доказать сделанное в начале данного пункта замечание о несуществовании нетривиальных соотношений в $O_n'$, $O_n$, $A_n$ ($n \geqslant 3, 3, 2$)[60]. Так как $O_3'$ является подгруппой $O_n'$, а последняя есть подгруппа $O_n$, а $A_2$ является подгруппой $A_n$, то достаточно рассмотреть $O_3$ и $A_2$[61,[17]].

Очевидно, $A_2$ есть двулистная накрывающая (zweistifiq) группы $L$ дробно-линейных (разрывных) отображений $y = (ax+b)/(cx+d)$, $ad - bc > 0$, $a$, $b$, $c$, $d$ — вещественные числа. (Так как общий множитель произволен, можно считать, что $ad - bc = 1$.) Следовательно, достаточно доказать отсутствие нетривиальных соотношений в этом случае. Группу $O_3'$ можно преобразовать (с помощью стереографической проекции единичного шара на комплексную плоскость) на группу отображений $y = (ax+b)/(cx+d)$, $a$, $b$, $c$, $d$ — комплексные числа, $d = \bar{a}$, $c = -\bar{b}$ ($x$, $y$ — комплексные числа). В этой группе нетривиальные соотношения отсутствуют, если они отсутствуют в большей группе отображений $y = (ax+b)/(cx+d)$, $ad - bc > 0$, $a$, $b$, $c$, $d$ — комплексные числа (условия $d = \bar{a}$, $c = -\bar{b}$ не являются алгебраическими условиями, и здесь можно, умножая на общий множитель, свести все к случаю $ad - bc = 1$); однако в общем случае это так, если при вещественных $a$, $b$, $c$, $d$ (в упомянутой группе $L$) нет нетривиальных соотношений. Поэтому достаточно рассмотреть группу $L$[18].

Пусть $\omega$ является элементом $y = -1/x$ группы $L$ ($\omega^2 = 1$); достаточно (для данных целых чисел $s_1, \ldots, s_p$ все $s \neq 0$) найти такое $\chi$ из $L$, что

$$\chi^{s_1}\omega\chi^{s_2}\omega \ldots \omega\chi^{s_p} \neq 1,$$

[60] Собственно, еще нужно доказать, что алгебраически независимые числа существуют в любой окрестности (0, 0, ..., 0). Но по примеч. 58 существует последовательность алгебраически независимых чисел, и они остаются таковыми, если мы прибавим произвольные рациональные числа к каждому числу этой последовательности. Если выбрать эти числа подходящим образом, то можно получить нужную последовательность в окрестности нуля.

[61] Для $O_3$ это показал Хаусдорф [2, с. 401].

а тогда и

$$\sigma^{u_1}\tau^{v_1} \dots \sigma^{u_m}\tau^{v_m} \neq 1,$$

нужно лишь положить ($k$, $l$ — положительные целые, $k \neq l$)

$$\sigma = \chi^k \omega \chi^k, \qquad \tau = \chi^l \omega \chi^l.$$

В качестве $\chi$ можно взять $y = x + 2$. Тогда $\chi^{s_1}\omega\chi^{s_2}\omega \dots \omega\chi^{s_p}$ есть отображение

$$y = 2s_1 - \cfrac{1}{2s_2 - \cfrac{1}{2s_3 \ddots \cfrac{1}{2s_{p-1} - \cfrac{1}{2s_p + x}}}}$$

$$(s_1, s_2, \dots, s_p = \pm 1, \pm 2 \dots).$$

Если бы $y = x$, то для $x = \infty$ должно быть бесконечным

$$2s_1 - \cfrac{1}{2s_2 - \ddots \cfrac{1}{2s_{p-1}}}$$

(здесь предполагается, что $p > 1$, но для $p = 1$, очевидно, $x + 2s_1 \neq x$, следовательно, $\chi^{s_1} \neq 1$).

Подходящие цепные дроби

$$2s_{p-1}, \quad 2s_{p-2} - \frac{1}{2s_{p-1}}, \quad \dots, \quad 2s_2 - \cfrac{1}{2s_3 \ddots \cfrac{1}{2s_{p-1}}}, \qquad 2s_1 - \cfrac{1}{2s_2 \ddots \cfrac{1}{2s_{p-1}}}$$

(как легко видеть из построения) все превышают единицу и конечны; в частности, последняя цепная дробь не равна $\infty$ [19].

## Часть III

## ПОНЯТИЕ «КОНГРУЭНТНО МЕНЬШЕ» И МЕРА ЛЕБЕГА

1. Обратимся теперь к линейным множествам (множествам вещественных чисел), так же как и к понятию из п. 6 введения «конгруэнтно меньше». Для этой цели снова рассмотрим группу всех отображений $L : y = (ax + b)/(cx + d)$, $ad - bc = 1$, $a$, $b$, $c$, $d$ — вещественные числа.

Наши намерения в том, чтобы для обоих утверждений, объявленных в пунктах 6, 7 введения, провести общую вспомогательную конструкцию. Мы хотим

показать, что каждый интервал $I = (a, b)$ (множество всех $x$, $a < x < b$, $a < b$) содержит континуум попарно непересекающихся подмножеств, с каждым из которых он $L$-равносоставлен, при этом используются только те отображения из $L$, которые лежат в произвольной (предписанной) близости к трансляциям (ср. примеч. 64); позже мы перейдем от $L$-равносоставленности к понятию «конгруэнтно меньше».

Обобщим сначала доказанные в конце п. 2 части II результаты о группе $L$; а именно покажем, что никакое соотношение

$$\sigma_{p_1}^{u_1}\sigma_{p_2}^{u_2}\ldots\sigma_{p_m}^{u_m} = 1$$

($u_1, u_2, \ldots, u_m$ — целые, не равные нулю; $p_1, \ldots, p_m = 1, 2, \ldots, \nu$; $p_1 \neq p_2$, $p_2 \neq p_3, \ldots, p_{m-1} \neq p_m$) не выполняется тождественно, т. е. при любом выборе элементов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ из $L$. Достаточно положить $\sigma_\mu = \chi^{k_\mu}\omega\chi^{k_\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$, где $\omega$ и $\chi$ — из п. 2, причем все $k_\mu$ положительны и отличны один от другого. Отсюда сразу следует, что если коэффициенты $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ алгебраически независимы [62], то приведенное выше соотношение не выполняется при таком специальном выборе $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$.

Далее, два преобразования

$$\sigma_{p_1}^{u_1}\sigma_{p_2}^{u_2}\ldots\sigma_{p_m}^{u_m} \text{ и } \tau_{q_1}^{v_1}\ldots\tau_{q_n}^{v_n}$$

($u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — целые, не равные нулю; $p_1, p_2, \ldots, p_m = 1, 2, \ldots, \mu$; $q_1, \ldots, q_n = 1, 2, \ldots, \nu$; $p_1 \neq p_2$, $p_2 \neq p_3, \ldots, p_{m-1} \neq p_m$ и $q_1 \neq q_2$, $q_2 \neq q_3 \ldots q_{n-1} \neq q_n$), вообще говоря (т. е. для подходящих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ из $L$), не имеют общих неподвижных точек. Действительно, выберем сначала $\sigma_1, \ldots, \sigma_\mu$ и $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ так, чтобы оба наших преобразования были не равны 1, тогда каждое из них имеет самое большее две неподвижные точки $P_1$, $P_2$ и соответственно $Q_1$, $Q_2$, и пусть элемент $v$ из $L$, такой, что $vP_1$ и $vP_2$ отличны как от $Q_1$, так и от $Q_2$. Затем заменяем $\sigma_1, \ldots, \sigma_\mu$ на $v\sigma_1 v^{-1}, \ldots, v\sigma_\mu v^{-1}$; при этом первое из упомянутых выше преобразований имеет неподвижные точки $vP_1$, $vP_2$; следовательно, не имеет общих неподвижных точек со вторым. Точно так же нет неподвижных точек, если коэффициенты $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ алгебраически независимы.

Теперь выберем континуум вещественных чисел, каждая конечная подсистема которого является алгебраически независимой (ср. примеч. 58), и индексируем их следующим образом:

$$a'_\theta,\ b'_\theta,\ c'_\theta,\ a''_\theta,\ b''_\theta,\ c''_\theta \text{ (}\theta\text{ пробегает все вещественные числа).}$$

Ниже рассмотрим их более детально. Теперь положим $d'_\theta = (1 + b'_\theta c'_\theta)/a'_\theta$, $d''_\theta = (1 + b''_\theta c''_\theta)/a''_\theta$ и определим преобразования $\sigma_\theta$, $\tau_\theta$ как преобразования из $L$:

---

[62] Преобразование $\sigma$ из $L$ $y = (ax + b)/(cx + d)$, $ad - bc = 1$, имеет три коэффициента: $a$, $b$, $c$, четвертый выражается посредством $d = (1 + bc)/a$ (случай $a = 0$ мы не принимаем в расчет).

$$y = \frac{a'_\theta x + b'_\theta}{c'_\theta x + d'_\theta} \text{ и соответственно } y = \frac{a''_\theta x + b''_\theta}{c''_\theta x + d''_\theta}.$$

Согласно сказанному вначале нет соотношений $\sigma_{\theta_1}^{u_1}\sigma_{\theta_2}^{u_2}\ldots\sigma_{\theta_k}^{u_k} = 1$ между любыми $\sigma_\theta$, следовательно, они образуют свободную подгруппу группы $L$ с континуумом образующих $\mathcal{H}'$, точно так же $\tau_\theta$ образуют свободную подгруппу группы $L$ с континуумом образующих $\mathcal{H}''$. Согласно сказанному никакой, отличный от единицы элемент $\mathcal{H}'$ не может иметь общей неподвижной точки с отличным от единицы элементом $\mathcal{H}''$.

Обозначим через $\mathcal{F}'$ множество всех чисел, которые не являются неподвижными точками никакого, отличного от единицы элемента $\mathcal{H}'$. Каждый элемент $\mathcal{H}'$ отображает $\mathcal{F}'$ на себя (ср. примеч. 51). Два элемента $\mathcal{F}'$, которые могут быть отображены один в другой посредством элемента из $\mathcal{H}'$, назовем $\mathcal{H}'$-эквивалентными: $x \sim y$; из группового свойства $\mathcal{H}'$ следует, что $x \sim x$; из $x \sim y$ вытекает $y \sim x$ и из $x \sim y$, $y \sim z$ вытекает $x \sim z$. Таким образом, $\mathcal{F}'$ распадается на попарно непересекающиеся классы $\mathcal{H}'$-эквивалентных элементов; из каждого такого класса выберем по одному элементу и объединим их в множество $\mathcal{K}'$. Из определения $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{H}'$ сразу следует, что если $\sigma$ пробегает все элементы $\mathcal{H}'$, то $\sigma\mathcal{K}'$ пробегает попарно непересекающиеся множества, которые составляют вместе $\mathcal{F}'$.

Каждый элемент $\mathcal{H}'$ может быть одним и только одним образом представлен в виде

$$\sigma_{\theta_1}^{u_1}\sigma_{\theta_2}^{u_2}\ldots\sigma_{\theta_m}^{u_m},$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_m$ — целые, не равные нулю; $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_2 \neq \theta_3, \ldots, \theta_{m-1} \neq \theta_m$; для единицы группы $m = 0$.

Пусть $\mathcal{H}'_\theta$ — множество всех элементов $\mathcal{H}'$ со свойством $\theta_1 = \theta$. Множества $\mathcal{H}'_\theta$ попарно не пересекаются и составляют $\mathcal{H}$ (за вычетом единицы). Очевидно,

$$\mathcal{H}'_\theta \subset \sigma_\theta \mathcal{H}'_\xi, \qquad \xi \neq \theta, \qquad \mathcal{H}' - \mathcal{H}'_\theta \subset \sigma_\theta^{-1}\mathcal{H}'_\theta.$$

Если $\mathcal{K}'_\theta$ является объединением всех $\sigma\mathcal{K}$ по $\sigma$ из $\mathcal{H}_\theta$, то $\mathcal{K}'_\theta$ — попарно непересекающиеся подмножества $\mathcal{F}'$ и

$$\mathcal{K}'_\theta \subset \sigma_\theta \mathcal{K}'_\xi, \qquad \xi \neq \theta, \qquad \mathcal{F}' - \mathcal{K}'_\theta \subset \sigma_\theta^{-1}\mathcal{K}'_\theta\ {}^{63}.$$

Точно так же мы можем построить $\mathcal{H}''$ и множества $\mathcal{F}''$, $\mathcal{K}''_\theta$ со свойствами

$$\mathcal{K}''_\theta \subset \tau_\theta \mathcal{K}''_\theta, \qquad \xi \neq \theta, \qquad \mathcal{F}'' - \mathcal{K}''_\theta \subset \tau_\theta^{-1}\mathcal{K}''_\theta.$$

Согласно предыдущему каждое число лежит либо в $\mathcal{F}'$, либо в $\mathcal{F}''$ [20].

Рассмотрим несколько более детально числа $a'_\theta$, $b'_\theta$, $c'_\theta$, $a''_\theta$, $b''_\theta$, $c''_\theta$, из которых мы исходили. Можно прибавить к каждому из них произвольное рациональное

[63] Заметим, что здесь, по существу, уже содержится парадокс: $\mathcal{F}'$ разложен на континуум подмножеств, каждое из которых может быть покрыто другими, но одновременно покрывает их объединение (конечно, лишь с помощью отображений из $L$).

число, не нарушив их алгебраическую независимость, следовательно, можно для каждого из этих чисел предписать, в каком интеграле оно лежит.

Если $\sigma$ из $L$ имеет коэффициенты $a$, $b$, $c$ (и $d = (1 + bc)/a$) и $a$, $b$, $c$ достаточно близки соответственно к 1, 0, 0, то $\sigma$ будет лежать в произвольной близости к единичному отображению. В частности, можно достичь того, что для каждого $x$, $y$ из $I$ имело место

$$|\sigma x - x| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{\sigma x - \sigma y}{x - y} - 1\right| < \varepsilon;$$

$\varepsilon$ — фиксированное положительное число, мы распорядимся им позже. В отвечающем $\varepsilon$ малом интервале набора (1, 0, 0) возьмем соответственно $a_\theta$, $b'_\theta$, $c'_\theta$, равно как и $a''_\theta$, $b''_\theta$, $c''_\theta$; упомянутые выше соотношения тогда выполнены для всех $\sigma = \sigma_\theta$ и $\tau = \tau_\theta$.

После этой подготовки выберем подынтервал $J$ из $I$, который целиком лежит во внутренности $I$ и имеет длину, равную половине исходной, например $I = (a, b)$, $J = ((3a + b)/4, (a + 3b)/4)$. Разложим $I$ па два подынтервала $I' = (a, (a + b)/2)$, $I'' = ((a + b)/2, b)$ и обозначим принадлежащие $L$ трансляции $y + {}^1/_4 (a - b)$ и $y = x - {}^1/_4 (a - b)$ через $\rho'$, соответственно $\rho''$, тогда

$$\rho' I' = \rho'' I'' = J.$$

Сопоставим каждому $\theta$, $0 < \theta < 1$, взаимно однозначное отображение интервала $I$, которое на каждой из частей некоторого конечного разбиения $I$ является элементом $L$, т. е. осуществляет $L$-равносоставленность.

Разложим прежде всего $I$ на $I'$ и $I''$ и применим к этим частям $\rho'$ и $\rho''$ соответственно, после чего образы составят $J$. Затем $J$ разлагаются на части, лежащие в $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}'' - \mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ (следовательно, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{F}'$, $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{F}''$, $\mathcal{E}' + \mathcal{E}'' = J$, $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' = 0$)[21]. Множество $\mathcal{E}'$ разлагается на части $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}'_2$, лежащие соответственно в $\mathcal{K}'_\theta$ и $\mathcal{F}' - \mathcal{K}'_\theta$, точно так же $\mathcal{E}''$ разлагается на $\mathcal{E}''_1$ и $\mathcal{E}''_2$, лежащие соответственно в $\mathcal{K}''_\theta$ и $\mathcal{F}'' - \mathcal{K}''_\theta$.

Теперь применяем к $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_2$, $\mathcal{E}''_1$, $\mathcal{E}''_2$ отображения $\sigma_\theta$, $\sigma_{\theta+1}\sigma_\theta$, $\tau_\theta$, $\tau_{\theta+1}\tau_\theta$ или $\sigma_{\theta+2}$, $\sigma_{\theta+3}\sigma_\theta$, $\tau_{\theta+2}$, $\tau_{\theta+3}\tau_\theta$, смотря по тому, лежал ли исходный элемент в $I'$ или $I''$. Тем самым интервал $I$ разбит на восемь частей и отображен на $\mathcal{K}_\theta$, $\mathcal{K}_{\theta+1}$, $\mathcal{K}''_\theta$, $\mathcal{K}''_{\theta+1}$, $\mathcal{K}'_{\theta+2}$, $\mathcal{K}'_{\theta+3}$, $\mathcal{K}''_{\theta+2}$, $\mathcal{K}''_{\theta+3}$. Каждое из составляющих отображений является взаимно однозначным, но суммарное отображение не таково, потому что не все упомянутые множества попарно не пересекаются. Точнее, отображение четырех из этих частей на подмножество $\mathcal{K}_\theta + \mathcal{K}_{\theta+1} + \mathcal{K}'_{\theta+2} + \mathcal{K}'_{\theta+3}$ взаимно однозначно, равно как и отображение остальных на $\mathcal{K}''_\theta + \mathcal{K}''_{\theta+1} + \mathcal{K}''_{\theta+2} + \mathcal{K}''_{\theta+3}$; однако эти два множества могут иметь общие точки.

Чтобы устранить последнее, поступим следующим образом: обозначим через $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}''$ эти два множества ($\mathcal{R}' \subset \mathcal{F}'$, $\mathcal{R}'' \subset \mathcal{F}''$). Разобьем $\mathcal{R}''$ на две части: $\mathcal{R}''_1 = \mathcal{R}'' \cap \mathcal{F}'$, $\mathcal{R}''_2 = \mathcal{R}'' - \mathcal{R}'' \cap \mathcal{F}'$. Множество $\mathcal{R}''_2$ оставляем без изменений, а $\mathcal{R}'_1$ разлагаем далее на части, лежащие в $\mathcal{K}_\theta$ и $\mathcal{F}' - \mathcal{K}'_\theta$. Первое отображается с помощью $\sigma_{\theta+4}$, второе — $\sigma_{\theta+5}\sigma_\theta$. Тем самым мы отобразим интервал $I$, разби

тый на четыре множества, на подмножества $\mathcal{K}_\theta+\mathcal{K}_{\theta+1}+\mathcal{K}_{\theta+2}+\mathcal{K}_{\theta+3}$, $\mathcal{K}'_{\theta+4}$, $\mathcal{K}'_{\theta+5}$, $(\mathcal{K}''_\theta+\mathcal{K}''_{\theta+1}+\mathcal{K}''_{\theta+2}+\mathcal{K}''_{\theta+3})\cap\mathcal{F}'$ (в каждом случае взаимно однозначно). Эти множества уже не пересекаются, таким образом, суммарное отображение взаимно однозначно.

Следовательно, получающийся при этом образ множества содержится в некотором подмножестве $\mathcal{K}'_\theta+\mathcal{K}'_{\theta+1}+\mathcal{K}'_{\theta+2}+\mathcal{K}'_{\theta+3}+\mathcal{K}_{\theta+4}+\mathcal{K}'_{\theta+5}+(\mathcal{K}''_\theta+\mathcal{K}''_{\theta+1}+\mathcal{K}''_{\theta+2}+\mathcal{K}''_{\theta+3})\cap\mathcal{F}''$. Множества, соответствующие разным $\theta$, $0<\theta<1$, поэтому не пересекаются. Далее, все образы точек из $J$ возникли с помощью применения одного из отображений $\sigma_\theta$, $\sigma_{\theta+1}\sigma_\theta$, $\sigma_{\theta+2}$, $\sigma_{\theta+3}\sigma_\theta$; $\tau_\theta$, $\tau_{\theta+1}\tau_\theta$, $\tau_{\theta+2}$, $\tau_{\theta+3}\tau_\theta$; $\sigma_{\theta+4}\tau_\theta$, $\sigma_{\theta+4}\tau_{\theta+1}\tau_\theta$, $\sigma_{\theta+4}\tau_{\theta+2}$, $\sigma_{\theta+4}\tau_{\theta+3}\tau_\theta$, $\sigma_{\theta+5}\sigma_\theta\tau_\theta$, $\sigma_{\theta+5}\sigma_\theta\tau_{\theta+1}\tau_\theta$, $\sigma_{\theta+5}\sigma_\theta\tau_{\theta+2}$, $\sigma_{0+3}\sigma_\theta\tau_{\theta+3}\tau_\theta$. Из ранее отмеченных свойств $\sigma_\xi$, $\tau_\xi$ следует, что если выбрать произвольное $\varepsilon>0$ так, что $4\varepsilon<{}^1/_4\,(b-a)$, то все образы точек удалены от $J$ меньше чем на $4\varepsilon<{}^1/_4\,(b-a)$, следовательно, лежат в $I$.

Итак, мы нашли континуум попарно непересекающихся подмножеств в $I$; обозначим их $\mathfrak{A}_\theta$, $0<\theta<1$, каждое из которых $L$-равносоставлено с $I$. Кроме того, каждое из использованных отображений $\psi$ из $L$ состоит из одной трансляции ($\rho'$ или $\rho''$) и, самое большее, из четырех последовательных отображений $\sigma_\xi$, $\tau_\xi$. Отсюда для точек из $I$

$$(1-\varepsilon)^4<(\psi x-\psi y)/(x-y)<(1+\varepsilon)^4.$$

Итак, следовательно, если $\eta>0$ и $\varepsilon$ такие, что $(1-\varepsilon)^4>1-\eta$, $(1+\varepsilon)^4<1+\eta$, то для названных отображений во всем интервале $I$ справедливо

$$|(\psi x-\psi y)/(x-y)-1|<\eta.$$

2. Зафиксируем сначала, как и в п. 1, I и его подмножества $\mathfrak{A}_\theta$, $0<\theta<1$. Пусть $K$ — любой другой интервал, а $s$ — такое натуральное число, что длина $K$ не более $s$-кратной длины I, и разложим множество $K$ на интервалы $K_1, \ldots, K_s$, длина каждого из которых не более длины $I$; следовательно, существуют трансляции, например $\rho_1, \ldots, \rho_s$ из $L$, которые переводят соответствующий $K_i$ в $I$.

Таким образом, $K$, разбитый на $s$ частей, отображен на некоторую часть $I$. Так как $I$ $L$-равносоставлен с $\mathfrak{A}_{\theta_1}, \mathfrak{A}_{\theta_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{\theta_s}$, ($\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ — произвольные попарно различные числа, большие 0 и меньшие 1), то каждое из этих $s$ подмножеств $L$-равносоставлено с некоторым подмножеством (и эти подмножества не пересекаются!), тем самым $K$ равносоставлено с подходящим подмножеством $I$. Применяемые при этом отображения (подмножеств $K$) состоят из трансляций и отображений, реализующих равносоставленность $I$ и $\mathfrak{A}_\theta$ (ср. конец п. 1), следовательно, для этих отображений имеет место неравенство (для $x$, $y$ и $K$, $x\neq y$)

$$|(\psi x-\psi y)/(x-y)|<\eta\,^{64}.$$

[64] Одна только $L$-равносоставленность $K$ и подмножества из $I$ (или, как мы сейчас покажем, $I$ и $K$) не заслуживала бы внимания, так как все отображения $y=cx$, $c>0$, принадлежат $L$. Лишь условие $|(\psi x-\psi y)/(x-y)|<\eta$ (с произвольным $\eta>0$), которое обеспечивает сколь угодно точное сохранение длины (вместо абсолютно точного, как для трансляций), служит источником парадокса.

Так как $I$ совершенно произволен, то точно так же $I$ равносоставлен с подмножеством $K$ и для применяемых при этом отображений $\psi$ (подмножеств из $I$) снова выполнено упомянутое условие. Отсюда согласно свойству С п. 5 введения $I$ $L$-равносоставлено с $K$. Если проследить за доказательством С, то можно увидеть, что никаких других отображений, кроме $\psi$ и $\psi^{-1}$, при этом не возникает [65], тем самым для отображений $\xi$ (подмножеств $I$), которые здесь встречаются, справедливо неравенство (для $x$, $y$ из $I$, $x \neq y$)

$$\left| \frac{\xi x - \xi y}{x - y} - 1 \right| < \delta$$

($\delta > 0$ произвольно, но выбрано так, что для $\eta > 0$ $(1+\eta)^{-1} > 1 - \delta$, $(1-\eta)^{-1} < 1 + \delta$, а $\eta < \delta$).

Этот результат вместе с результатом п. 1 сформулируем еще раз:

Теорема 7. *Каждый интервал $I$ содержит континуум попарно непересекающихся подмножеств $\mathfrak{A}_\theta$, $0 < \theta < 1$, с каждым из которых он $L$-равносоставлен.* Каждый интервал $I$ $L$-равносоставлен с любым интервалом $K$. При этом можно добиться того, чтобы применялись только такие отображения (подмножеств $I$) $\psi$ из $L$, для которых ($x$, $y$ из $I$, $x \neq y$)

$$|(\psi x - \psi y)/(x - y) - 1| < \delta,$$

где $\delta > 0$ произвольно [66].

Теперь мы можем доказать анонсированные в пунктах 6, 7 введения результаты.

Пусть $I$, $K$ — два произвольных интервала. Отобразим $I$ на интервал $I'$ двойной длины (например, посредством $y = 2x$) и применим теперь к $I'$ и $K$ теорему 7 с $\delta = 1/2$. Так, при отображении $I$ на $I'$ расстояния удваиваются, и поскольку при последующих отображениях (конечного числа) частей $I'$ на части $K$ каждое расстояние остается больше, чем половина исходного, то в итоге всякое расстояние увеличивается. Следовательно, $I$ конгруэнтно меньше, чем $K$.

Далее, пусть $I$ — произвольный интервал, а $\mathfrak{A}_\theta$, $0 < \theta < 1$, — упомянутые в теореме 7 множества. Пусть $I'$ — интервал половинной длины, из которого $I$ получается отображением, например $y = 2x$. Мы применяем это отображение $I'$ на $I$, а затем $I$ и $\mathfrak{A}_\theta$, как в теореме 7 с $\delta = 1/2$. Точно так же, как и выше, отсюда следует, что $I'$ конгруэнтно меньше, чем $\mathfrak{A}_\theta$, но поскольку $I$ конгруэнтно меньше, чем $I'$, то тем самым $I$ конгруэнтно меньше, чем $\mathfrak{A}_\theta$ [22].

Итак, мы получаем из теоремы 7

Следствие. *В обозначениях теоремы 7 имеет место следующее соотношение: $I$ конгруэнтно меньше, чем каждое из $\mathfrak{A}_\theta$ $(0 < \theta < 1)$; $I$ конгруэнтно меньше, чем $K$.*

Тем самым мы полностью обосновали утверждения пунктов 6, 7.

---

[65] Свойство С было высказано Банахом—Тарским как теорема 8 в [4]; доказательство есть у Банаха (см. примеч. 24) и является дословным повторением доказательства теоремы эквивалентности Кантора—Бернштейна.

[66] Это и есть, собственно, парадокс, который получен для линейных множеств, ср. примеч. 64.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Lebesque H*. Lecons sur l'integration. P. : Gauthier-Villars. 1905. 138 p.
2. *Hausdorff F*. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
3. *Banach S*. Sur le problem de la mesure.— Fund. math., 1923, t. 4, s. 7—34.
4. *Banach S*., *Tarski A*. Sur la décomposition de ensembles de points an parties respectivement congruentes.— Fund. math., 1924, t. 6, s. 244—277.
5. *König D*., *Valko S*. Sur les correspondences multivogucs de ensembles.— Fund. math., 1926, t. 8, s. 114—134.
6. *Lebesque H*. Sur les transformations ponctuelles transformant les plans eu plans, qu'on peut définir par des procédes analytiques.— Atti Acad. Sci. Torino, 1907, vol. 42, p. 532—539.
7. *Steinitz E*. Algebraische Theorie der Körper.— J. reine und angew. Math., 1910, Bd. 137, S. 167—309.
8. *Neumann J. von*. Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen.— Math. Ann., 1928, Bd. 99, S. 134—141.

# ДОБАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ «К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕРЫ»*

К сожалению, автор лишь после правки корректуры узнал, что задача построения континуального семейства попарно непересекающихся множеств, не являющихся множествами нулевой меры, была решена в работе В. Серпинского «Аксиома Цермело и ее роль...» (Bull. Acad. Sci. Cracovie, 1918, avr. — mai, s. 151).

Все же основная идея нашего примера, быть может, не лишена самостоятельного интереса. Серпинский гораздо более мощно использует принцип выбора. Для его конструкции необходимо использовать вполне совершенные множества и упорядочение континуума. Мы нуждаемся лишь в одновременном выборе из континуального семейства множеств, что необходимо при построении неизмеримых множеств.

---

* Fund. math., 1929, t. 13, s. 333.

# О БЕСКОНЕЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ*

## ВВЕДЕНИЕ

**1.** В теории *векторных пространств* двумя важнейшими операциями являются образование *прямой суммы* и образование *тензорного произведения*. Напомним для удобства определения этих понятий.

Комплексное *векторное пространство* $\mathfrak{V}$ — это множество элементов $f$, $g$, ..., в котором определены операции $f+g$ и $af$ (для каждого комплексного числа $a$), обладающие обычными свойствами (коммутативность и ассоциативность для $f+$ $+g$, ассоциативность для $af$, обе дистрибутивности, существование 0 и $1f=f$, $0f=0$)[1]. Если конечное подмножество $f_1,\ldots,f_n$ пространства $\mathfrak{V}$ таково, что каждый элемент $f$ из $\mathfrak{V}$ может быть записан в виде $f=a_1f_1+\ldots+a_nf_n$ ($a_1$, ... ..., $a_n$ — комплексные числа) одним и только одним способом, то $f_1$, ..., $f_n$ образуют *конечный базис в* $\mathfrak{V}$.

Если $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ — два векторных пространства с конечными базисами $f_1^1,\ldots,f_n^1$ и $f_1^2,\ldots,f_m^2$, то хорошо известно, что могут быть определены два векторных пространства $\mathfrak{W}'$ и $\mathfrak{W}''$, которые имеют — в надлежащих обозначениях — базисы, образованные элементами $f_1^1,\ldots,f_n^1$, $f_1^2,\ldots,f_m^2$ и соответственно символическими выражениями $f_i^1\otimes f_j^2$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,m$. $\mathfrak{W}'$ есть *прямая сумма* $\mathfrak{V}_1\oplus\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{W}''$ — *тензорное произведение* $\mathfrak{V}_1\otimes\mathfrak{V}_2$.

Пространство $\mathfrak{V}_1\oplus\mathfrak{V}_2$ может быть построено без использования конечных базисов пространств $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$: как множество всех пар $\{f^1,f^2\}$, $f^1$ из $\mathfrak{V}_1$, $f^2$ из $\mathfrak{V}_2$ с операциями

$$\{f^1,f^2\}+\{g^1,g^2\}=\{f^1+g^1,\ f^2+g^2\},\qquad a\{f^1,f^2\}=\{af^1,af^2\}.$$

Для $\mathfrak{V}_1\otimes\mathfrak{V}_2$ такая общая процедура связана с многими трудностями; для сепарабельных гильбертовых пространств «безбазисная» процедура дана в [7, с. 127 — 133] (см. особенно п. 2.2).

Возвращаясь к первоначальным $\mathfrak{V}_1\oplus\mathfrak{V}_2$ и $\mathfrak{V}_1\otimes\mathfrak{V}_2$, нетрудно видеть, что обе эти операции коммутативны и ассоциативны, что позволяет определить произвольные конечные прямые суммы $\mathfrak{V}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{V}_k$ и тензорные произведения $\mathfrak{V}_1\otimes\ldots\otimes\mathfrak{V}_k$, $k=1,2,\ldots$

2. Эти операции могут быть определены как для сепарабельных, так и для несепарабельных гильбертовых пространств $\mathfrak{V}_1$, ..., $\mathfrak{V}_k$ (см. п. 1.1), и применение операции $\oplus$ оказалось мощным средством при изучении гильбертовых пространств. Здесь можно упомянуть два примера: теорию замкнутых и сопряженных

---

* Compos. Math., 1938, bd. 6, blz. 1—77.

[1] В абстрактно-алгебраической терминологии: $\mathfrak{V}$ есть абелева группа (модуль) с комплексными числами в качестве операторов.

операторов в том виде, как она рассмотрена в [10][2], и теорию колец операторов [9], где с помощью операции $\oplus$ обосновывается основная теорема 5 [9, с. 393—396][3]. В связи с тем, что существуют указания на аналогичные возможности для $\otimes$, представляется разумным изучение действия операций $\oplus$ и $\otimes$ в гильбертовых пространствах. Ограничиваясь гильбертовыми пространствами, мы избегаем всех трудностей, связанных с возможностью несуществования базисов, что чрезвычайно важно для общих векторных пространств.

При проведении столь детального исследования представляются желательными также обобщения, приводящие к бесконечным прямым суммам и тензорным произведениям $\mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2 \oplus \ldots$ и $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \otimes \ldots$

3. Скажем вначале несколько слов о бесконечных прямых суммах, хотя они и не являются объектом исследования данной статьи [4]. Оказывается, $\mathfrak{B}_1 \oplus \oplus \mathfrak{B}_2 \oplus \ldots$ не есть самое широкое возможное обобщение понятия прямой суммы. Если $x$ есть параметр на пространстве $S$, в котором определена лебегова мера [5] $\mu(T)$, и для каждого $x$ из $S$ дано гильбертово пространство $\mathfrak{H}_x$, то можно определить *прямой интеграл* $\int_S \oplus \mathfrak{H}_x\, dx$, являющийся вновь гильбертовым пространством. (Первый пример ссылки [5] приводит тогда к обычной $\mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2 \oplus \ldots$)

Это обобщение кажется очень естественным и удобным потому, что допускает различные интересные приложения. Так, с его помощью автор достиг успеха в описании всех колец операторов при помощи колец, которые Ф. Дж. Мюррей и автор назвали «факторами» и для которых существует развитая количественная теория (см. [7], где изучаются «факторы»). Эти исследования позволяют обобщить теорию редукции унитарных представлений групп на все гильбертовы пространства (включая сепарабельные гильбертовы пространства) и связать их с упомянутой выше теорией факторов. (Это будет сделано в публикации, упомянутой в примеч. 4.)

4. Вернемся теперь к тензорным произведениям. Как отмечено в п. 2, конечные тензорные произведения $\mathfrak{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{H}_n$ (для гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$) были определены в [7] как рабочий инструмент в теории факторов. Мы обобщим это определение на бесконечные тензорные произведения $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2 \otimes, \ldots,$ и, как будет явствовать из последующего, здесь возможно дальнейшее обобщение, но в совершенно ином смысле, чем для бесконечных прямых сумм (соответственно прямых интегралов), обсуждавшихся в п. 3.

Это обобщение состоит в допущении тензорных произведений с произвольным числом сомножителей: если $I$ — произвольное множество и для каждого $\alpha \in I$ задано гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\alpha$, то может быть образовано бесконечное тензорное произведение $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$[6]. Основная причина рассмотрения всех этих

---

[2] Пространство $\mathscr{H}$, определенное в [10, с. 299] и являющееся основой всего исследования, есть наше $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$.

[3] Использованное там пространство $\bar{\mathfrak{H}}$ есть наше $\mathfrak{H} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}$ ($k$ слагаемых).

[4] Они будут детально изучены в другой публикации, которая должна вскоре появиться. См.: Ann. Math., 1949, vol. 50, p. 401—485 (примеч. перев.).

[5] Например, $S$ есть множество всех положительных целых чисел, $\mu(T)$ — число элементов в $T$. Или $S$ — множество всех вещественных чисел, $\mu(T)$ — некоторая мера Лебега — Стилтьеса $\int_T d\varphi(x)$ ($\varphi(x)$ — монотонная функция).

[6] В этом обозначении $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2 \otimes \ldots$ есть $\Pi \otimes_{n \in (1,2,\ldots)} \mathfrak{H}_n$.

пространств $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ состоит в том, что, в то время как теория счетных бесконечных тензорных произведений $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2\otimes\ldots$ имеет существенно новые черты по сравнению с теорией конечных тензорных произведений $\mathfrak{H}_1\otimes\ldots\otimes\mathfrak{H}_n$, переход от $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2\otimes\ldots$ к общему $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ не представляет дополнительных трудностей.

По-видимому, следует указать на то, что если обобщение прямой суммы происходит в направлении теории меры Лебега—Стилтьеса, то обобщение тензорных произведений ведет к более высоким теоретико-множественным мощностям («алефы» Г. Кантора), а совсем не к проблемам теории меры.

5. Обсуждение бесконечных тензорных произведений приводит к необходимости детального анализа бесконечных числовых произведений $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha$ ($z_\alpha$ — комплексные числа). Нет нужды говорить об этом сейчас, так как соответствующий анализ проводится в гл. 2 со всеми деталями, однако нам кажется уместным сделать здесь несколько замечаний (все они полнее будут обсуждаться в самой статье).

Первое: бесконечные тензорные произведения существенно отличаются от конечных тем, что они «расщепляются» в «неполные» тензорные произведения $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Важность этого явления будет особенно подчеркнута теоремами I, V, VI и X.

Второе: обобщенного понятия сходимости («квазисходимости») произведений $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha$, описанного в п. 2.5, можно избежать, если ограничиться с самого начала «неполными» тензорными произведениями $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (см. п. 4.1). К тому же это дает еще одно преимущество: если все $\mathfrak{H}_\alpha$ сепарабельны и $I$ конечно или счетно, то $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ сепарабельно, а $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ нет (см. теорему V и лемму 6.4.1). Таким образом, $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ позволяет ограничиться (конечномерными) евклидовыми и сепарабельными гильбертовыми пространствами, тогда как $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ ведет к необходимости использования общих гильбертовых пространств.

Однако в связи с тем, что никаких реальных трудностей при этом не возникает и $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ представляется более естественным базисом для наших рассмотрений, чем $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, особенно в свете результатов части IV, мы остановимся на первой возможности. А использовав $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, по-видимому, нет причин настаивать на счетности множества $I$.

Третье: так как $I$ может быть несчетно, то мы должны определить несчетные бесконечные произведения $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$ (и суммы $\sum_{\alpha\in I}z_\alpha$ тоже). Это делается в гл. 2 и не вызывает затруднений. В частности, усложнение «квазисходимости» (ср. п. 2.5) возникает уже для счетных $I$.

6. Существенный результат нашей теории состоит в том, что кольцо $\mathcal{B}^{\#}$ ограниченных операторов в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, порожденных (алгебраически или предельным процессом) операторами в $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha\in I$, не содержит всех ограниченных операторов в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Его структура определена в теоремах IX и X.

Происходящее может быть описано на квантовомеханическом языке как «расщепление» $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на «несмешиваемые системы состояний», соответствую-

щие «неполным» тензорным произведениям $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Эта точка зрения, так же как и ее связь с теорией «гиперквантования», будет обсуждаться где-нибудь в другом месте.

Другое приложение нашей теории возможно к теории меры при рассмотрении бесконечных произведений пространств, а также к теории, являющейся основанием для современной теории вероятностей (см. [2, 3, 5]). Здесь существенно некоторое «неполное» тензорное произведение $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Это приложение также будет обсуждаться в другой публикации.

7. В гл. 7 показывается, сколь различно могут вести себя разные части кольца $\mathscr{B}$, отвечающие $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$-разложению пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Один специальный пример, представляющий особый интерес, обсуждается в деталях (см., в частности, п. 7.3—7.5). Этот пример, по-видимому, существенно связан с теорией факторов Ф. Дж. Мюррея и автора [7] и дает особенно простые примеры различных сортов таких факторов, в частности важного типа ($\mathrm{II}_1$) («конечно-непрерывных», см. [7, с. 172, 209—229]).

8. Все ссылки в статье даются на литературу [1—15] (помещенную в конце статьи). Используемые обозначения полностью объяснены в п. 1.1.

Предполагается, что читатель знаком с общей теорией сепарабельных гильбертовых пространств в том виде, как она изложена в [8, 12, 14], и ее обобщением на общие гильбертовы пространства, данным в [4, 12, 13] или [15] (см. п. 1.1б). Для глав 5 и 6 желательно по меньшей мере знакомство с общими идеями [7] или [9]. Только в п. 7.5 будут использованы результаты [7].

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.
1. Общие понятия прямой суммы и тензорного произведения.
2. Прямые суммы и тензорные произведения в гильбертовых пространствах.
3. Прямые суммы и прямые интегралы.
4. Бесконечные тензорные произведения.
5. Неполные тензорные произведения.
6. Операторы в бесконечных тензорных произведениях.
7. Связь с теорией факторов.
8. Разное.

Часть I. Предварительные рассмотрения.
Глава 1. Обозначения.
1.1. Обозначения.
Глава 2. Сходимость.
2.1. Эвристические рассмотрения.
2.2. Определение сходимости.
2.3. Обсуждение $\Sigma_{\alpha\in I}z_\alpha$.
2.4. Обсуждение $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha$.
2.5. Квазисходимость $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha$.

Часть II. Тензорное произведение.
Глава 3. Построение тензорного произведения.
3.1. Определения $\Pi\widetilde{\otimes}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}f^0_\alpha$, $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

3.2. Скалярное произведение в $\Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$.
3.3. Классы эквивалентности в $\Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Теорема I.
3.4. Определение скалярного произведения в $\Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Теорема II.
3.5. Определение и свойства $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Теорема III.
3.6. Единственность $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Теорема IV.
Глава 4. Разложение полного тензорного произведения в неполные тензорные произведения.
4.1. Определение и структура $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$. Теорема V.
4.2. Ассоциативность. Теоремы VI, VII.
Часть III. Кольца операторов в тензорных произведениях.
Глава 5. Продолжение операторов и тензорное произведение.
5.1. Продолжение операторов.
5.2. Свойства продолжения на кольца. Теорема VIII.
Глава 6. Кольцо продолженных операторов.
6.1. Слабая эквивалентность. Определение $\Pi \otimes_{w\,\alpha \in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$.
6.2. Определение $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$, $P[\mathfrak{C}]$, $P_w[\mathfrak{C}_w]$. Свойства коммутативности.
6.3. Определение и структура кольца $\mathscr{B}^{\#}$. Теорема IX.
6.4. Дальнейшие свойства $\mathscr{B}^{\#}$. Теорема X.
Часть IV. Обсуждение одного специального случая.
Глава 7. Обсуждение одного специального случая.
7.1. Выбор примера.
7.2. Ситуация в $\Pi \otimes_{\substack{n=1,2,\ldots \\ \tau=1,2}} \mathfrak{H}_{(n,\tau)}$.
7.3. Ситуация в $\Pi \otimes_{n=1,2,\ldots} (\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$. Классификация.
7.4. Случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$.
7.5. Случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$.
7.6. Заключение.
Литература.

# Часть I

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

## Глава 1

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

**1.1.** Мы будем использовать обозначения работ [8, 9] почти так же, как это делалось в [7]. Необходимо, однако, с самого начала включить в рассмотрение несепарабельные гильбертовы пространства, несколько отклоняясь тем самым от цитированных работ. В связи с этим представляется уместным дать независимый список используемых понятий и обозначений.

а) $\alpha \in S$ означает, что $\alpha$ — элемент множества $S$, $S \subset T$ или $T \supset S$, что $S$ — подмножество $T$ (включая возможность $S = T$). Теоретико-множественную сумму всех множеств $S_\alpha$, где $\alpha$ пробегает все элементы, обладающие некоторым

свойством $\varepsilon(\alpha)$, будем обозначать через $\mathfrak{S}(S_\alpha;\ \varepsilon(\alpha))$ [7]. Если эти $S_\alpha$ могут быть записаны как конечная или счетная последовательность $S_1, S_2, \ldots$, будем также писать $\mathfrak{S}(S_1, S_2, \ldots)$. Если $S$ содержит единственный элемент $x$, мы можем записать $x$ вместо $S$. Пустое множество будет обозначаться через $\Theta$.

б) Комплексное линейное пространство с (эрмитовым и дефинитным) скалярным произведением, полное относительно этого скалярного произведения, обозначим через $\mathfrak{H}$. (Мы будем свободно использовать индексы при описании нескольких таких пространств.) Другими словами, $\mathfrak{H}$ — это пространство с введенными операциями $af$, $f \pm g$, $(f, g)$, которые удовлетворяют условиям **A**, **B**, **E** работы [8, с. 64—66]. Условия **C** и **D** цитированных статей мы опускаем (они выражают сепарабельность и бесконечномерность $\mathfrak{H}$). Хорошо известно, что и без этих условий с пространством $\mathfrak{H}$ можно обращаться так же, как это делалось в [8, 12, 14] (где использовались все условия **A**—**E**). В частности, система элементов $\varphi_\alpha \in \mathfrak{H}$, где $\alpha$ пробегает произвольное данное множество индексов $I$, есть полная ортонормированная система при условии:

(I) $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{для } \alpha \neq \beta; \end{cases}$

(II) если $f \in \mathfrak{H}$ и $(f, \varphi_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in I$, то $f = 0$.

Такие системы $\varphi_\alpha$, $\alpha \in I$, действительно существуют, и для всех них $I$ имеет одну и ту же мощность $\aleph = \aleph(\mathfrak{H})$ — размерность пространства $\mathfrak{H}$ (см. [15, 13, 12, 4]). Соответственно этому $\mathfrak{H}$ принадлежит одному из следующих трех типов:

1) $\aleph(\mathfrak{H}) < \aleph_0$. В этом случае $\aleph(\mathfrak{H})$ конечно; $\aleph(\mathfrak{H}) = N = 1, 2, \ldots$ и $\mathfrak{H}$ есть $N$-мерное (комплексное) евклидово пространство (**C** не выполнено, **D** имеет место).

2) $\aleph(\mathfrak{H}) = \aleph_0$. Здесь $\aleph(\mathfrak{H})$ счетно и $\mathfrak{H}$ есть сепарабельное гильбертово пространство (**C** и **D** выполнены).

3) $\aleph(\mathfrak{H}) > \aleph_0$. В этом случае $\aleph(\mathfrak{H})$ несчетно и $\mathfrak{H}$ — несепарабельное гильбертово пространство (**C** выполнено, **D** нет). Мы исключаем случай $\aleph(\mathfrak{H}) = N = 0$, когда $\mathfrak{H} = (0)$.

Любое такое пространство $\mathfrak{H}$ будем для краткости называть гильбертовым пространством.

в) Замкнутые линейные подпространства в $\mathfrak{H}$ обозначим через $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Так как они являются гильбертовыми пространствами (за исключением случая равенства нулю), их обозначения иногда заменяют $\mathfrak{H}$.

Наименьшее линейное и наименьшее замкнутое линейное множества, содержащие определенные множества и элементы, обозначим соответственно через $\mathfrak{S}\{\ldots\}$, $\mathfrak{S}[\ldots]$. Детали этого обозначения те же, что и в п. 1.1а, где наименьшее множество, содержащее данные множества (т. е. их теоретико-множественная сумма), было обозначено через $\mathfrak{S}(\ldots)$[8]. Множество всех элементов $\mathfrak{M}$, ор-

---

[7] В частности, если $\alpha$ пробегает все элементы данного множества $I$, мы пишем $\mathfrak{S}(S_\alpha;\ \alpha \in I)$. В [7] буква $\mathfrak{S}$ опускалась.

[8] В [7] во всех этих обозначениях буква $\mathfrak{S}$ опускалась.

тогональных $\mathfrak{N}$, является замкнутым линейным множеством и обозначается через $\mathfrak{M}-\mathfrak{N}$.

г) Для операторов, колец операторов и т. д. мы используем те же обозначения, что и в работе [7, с. 127].

д) Топологии, используемые в пространстве $\mathfrak{H}$ и в пространстве $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, те же, что рассматривались в работе [7, с. 127]. Возвращаясь к случаям 1—3 п. 1.1б, видим, что для 1,2 (евклидовы пространства и сепарабельное гильбертово пространство) эти топологии имеют те же свойства, что и указанные в цитированных статьях и в работах [9, 11]. В случае 3 (несепарабельные гильбертовы пространства) легко проверяется, что все их свойства идентичны условиям случая 2, за одним исключением: ни для одной из наших топологий вторая аксиома счетности Хаусдорфа не имеет места даже в единичных сферах пространств $\mathfrak{H}$ и $\mathcal{B}$ (определенных условиями $\|\varphi\|\leqslant 1$, соответственно $|||A|||\leqslant 1$).

## Глава 2

## СХОДИМОСТЬ

**2.1** Пусть $I$ — множество индексов произвольной мощности и пусть для каждого $\alpha\in I$ задано гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\alpha$. Мы хотим определить тензорное произведение этих пространств $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha\in I$, которое будет обозначаться через $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, руководствуясь следующими эвристическими принципами.

Нам хотелось бы, чтобы пространство $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ было гильбертовым. Кроме того, для любой данной последовательности элементов $f_\alpha\in\mathfrak{H}_\alpha$, где $\alpha$ пробегает $I$, пространство $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ должно содержать (символический) элемент $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$. Для этих элементов мы требуем, наконец, чтобы[9]

$$(\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha,\ \Pi\otimes_{\alpha\in I}g_\alpha)=\prod_{\alpha\in I}(f_\alpha,g_\alpha). \qquad (*)$$

Произведение $\Pi_{\alpha\in I}(f_\alpha,g_\alpha)$ в правой части (*) является числовым произведением, которое может содержать бесконечное, возможно даже несчетное, количество сомножителей. Поэтому исследование его сходимости является серьезным вопросом, который должен быть рассмотрен прежде, чем мы сможем ввести пространство $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, удовлетворяющее нашим эвристическим требованиям. В частном случае, когда $f_\alpha=g_\alpha$, соотношение (*) дает

$$\|\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha\|=\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|. \qquad (**)$$

Эта формула показывает, что мы не можем настаивать на образовании $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ для всех последовательностей $f_\alpha\in\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha\in I$, а именно:

---

[9] Мы обозначаем скалярное произведение и норму через $(\Phi,\Psi)$ и $\|\Phi\|$, если $\Phi,\Psi\in\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, и через $(f_\alpha,g_\alpha)$ и $\|f_\alpha\|$, если $f_\alpha, g_\alpha\in\mathfrak{H}_\alpha$.

1) Допускаются лишь те последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, для которых сходится произведение $\prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha\|$[10].

Еще одно замечание.

2) В определении сходимости произведений, которое мы собираемся дать, сходимость произведения $\prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha\|$ к нулю[11] допустима. Однако последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, с $\prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha\| = 0$ несущественны для нас, поскольку соотношение (**) заставляет положить для них $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha = 0$.

Отметим, что (*) является *соотношением* между двумя последовательностями $f_\alpha$, $\alpha \in I$, и $g_\alpha$, $\alpha \in I$, а не *свойством* одной из них. Это может стать источником некоторых осложнений, если только мы не убедимся в следующем.

3) Если произведения $\prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha\|$ и $\prod_{\alpha \in I} \|g_\alpha\|$ сходятся, то $\prod_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha)$ также сходится.

Наконец, мы хотим, чтобы тензорное произведение $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ удовлетворяло бы свойству коммутативности умножения без каких-либо ограничений. В связи с этим естественным является следующее требование.

4) Определения сходимости для произведений $\Pi_{\alpha \in I} \|f_\alpha\|$ и $\Pi_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha)$ не должны зависеть от упорядочения множества $I$.

**2.2.** Определим теперь сходимость произведения $\Pi_{\alpha \in I} z_\alpha$ для произвольных комплексных чисел $z_\alpha$, такого, чтобы свойства 1 — 4 п. 2.1 были выполнены, насколько возможно. Удобно определить одновременно также и сумму $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$. Заметим, что условие 4 запрещает нам ввести какое-либо упорядочение в множество $I$. Поэтому представляется естественным следующее определение[12].

Определение 2.2.1. *Сумма* $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ *(соответственно произведение* $\Pi_{\alpha \in I} z_\alpha$*) сходится и число* $a$ *является ее (его) значением* ($z_\alpha$, *так же как и* $a$, *— комплексные числа), если для каждого* $\delta > 0$ *существует конечное множество* $I_0 = I_0(\delta) \subset I$, *такое, что для каждого конечного множества* $J = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *попарно различны), такого, что* $I_0 \subset J \subset I$, *выполнено условие*

$$|z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n} - a| \leqslant \delta \qquad (|z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_n} - a| \leqslant \delta).$$

Следствие. *Значение* $a$ *суммы* $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ *(соответственно произведения* $\Pi \otimes_{\alpha \in I} z_\alpha$*) единственно, если оно вообще существует (т. е. если имеет место сходимость).*

Доказательство. Пусть $a'$, $a''$ — два значения суммы (или произведения) и $\delta > 0$. Выберем соответствующие конечные множества $I'_0 = I_0(\delta)$, $I''_0 =$

[10] Для конечных $I$ эта проблема не возникает; для несчетных $I$ произведение $\Pi_{\alpha \in I}$ до сих пор не определялось. Если же множество $I$ счетно, то произведение $\Pi_{\alpha \in I}$ может, очевидно, расходиться в обычном смысле.

[11] Которую в случае, когда все $\|f_\alpha\| \neq 0$, обычно называют «расходимостью к 0».

[12] Это частный случай понятия предела по «направленным множествам», принадлежащего Е. Г. Муру, Г. Л. Смиту и Г. Биркгофу (см. [1, 6]).

$= I_0''(\delta)$. Пусть $J = \mathfrak{S}(I_0', I_0'') = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Множество $J$ конечно, $I_0' \subset J \subset I$, $I_0'' \subset J \subset I$, поэтому $|z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n} - a'| \leqslant \delta$, $|z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n} - a''| \leqslant \delta$, соответственно $|z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_n} - a'| \leqslant \delta$, $|z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_n} - a''| \leqslant \delta$ и, таким образом, $|a' - a''| \leqslant 2\delta$. Так как $\delta > 0$ произвольно, то $a' = a''$.

**2.3.** Теперь выведем основные свойства суммы $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$.

Лемма 2.3.1. *Если все числа $z_\alpha$ вещественны и $z_\alpha \geqslant 0$, то сумма $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{S}(z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n})$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ взаимно различны и все принадлежат $I$) ограничено. Ее значение есть* sup[13] *этого множества.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится, $a$ — ее значение и $I_0 = I_0(1)$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ попарно различны и $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m$ — те попарно различные элементы множества $I_0$, которые не равны $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Множество $J = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ удовлетворяет условию $I_0 \subset J \subset I$, и поэтому (так как все $z_\alpha \geqslant 0$)

$$0 \leqslant z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n} \leqslant z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_m} \leqslant a + 1.$$

Таким образом, указанное в лемме множество ограничено.

*Достаточность и значение суммы.* Пусть множество $\mathfrak{S}(z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n}$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ и взаимно различны) ограничено и число $a$ — его sup. Для каждого $\delta > 0$ выберем попарно различные $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n \in I$, такие, что $z_{\bar{\alpha}_1} + \ldots + z_{\bar{\alpha}_n} \geqslant$ $\geqslant a - \delta$. Пусть $I_0 = I_0(\delta) = \mathfrak{S}(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$. Тогда если множество $J = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_m)$ конечно и $I_0 \subset J \subset I$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ попарно различны), то среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ встречаются $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$, и поэтому (так как все $z_\alpha \geqslant 0$)

$$a - \delta \leqslant z_{\bar{\alpha}_1} + \ldots + z_{\bar{\alpha}_n} \leqslant z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_m} \leqslant a, \qquad |z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_m} - a| \leqslant \delta.$$

Так как число $\delta > 0$ было произвольно, то $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится и ее значение равно $a$.

Лемма 2.3.2. *Если все $z_\alpha$ вещественны и $z_\alpha \geqslant 0$, то $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда:*

(I) *$z_\alpha \neq 0$ только для конечного или счетного множества значений $\alpha \in I$, скажем для (попарно различных)*[14] *$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$;*

(II) *сумма $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots$ (в обычном смысле) конечна.*

*Кроме того, значение $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ равно $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots$ в смысле* (II).

Доказательство. *Необходимость.* Обозначим sup $\mathfrak{S}(z_{\beta_1} + \ldots + z_{\beta_n}$; $\beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_n \in I$ и попарно различны) через $a$. Если $z_{\beta_1}, \ldots, z_{\beta_n} \geqslant \delta$ для некоторого фиксированного $\delta > 0$, то $a \geqslant z_{\beta_1} + \ldots + z_{\beta_n} \geqslant n\delta$, так что $n \leqslant a/\delta$. Поэтому су-

[13] sup — точная верхняя грань.

[14] Длина этой последовательности может быть 0, 1, 2, ..., $\infty$.

ществует лишь конечное число $\alpha \in I$, для которых $z_\alpha \geqslant \delta$. Положим последовательно $\delta = 1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots$; это доказывает (I).

Возьмем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, указанные в (I). Тогда $z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_m} \leqslant a$, и так как все $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \ldots \geqslant 0$, то сумма $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots$ конечна.

*Достаточность и значение суммы.* Если имеют место (I), (II), то ясно, что $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots$ есть sup (точная верхняя грань, описанная в лемме 2.3.1).

Лемма 2.3.3. *Если $z_\alpha$ — произвольные комплексные числа, то ряд $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha|$.*

Доказательство. Сходимость $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$, очевидно, эквивалентна совместной сходимости $\sum_{\alpha \in I} \Re z_\alpha$, $\sum_{\alpha \in I} \Im z_\alpha$ [15]. То же самое справедливо для $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha|$ и для $\sum_{\alpha \in I} |\Re z_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} |\Im z_\alpha|$, так как

$$|\Re z_\alpha|, \quad |\Im z_\alpha| \leqslant |z_\alpha| \leqslant |\Re z_\alpha| + |\Im z_\alpha|$$

(используется лемма 2.3.1). Поэтому можно рассматривать $\Re z_\alpha$, $\Im z_\alpha$ вместо $z_\alpha$. Это означает, что мы можем считать числа $z_\alpha$ вещественными.

*Необходимость.* Допустим, что $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится, $a$ — ее значение и $I_0 = I_0(1) = \mathfrak{S}(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, где $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ попарно различны. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ попарно различны и не равны $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$, то

$$|z_{\bar{\alpha}_1} + \ldots + z_{\bar{\alpha}_n} - a| \leqslant 1, \qquad |z_{\bar{\alpha}_1} + \ldots + z_{\bar{\alpha}_n} + z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_m} - a| \leqslant 1,$$

так что $|z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_m}| \leqslant 2$.

Обозначим теперь те из $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, для которых $z_{\alpha_i} > 0$, через $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s$, и те, для которых $z_{\alpha_i} \leqslant 0$, — через $\alpha''_1, \ldots, \alpha''_{m-s}$. Тогда мы имеем аналогично, что $|z_{\alpha'_1} + \ldots + z_{\alpha'_s}| \leqslant 2$ и $|z_{\alpha''_1} + \ldots + z_{\alpha''_{m-s}}| \leqslant 2$. Но

$$|z_{\alpha'_1} + \ldots + z_{\alpha'_s}| = z_{\alpha'_1} + \ldots + z_{\alpha'_s} = |z_{\alpha'_1}| + \ldots + |z_{\alpha'_s}|,$$

$$|z_{\alpha''_1} + \ldots + z_{\alpha''_{m-s}}| = -z_{\alpha''_1} - \ldots - z_{\alpha''_{m-s}} = |z_{\alpha''_1}| + \ldots + |z_{\alpha''_{m-s}}|$$

и поэтому $|z_{\alpha_1}| + \ldots + |z_{\alpha_m}| \leqslant 4$.

Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_p$ попарно различны, а в остальном произвольны и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — те из $\beta_1, \ldots, \beta_p$, которые не равны $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$. Тогда

$$|z_{\beta_1}| + \ldots + |z_{\beta_p}| \leqslant |z_{\bar{\alpha}_1}| + \ldots + |z_{\bar{\alpha}_n}| + |z_{\alpha_1}| + \ldots + |z_{\alpha_m}| \leqslant$$
$$\leqslant |z_{\bar{\alpha}_1}| + \ldots + |z_{\bar{\alpha}_n}| + 4 \equiv a_0.$$

Поэтому $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha|$ сходится по лемме 2.3.1.

---

[15] Если $z = u + iv$, $u, v$ — вещественны, то $\Re z = u$, $\Im z = v$.

*Достаточность*. Пусть $I'$ — множество всех $\alpha \in I$, для которых $z_\alpha > 0$; тогда $I - I'$ состоит из тех $\alpha \in I$, для которых $z_\alpha \leqslant 0$. Если $\sum_{\alpha \in I'} |z_\alpha|$ сходится, то $\sum_{\alpha \in I'} |z_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I - I'} |z_\alpha|$ также сходятся по лемме 2.3.1. Но для всех $\alpha \in I'$ $z_\alpha = |z_\alpha|$ и для всех $\alpha \in I - I'$ $z_\alpha = -|z_\alpha|$. Поэтому $\sum_{\alpha \in I'} z_\alpha$, $\sum_{\alpha \in I - I'} z_\alpha$ также сходятся, откуда следует, очевидно, сходимость $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$.

Лемма 2.3.4. *Если $z_\alpha$ — произвольные комплексные числа, то ряд $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда:*

(I) $z_\alpha \neq 0$ *только для конечного или счетного множества значений $\alpha \in I$, которые мы обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$* (см. примеч. 14);

(II) *сумма $|z_{\alpha_1}| + |z_{\alpha_2}| + \ldots$ (в обычном смысле) конечна.*

*Значение ряда равно тогда $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots$ (в обычном смысле).*

Доказательство. Необходимость и достаточность немедленно следуют из лемм 2.3.2 и 2.3.3.

Значение. Так как мы можем рассматривать $\sum_{\alpha \in I} \Re z_\alpha$, $\sum_{\alpha \in I} \Im z_\alpha$ вместо $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$, то можно предполагать, что все числа $z_\alpha$ вещественны. Пусть опять $I'$—множество всех $\alpha \in I$, для которых $z_\alpha > 0$, так что $I - I'$ состоит из тех $\alpha \in I$, для которых $z_\alpha \leqslant 0$. Наше утверждение справедливо тогда как для $\sum_{\alpha \in I'} z_\alpha$, потому что в этом случае $z_\alpha = |z_\alpha|$, так и для $\sum_{\alpha \in I - I'} z_\alpha$, поскольку в этом случае $z_\alpha = -|z_\alpha|$ (в обоих случаях используется последнее утверждение леммы 2.3.2). Следовательно, оно справедливо и для $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$.

Следствие. *Если $I$ конечно, т. е. $I = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ попарно различны), то ряд $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ всегда сходится и его значение равно $z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n}$. Если $I$ счетно, т. е. $I = \mathfrak{S}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ попарно различны), то ряд $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots$ сходится абсолютно в обычном смысле и его значение равно $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots$*

Доказательство ясно из леммы 2.3.4.

Таким образом, наше понятие сходимости является обобщением обычного понятия абсолютной сходимости. Во всяком случае, сумма $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ сохраняет свой обычный смысл для конечных множеств $I$.

**2.4.** Далее мы обсудим сходимость $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$, опять начав с частного случая, когда все $z_\alpha$ вещественны и $z_\alpha \geqslant 0$.

Лемма 2.4.1. *Если все $z_\alpha$ вещественны и $z_\alpha \geqslant 0$, то:*

(I) *произведение $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда либо сходится ряд $\sum_{\alpha \in I} \max(z_\alpha - 1, 0)$, либо какое-то $z_\alpha = 0$;*

(II) *$\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится и не равно нулю тогда и только тогда, когда $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha - 1|$ сходится и все $z_\alpha \neq 0$.*

Доказательство. Если какое-то $z_\beta = 0$, то $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится и равно нулю: $I_0 = I_0(\delta) = \mathfrak{S}(\beta)$ для всех $\delta > 0$. Потому $z_\beta = 0$ дает желаемый результат в (I) и (II), в связи с чем мы можем предполагать, что все $z_\beta \neq 0$, и обсуждать (I), (II) в этом предположении.

Необходимость (I). Допустим, что $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится и его значение есть $a$. Положим $I_0 = I_0(1) = \mathfrak{S}(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, где $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ попарно различны. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I$ и попарно различны. Некоторые из элементов $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ могут встретиться среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, скажем это элементы $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_p$.

Далее, множество $J = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \bar{\alpha}_{p+1}, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ конечно и $I_0 \subset J \subset I$, поэтому $z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_m} \cdot z_{\bar{\alpha}_{p+1}} \cdot \ldots \cdot z_{\bar{\alpha}_n} \leqslant a + 1$. Отсюда

$$z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_m} \leqslant \frac{a+1}{z_{\bar{\alpha}_{p+1}} \cdot \ldots \cdot z_{\bar{\alpha}_n}} \leqslant \frac{a+1}{\min(z_{\bar{\alpha}_{p+1}}, 1) \cdot \ldots \cdot \min(z_{\bar{\alpha}_n}, 1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a+1}{\min(z_{\bar{\alpha}_1}, 1) \cdot \ldots \cdot \min(z_{\bar{\alpha}_n}, 1)}.$$

Но если $z_{\alpha_i} - 1 > 0$ для всех $z_{\alpha_i}$, то

$$z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_m} = (1 + (z_{\alpha_1} - 1)) \cdot \ldots \cdot (1 + (z_{\alpha_m} - 1)) \geqslant 1 + $$
$$+ (z_{\alpha_1} - 1) + \ldots + (z_{\alpha_m} - 1),$$

и поэтому

$$(z_{\alpha_1} - 1) + \ldots + (z_{\alpha_m} - 1) \leqslant \frac{a+1}{\min(z_{\bar{\alpha}_1}, 1) \cdot \ldots \cdot \min(z_{\bar{\alpha}_n}, 1)} - 1.$$

Обозначим теперь те из элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, для которых $z_{\alpha_i} - 1 > 0$, через $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s$. Тогда приведенная оценка справедлива для $(z_{\alpha'_1} - 1) + \ldots + (z_{\alpha'_s} - 1)$. Другими словами,

$$\max(z_{\alpha_1} - 1, 0) + \ldots + \max(z_{\alpha_m} - 1, 0) \leqslant \frac{a+1}{\min(z_{\bar{\alpha}_1}, 1) \cdot \ldots \cdot \min(z_{\bar{\alpha}_n}, 1)} - 1.$$

Согласно лемме 2.3.1 это доказывает сходимость $\sum_{\alpha \in I} \max(z_\alpha - 1, 0)$.

*Достаточность* (I). Мы докажем ниже, что произведение $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится, если сходится $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha - 1|$. Поэтому нам достаточно рассмотреть только случай, когда $\sum_{\alpha \in I} \max(z_\alpha - 1, 0)$ сходится, а $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha - 1|$ нет, т. е. не сходится [16] $\sum_{\alpha \in I} \max(1 - z_\alpha, 0)$.

По лемме 2.3.1 первое утверждение влечет за собой неравенство $\max(z_{\alpha_1} - 1, 0) + \ldots + \max(z_{\alpha_m} - 1, 0) \leqslant a_0$ при некотором фиксированном $a_0$

[16] Заметим, что $|u| = \max(u, 0) + \max(-u, 0)$ для всех вещественных $u$.

для произвольных попарно различных $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Отсюда

$$z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_m} \leqslant \exp(\max(z_{\alpha_1} - 1, 0) + \ldots + \max(z_{\alpha_m} - 1, 0)) \leqslant \exp(a_0).$$

По тем же самым причинам второе утверждение влечет существование для любого числа $A > 0$ такого множества попарно различных $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$, что $\max(1 - z_{\bar{\alpha}_1}, 0) + \ldots + \max(1 - z_{\bar{\alpha}_n}, 0) > A$. Ясно, что элементы $\bar{\alpha}_i$, для которых $z_{\bar{\alpha}_i} \geqslant 1$, могут быть исключены из этого множества, поэтому мы можем предполагать, что все $z_{\bar{\alpha}_i} < 1$. Отсюда

$$z_{\bar{\alpha}_1} \cdot \ldots \cdot z_{\bar{\alpha}_n} \leqslant \exp(-\max(1 - z_{\bar{\alpha}_1}, 0) - \ldots - \max(1 - z_{\bar{\alpha}_n}, 0)) \leqslant \exp(-A).$$

Для произвольного заданного $\delta > 0$ выберем теперь число $A$ так, что $\exp(a_0 - A) \leqslant \delta$, и положим $I_0 = I_0(\delta) = \mathfrak{S}(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$. Тогда любое конечное множество $J$, удовлетворяющее условию $I_0 \subset J \subset I$, имеет вид $J = \mathfrak{S}(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ попарно различны, и

$$0 \leqslant z_{\bar{\alpha}_1} \cdot \ldots \cdot z_{\bar{\alpha}_n} \cdot z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_m} \leqslant \exp(a_0 - A) \leqslant \delta.$$

Таким образом, произведение $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится (его значение есть нуль).

*Необходимость и достаточность* (II). Тот факт, что произведение $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится, все $z_\alpha \neq 0$ и $a \neq 0$, эквивалентен, очевидно, сходимости ряда $\sum_{\alpha \in I} \ln z_\alpha$ со значением $\ln a$. По лемме 2. 3. 1 это означает, что $\sum_{\alpha \in I} |\ln z_\alpha|$ сходится.

Сравним его сходимость со сходимостью $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha - 1|$. Если первый (второй) из рядов сходится, то по лемме 2. 3. 2 неравенство $|\ln z_\alpha| > 1/3$ (соответственно $|z_\alpha - 1| > 1/2$) может быть выполнено лишь для конечного числа элементов $\alpha \in I$. Второе неравенство влечет первое, поэтому мы имеем $|z_\alpha - 1| \leqslant 1/2$, быть может, за конечным числом исключений. Далее, неравенство $|z_\alpha - 1| \leqslant 1/2$ влечет за собой неравенства [17] $^2/_3 |z_\alpha - 1| \leqslant |\ln z_\alpha| \leqslant 2|z_\alpha - 1|$, поэтому по лемме 2. 3. 1 обе рассматриваемые сходимости эквивалентны.

Следствие. *Используя леммы* 2. 3. 1 *и* 2. 3. 2, *можно получить критерий сходимости произведения* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ (*соответственно сходимости со значением, не равным нулю*) *для случая, когда все* $z_\alpha \geqslant 0$.

Лемма 2. 4. 2. *Если $z_\alpha$ — произвольные комплексные числа, то произведение $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда:*

(I) *либо $\prod_{\alpha \in I} |z_\alpha|$ сходится и его значение есть нуль;*

(II) *либо $\prod_{\alpha \in I} |z_\alpha|$ сходится и его значение не равно нулю и $\sum_{\alpha \in I} |\arg z_\alpha|$ сходится* [18].

---

[17] $\dfrac{d(\ln z_\alpha)}{d(z_\alpha - 1)} = \dfrac{1}{z_\alpha}$ лежит между $\dfrac{1}{1 + 1/2} = \dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{1}{1 - 1/2} = 2$.

[18] Если $z \neq 0$, $z = |z| e^{i\theta}$ с $-\pi < \theta \leqslant \pi$, то $\arg z = \theta$.

В случае (I) значение $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ есть нуль, в случае (II) оно равно $\prod_{\alpha\in I} |z_\alpha| \times \exp\left(i \sum_{\alpha\in I} \arg z_\alpha\right)$ и, таким образом, не равно нулю.

Доказательство. *Необходимость.* Так как

$$||z_{\alpha_1}| \cdot \ldots \cdot |z_{\alpha_n}| - |a|| \leqslant |z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_n} - a|,$$

то из сходимости $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$, очевидно, следует сходимость $\prod_{\alpha\in I} |z_\alpha|$. Остается показать, что неравенство $\prod_{\alpha\in I} |z_\alpha| \neq 0$ влечет за собой также и сходимость $\sum_{\alpha\in I} |\arg z_\alpha|$.

Так как $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$, $\prod_{\alpha\in I} |z_\alpha|$ сходятся, причем последнее к значению, не равному нулю, то $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha/|z_\alpha| = \prod_{\alpha\in I} \exp(i \arg z_\alpha)$ (все $z_\alpha \neq 0$) также сходится. Пусть его значение есть $\rho$. Положим $I_0 = I_0(1/2\sqrt{2}) = \mathfrak{S}(\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_n)$ $\Big($для $\prod_{\alpha\in I} \exp(i \arg z_\alpha)\Big)$, где элементы $\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_n$ попарно различны. Рассмотрим любые попарно различные $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, все не равные $\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_n$. Тогда имеем, что

$$|\exp(i \arg z_{\bar\alpha_1} + \ldots + i \arg z_{\bar\alpha_n}) - \rho| < 1/2\sqrt{2},$$

$$|\exp(i \arg z_{\bar\alpha_1} + \ldots + i \arg z_{\bar\alpha_n} + i \arg z_{\alpha_1} + \ldots + i \arg z_{\alpha_m}) - \rho| < 1/2\sqrt{2}$$

и, следовательно,

$$|\exp(i \arg z_{\bar\alpha_1} + \ldots + i \arg z_{\bar\alpha_n})(\exp(i \arg z_{\alpha_1} + \ldots + i \arg z_{\alpha_m}) - 1)| < 1/\sqrt{2}.$$

Так как $|\exp(i \arg z_{\bar\alpha_k})| = 1$, то последнее означает, что

$$|\exp(i \arg z_{\alpha_1} + \ldots + i \arg z_{\alpha_m}) - 1| < 1/\sqrt{2},$$

это исключает случай

$$\pi/2 \leqslant |\arg z_{\alpha_1} + \ldots + \arg z_{\alpha_m}| \leqslant 3\pi/2.$$

Рассмотрение одного $\alpha_j$ вместо $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ исключает случай $\pi/2 \leqslant |\arg z_{\alpha_j}| \leqslant 3\pi/2$, т. е. всегда $|\arg z_{\alpha_j}| < \pi/2$. Рассмотрим теперь $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ вместо $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ для всех $l = 0, 1, 2, \ldots, m$. Величина $|\arg z_{\alpha_1} + \ldots + \arg z_{\alpha_l}|$ есть 0 для $l = 0$; она изменяется меньше чем на $|\arg z_{\alpha_{l+1}}| \leqslant \pi/2$, когда $l$ заменяется на $l+1$, и она никогда не попадает в интервал $\pi/2 \leqslant u \leqslant 3\pi/2$. Поэтому она всегда остается меньше $\pi/2$. В частности, при $l = m$

$$|\arg z_{\alpha_1} + \ldots + \arg z_{\alpha_m}| < \pi/2.$$

Обозначим теперь те $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, для которых $\arg z_{\alpha_j} > 0$, через $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s$, а остальные, для которых $\arg z_{\alpha_j} \leqslant 0$, — через $\alpha''_1, \ldots, \alpha''_{m-s}$. Тогда опять

$$|\arg z_{\alpha_1}|+\ldots+|\arg z_{\alpha_s}|=\arg z_{\alpha_1}+\ldots+\arg z_{\alpha'_s}=|\arg z_{\alpha_1}+\ldots$$
$$\ldots+\arg z_{\alpha'_s}|<\pi/2,$$

$$|\arg z_{\alpha''_1}|+\ldots+|\arg z_{\alpha''_{m-s}}|=-\arg z_{\alpha''_1}-\ldots-\arg z_{\alpha''_{m-s}}=$$
$$=|\arg z_{\alpha''_1}+\ldots+\arg z_{\alpha''_{m-s}}|<\pi/2.$$

Сложение этих неравенств дает

$$|\arg z_{\alpha_1}|+\ldots+|\arg z_{\alpha_m}|<\pi,$$

следовательно,

$$|\arg z_{\overline{\alpha}_1}|+\ldots+|\arg z_{\overline{\alpha}_n}|+|\arg z_{\alpha_1}|+\ldots+|\arg z_{\alpha_m}|<|\arg z_{\overline{\alpha}_1}|+\ldots$$
$$\ldots+|\arg z_{\overline{\alpha}_n}|+\pi\equiv b_0.$$

Если $\beta_1,\ldots,\beta_p$ попарно различны, а в остальном произвольны, то $|\arg z_{\beta_1}|+\ldots$ $\ldots+|\arg z_{\beta_p}|<b_0$. Таким образом, из леммы 2.3.1 получаем сходимость $\sum_{\alpha\in I}|\arg z_\alpha|$.

*Достаточность и значение. Случай* (I). Так как

$$|z_{\alpha_1}|\cdot\ldots\cdot|z_{\alpha_n}|=|z_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_{\alpha_n}|,$$

то из сходимости $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|$ к нулю следует то же самое для $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$.

*Случай* (II). $\sum_{\alpha\in I}|\arg z_\alpha|$ сходится, следовательно, $\sum_{\alpha\in I}\arg z_\alpha$ также сходится (по лемме 2.3.3), а с ней и $\prod_{\alpha\in I}\exp(i\arg z_\alpha)$. Значение последнего есть $e^{i\theta}$, где $\theta$ — значение $\sum_{\alpha\in I}\arg z_\alpha$. Теперь $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|$ сходится и его значение есть некоторое $a\neq 0$, следовательно, $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha=\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|\exp(i\arg z_\alpha)$ также сходится и его значение есть $ae^{i\theta}\neq 0$.

Следствие. *Критерий сходимости $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$ (соответственно сходимости к значению, не равному нулю), где $z_\alpha$ — произвольные комплексные числа, опять может быть получен применением лемм* 2.3.1 *и* 2.3.2. *В частности, для конечного множества $I=\mathfrak{S}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ попарно различны) $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$ всегда сходится и его значение равно $z_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_{\alpha_n}$.*

**2.5.** Мы видим (из лемм 2.3.3, соответственно 2.4.2), что в то время как сходимость $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha|$ необходима и достаточна для сходимости $\sum_{\alpha\in I}z_\alpha$, сходимость $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|$ необходима, но не достаточна для сходимости $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$. Это неудобно, поскольку нарушает желаемое условие 3 п. 2. 1. Действительно, выберем для каждого элемента $\alpha\in I$ какое-то $\varphi_\alpha\in\mathfrak{H}_\alpha$ с $\|\varphi_\alpha\|=1$ и положим $f_\alpha=$

$= |z_\alpha|^{1/2} \varphi_\alpha \exp(i \arg z_\alpha), g_\alpha = |z_\alpha|^{1/2} \varphi_\alpha$. Тогда $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \| = \prod_{\alpha \in I} \| g_\alpha \| = \prod_{\alpha \in I} z_\alpha^{1/2}$ сходится (вместе с $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$), в то время как $\prod_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ не сходится.

Мы устраним эту трудность следующим определением.

Определение 2.5.1. $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ *является квазисходящимся тогда и только тогда, когда* $\prod_{\alpha \in I} |z_\alpha|$ *сходится. Его значение есть*

(I) *значение* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ *(в смысле определения* 2.2.1), *если последнее сходится;*

(II) 0, *если оно не сходится.*

Следствие. *Значение* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ *единственно, если оно вообще существует* (т. е. *если имеет место квазисходимость*).

Для $z_\alpha \geqslant 0$ имеем $z_\alpha = |z_\alpha|$, и, следовательно, сходимость и квазисходимость в этом случае идентичны.

Таким образом, мы ввели следующее соглашение: если $\prod_{\alpha \in I} |z_\alpha|$ сходится, а $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ не сходится ввиду слишком сильных осцилляций $\arg z_\alpha$ (см. лемму 2.4.2, (II)), то мы *приписываем* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ значение, равное нулю. Это соглашение до некоторой степени произвольно, но, вероятно, оно проще и удобнее, чем любое другое. Кроме того, оно обеспечивает условие 3 п. 2.1 (см. лемму 2.5.2) и ведет к содержательной теории тензорных произведений, что будет видно из последующих частей настоящей статьи.

Лемма 2.5.1. *Квазисходимость произведения* $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ *к значению, не равному нулю, эквивалентна сходимости к тому же значению и имеет место тогда и только тогда, когда все* $z_\alpha \neq 0$ *и* $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha - 1|$ *сходится.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из определения 2.5.1. Далее, леммы 2.4.1, (II) и 2.4.2 дают необходимое и достаточное условия сходимости $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ к значению, не равному нулю: все $z_\alpha$ должны быть не равны нулю и $\sum_{\alpha \in I} ||z_\alpha| - 1|$, $\sum_{\alpha \in I} |\arg z_\alpha|$ должны сходиться. Но $||z_\alpha| - 1|$, $(1/\pi) |\arg z_\alpha| \leqslant |z_\alpha - 1| \leqslant ||z_\alpha| - 1| + |\arg z_\alpha|$, и, следовательно, эти сходимости эквивалентны сходимости $\sum_{\alpha \in I} |z_\alpha - 1|$ (по лемме 2.3.1).

Следствие. Явный вид критерия сходимости опять может быть получен из лемм 2.3.1 и 2.3.2.

В дальнейшем, если не оговорено противное, значения выражений $\prod_{\alpha \in I} z_\alpha$ всегда понимаются в смысле квазисходимости.

Теперь мы в состоянии доказать условие 3 п. 2.1.

Лемма 2.5.2. *Если* $f_\alpha, g_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$ *для всех* $\alpha \in I$ *и* $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|$, $\prod_{\alpha \in I} \| g_\alpha \|$ *являются (квази) сходящимися, то* $\prod_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha)$ *также является квазисходящимся.*

Доказательство. $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|^2$, $\prod_{\alpha \in I} \| g_\alpha \|^2$ сходятся вместе с $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha \|$,

$\prod_{\alpha\in I}\|g_\alpha\|$. Поэтому наша задача состоит в том, чтобы из этих сходимостей вывести сходимость $\prod_{\alpha\in I}|(f_\alpha, g_\alpha)|$. Так как $\|f_\alpha\|=0$ или $\|g_\alpha\|=0$ влечет $(f_\alpha, g_\alpha)=0$, то лемма 2.4.1, (I) показывает, что нам нужно только вывести сходимость $\sum_{\alpha\in I}\max(|(f_\alpha, g_\alpha)|-1, 0)$ из сходимости $\sum_{\alpha\in I}\max(\|f_\alpha\|^2-1, 0)$, $\sum_{\alpha\in I}\max(\|g_\alpha\|^2-1, 0)$.

Далее, $|(f_\alpha, g_\alpha)|\leqslant {}^1/_2\|f_\alpha\|^2+{}^1/_2\|g_\alpha\|^2$, следовательно,

$$|(f_\alpha, g_\alpha)|-1\leqslant {}^1/_2(\|f_\alpha\|^2-1)+{}^1/_2(\|g_\alpha\|^2-1),$$

и поэтому

$$\max(|(f_\alpha, g_\alpha)|-1, 0)\leqslant {}^1/_2\max(\|f_\alpha\|^2-1, 0)+{}^1/_2\max(\|g_\alpha\|^2-1, 0).$$

Таким образом, желаемый результат следует из леммы 2.3.1.

## Часть II

# ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

## Глава 3

## ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОГО ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

**3.1.** Пусть, так же как и в п. 2.1, $I$ будет множеством индексов произвольной мощности и пусть для каждого $\alpha\in I$ задано гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\alpha$.

Сейчас мы вернемся к условию 1 п. 2.1 и выделим те последовательности $f_\alpha$, $\alpha\in I$, для которых $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ будет позже (в определении 3.1.3) определено.

После построения этих $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ образуем все их конечные линейные комбинации, а затем пополним полученное пространство. Это могло бы быть сделано совершенно абстрактно, в духе Г. Кантора, но мы предпочитаем использовать специальное представление рассматриваемых элементов через антилинейные функционалы (см. далее определение 3.5.1 и теорему III).

Определение 3.1.1. *Последовательность $f_\alpha$, $\alpha\in I$, есть C-последовательность тогда и только тогда, когда $f_\alpha\in\mathfrak{H}_\alpha$ для всех $\alpha\in I$ и $\Pi_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|$ сходится.*

Лемма. 3.1.1. *Если $f_\alpha$, $\alpha\in I$, и $g_\alpha$, $\alpha\in I$, — две C-последовательности, то $\Pi_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha)$ является квазисходящимся.*

Доказательство немедленно следует из леммы 2.5.2.

Теперь определим *антилинейные функционалы*, на которых будет основываться наше построение пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Будем рассматривать функционалы $\Phi$, принимающие комплексные значения, аргументом которых является совокупность векторов $f_\alpha$, $\alpha\in I$; область изменения вектора $f_\alpha$ есть $\mathfrak{H}_\alpha$. Мы будем обозначать такие функционалы через $\Phi(f_\alpha;\ \alpha\in I)$. Отметим, что функционалы $\Phi$, которые мы будем рассматривать, будут определены лишь для $C$-последовательностей.

В дальнейшем, когда нам необходимо будет рассмотреть отдельный аргумент $f_{\alpha_0}$ (для некоторого фиксированного $\alpha_0\in I$) функционала $\Phi$, мы будем писать $\Phi(f_{\alpha_0}|f_\alpha;\ \alpha\in I,\ \alpha\neq\alpha_0)$ вместо $\Phi(f_\alpha;\ \alpha\in I)$.

Определение 3.1.2. *Множество комплекснозначных функционалов $\Phi(f_\alpha; \alpha \in I)$, определенных для всех С-последовательностей $f_\alpha$, $\alpha \in I$, и антилинейных, т. е. таких, что:*

(I) $\Phi(zf_{\alpha_0} | f_\alpha;\ \alpha \in I,\ \alpha \neq \alpha_0) = \bar{z}\Phi(f_{\alpha_0} | f_\alpha;\ \alpha \in I,\ \alpha \neq \alpha_0)$,

(II) $\Phi(f_{\alpha_0} + g_{\alpha_0} | f_\alpha;\ \alpha \in I,\ \alpha \neq \alpha_0) = \Phi(f_{\alpha_0} | f_\alpha;\ \alpha \in I,\ \alpha \neq \alpha_0) + \Phi(g_{\alpha_0} | f_\alpha;\ \alpha \in I,\ \alpha \neq \alpha_0)$,

*будет обозначаться через* $\Pi\tilde{\otimes}_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Множество $\Pi\tilde{\otimes}_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$ есть множество комплекснозначных функционалов, поэтому для любых двух его элементов $\Phi$, $\Psi$ непосредственно определены операции $u\Phi$ ($u$ — произвольное комплексное число) и $\Phi + \Psi$. Ясно, что функционалы $u\Phi$, $\Phi + \Psi$ принадлежат $\Pi\tilde{\otimes}_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (т. е. они антилинейны), так же как и тождественно нулевой функционал. Итак, мы видим, что $\Pi\tilde{\otimes}_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$ есть линейное пространство с комплексными коэффициентами.

Теперь определим в нем некоторые специальные элементы $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_\alpha$.

Определение 3.1.3. *Для данной С-последовательности $f^0_\alpha$, $\alpha \in I$, лемма 2.5.2 позволяет образовать функционал*

$$\Phi(f_\alpha;\ \alpha \in I) = \prod\nolimits_{\alpha \in I} (f^0_\alpha, f_\alpha),$$

*где $f_\alpha$, $\alpha \in I$, пробегает все С-последовательности, и только их.*

Ясно, что $\Phi \in \Pi\tilde{\otimes}_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Обозначим $\Phi = \Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_\alpha$.

Определение 3.1.4[1]. *Рассмотрим все конечные линейные комбинации указанных выше элементов:*

$$\Phi = \sum\nolimits_{\nu=1}^{p} \Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_{\alpha,\nu},$$

*где $p = 0, 1, 2, \ldots$ и $f^0_{\alpha,\nu}$, $\alpha \in I$, — С-последовательность для каждого $\nu = 1, \ldots$ $\ldots, p$[19]. Обозначим множество таких $\Phi$ через $\Pi' \otimes_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$.*

Ясно, что $\Pi' \otimes_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha \subset \Pi\tilde{\otimes}_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и оба множества являются линейными пространствами с комплексными коэффициентами.

3.2. В $\Pi'\otimes_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (но не в $\Pi\tilde{\otimes}_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$!) можно определить скалярное произведение.

Лемма 3.2.1. *Если $\Phi$, $\Psi \in \Pi'\otimes_{\alpha \in I}\mathfrak{H}_\alpha$, т. е. если*

$$\Phi = \sum\nolimits_{\nu=1}^{p} \Pi\otimes_{\alpha \in I} f^0_{\alpha,\nu}, \quad \Psi = \sum\nolimits_{\mu=1}^{q} \Pi\otimes_{\alpha \in I} g^0_{\alpha,\mu},$$

---

[19] Заметим, что $z\Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_\alpha$ ($z$ — любое комплексное число) есть вновь $\Pi \otimes_{\alpha \in I} g^0_\alpha$; а именно, достаточно положить $g^0_{\alpha_0} = zf^0_{\alpha_0}$ и $g^0_\alpha = f^0_\alpha$, если $\alpha \neq \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \in I$. Поэтому нам не было необходимости вводить комплексные числовые коэффициенты в приведенную выше формулу.

*то лемма* 2.5.2 *позволяет образовать*

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} \prod_{\alpha\in I} (f_{\alpha,\nu}^0, g_{\alpha,\mu}^0).$$

*Это выражение зависит только от* $\Phi$, $\Psi$, *но не от конкретного представления* $\Phi$, $\Psi$ *в указанном виде.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $(\Phi, \Psi)$ не меняется при изменении разложения либо только $\Phi$, либо только $\Psi$. Так как $(\Phi, \Psi) = \overline{(\Psi, \Phi)}$ (для тех же разложений), необходимо рассмотреть только первый случай. Вместо сравнения двух разложений $\Phi$ мы можем сравнить их (формальную) разность с нулем. Другими словами, мы должны доказать, что $(\Phi, \Psi) = 0$, если $\Phi = 0$ (т. е. если тождественно $\Phi(f_\alpha;\ \alpha\in I) = 0$) для любого возможного разложения функционала $\Phi$. Но в этом случае

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{\mu=1}^{q} \left\{\sum_{\nu=1}^{p} \prod_{\alpha\in I} (f_{\alpha,\nu}^0, g_{\alpha,\mu}^0)\right\} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{q} \left\{\sum_{\nu=1}^{p} (\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_{\alpha,\nu}^0)(g_{\alpha,\mu}^0;\ \alpha\in I)\right\} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{q} \Phi(g_{\alpha,\mu}^0;\ \alpha\in I) = 0.$$

Лемма 3.2.2. *Функционал* $(\Phi, \Psi)$ *линеен по* $\Phi$, *антилинеен по* $\Psi$ *и эрмитово-симметричен по* $\Phi$, $\Psi$:

(1) $(u\Phi, \Psi) = u(\Phi, \Psi)$, (2) $(\Phi_1 + \Phi_2, \Psi) = (\Phi_1, \Psi) + (\Phi_2, \Psi)$,

(3) $(\Phi, u\Psi) = \bar{u}(\Phi, \Psi)$, (4) $(\Phi, \Psi_1 + \Psi_2) = (\Phi, \Psi_1) + (\Phi, \Psi_2)$,

(5) $(\Phi, \Psi) = \overline{(\Psi, \Phi)}$.

Доказательство. При доказанной единственности $(\Phi, \Psi)$ все эти формулы очевидны.

Лемма 3.2.3. $(\Phi, \Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0) = \Phi(f_\alpha^0;\ \alpha\in I)$.

Доказательство немедленно следует из нашего определения скалярного произведения.

3.3. Прежде чем мы сможем продолжить обсуждение функционала $(\Phi, \Psi)$, нам необходимо ввести и проанализировать понятие эквивалентности $C$-последовательностей.

Определение 3.3.1. *Последовательность* $f_\alpha$, $\alpha\in I$, *есть* $C_0$-*последовательность тогда и только тогда, когда* $f_\alpha\in\mathfrak{H}_\alpha$ *для всех* $\alpha\in I$ *и ряд* $\sum_{\alpha\in I} |\|f_\alpha\| - 1|$ *сходится.*

Лемма 3.3.1. *Каждая* $C_0$-*последовательность является также* $C$-*последовательностью; каждая* $C$-*последовательность с* $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha \neq 0$ *есть* $C_0$-*последовательность.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 2.4.1, (I), второе — из леммы 2.4.1, (II), если мы заменим $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha \neq 0$ на $\prod_{\alpha\in I} \|f_\alpha\| \neq 0$. Но первое соотношение влечет за собой второе. Докажем обратное. Из $\prod_{\alpha\in I} \|f_\alpha\| = 0$ следует, что для каждой $C$-последовательности $g_\alpha$, $\alpha\in I$,

$\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|\cdot\|g_\alpha\|=0$. Теперь $|(f_\alpha, g_\alpha)|\leqslant\|f_\alpha\|\,\|g_\alpha\|$, следовательно, $\prod_{\alpha\in I}|(f_\alpha, g_\alpha)|=0$ и $\prod_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha)=0$. Но это означает, что $(\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha)(g_\alpha;\ \alpha\in I)=0$ для всех $C$-последовательностей $g_\alpha$, $\alpha\in I$, т. е. $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha=0$.

Лемма 3.3.2. *$\sum_{\alpha\in I}|\|f_\alpha\|-1|$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum_{\alpha\in I}|\|f_\alpha\|^2-1|$.*

Доказательство. В обоих случаях ввиду ограниченности $|\|f_\alpha\|-1|$, соответственно $|\|f_\alpha\|^2-1|$, величина $\|f_\alpha\|$ должна быть ограничена, скажем $\|f_\alpha\|\leqslant C$. Поэтому

$$|\|f_\alpha\|-1|\leqslant|\|f_\alpha\|^2-1|\leqslant(1+C)|\|f_\alpha\|-1|,$$

и, таким образом, эти две сходимости эквивалентны (по лемме 2.3.1).

Определение 3.3.2. *Две $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha\in I$, и $g_\alpha$, $\alpha\in I$, эквивалентны (обозначение $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(g_\alpha;\ \alpha\in I)$) тогда и только тогда, когда $\sum_{\alpha\in I}|(f_\alpha, g_\alpha)-1|$ сходится.*

Лемма 3.3.3. *Эквивалентность $\approx$ для $C_0$-последовательностей рефлексивна, симметрична и транзитивна:*

(I) $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(f_\alpha;\ \alpha\in I)$;

(II) $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(g_\alpha;\ \alpha\in I)$ влечет $(g_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(f_\alpha;\ \alpha\in I)$;

(III) $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(g_\alpha;\ \alpha\in I)$, $(g_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(h_\alpha;\ \alpha\in I)$ влечет $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(h_\alpha;\ \alpha\in I)$.

Доказательство. (I). Ясно из леммы 3.3.2.

(II). Ясно, так как

$$|(g_\alpha, f_\alpha)-1|=|\overline{(f_\alpha, g_\alpha)}-1|=|\overline{(f_\alpha, g_\alpha)-1}|=|(f_\alpha, g_\alpha)-1|.$$

(III). Мы знаем, что $\sum_{\alpha\in I}|\|f_\alpha\|-1|$, $\sum_{\alpha\in I}|\|g_\alpha\|-1|$, $\sum_{\alpha\in I}|\|h_\alpha\|-1|$, $\sum_{\alpha\in I}|(f_\alpha, g_\alpha)-1|$, $\sum_{\alpha\in I}|(g_\alpha, h_\alpha)-1|$ сходятся; мы должны доказать, что ряд $\sum_{\alpha\in I}|(f_\alpha, h_\alpha)-1|$ также сходится.

Величины $|\|f_\alpha\|-1|$, $|\|g_\alpha\|-1|$, $|\|h_\alpha\|-1|$, $|(f_\alpha, g_\alpha)-1|$, $|(g_\alpha, h_\alpha)-1|$ все ограничены, скажем, величиной $C$. Мы достигнем нашей цели, если сможем показать, что

$$|(f_\alpha, h_\alpha)-1|\leqslant D\{|\|f_\alpha\|-1|+|\|g_\alpha\|-1|+|\|h_\alpha\|-1|+ \\ +|(f_\alpha, g_\alpha)-1|+|(g_\alpha, h_\alpha)-1|\}$$

с некоторой константой $D$ для всех $\alpha\in I$, за исключением конечного числа (см. лемму 2.3.1)

Положим $\|f_\alpha\|=1+\eta$, $\|g_\alpha\|=1+\theta$, $\|h_\alpha\|=1+\zeta$, $(f_\alpha, g_\alpha)=1+\varkappa$, $(g_\alpha, h_\alpha)=1+\lambda$. Тогда $|\eta|$, $|\theta|$, $|\zeta|$, $|\varkappa|$, $|\lambda|\leqslant C$ и согласно лемме 2.3.2

$|\theta| \leqslant 1/2$, за исключением конечного числа элементов $\alpha$ (т. е. $|\|g_\alpha\| - 1| \leqslant 1/2$).

Ортогонализуем $g_\alpha$, $f_\alpha$, $h_\alpha$ (в указанном порядке):

$$g_\alpha = a_{11}\varphi_\alpha, \quad f_\alpha = a_{21}\varphi_\alpha + a_{22}\varphi'_\alpha, \quad h_\alpha = a_{31}\varphi_\alpha + a_{32}\varphi'_\alpha + a_{33}\varphi''_\alpha,$$

$$\|\varphi_\alpha\| = \|\varphi'_\alpha\| = \|\varphi''_\alpha\| = 1, \quad (\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha) = (\varphi_\alpha, \varphi''_\alpha) = (\varphi'_\alpha, \varphi''_\alpha) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |a_{11}|^2 &= \|g_\alpha\|^2 = (1+\theta)^2, \\ |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 &= \|f_\alpha\|^2 = (1+\eta)^2, \\ |a_{31}|^2 + |a_{32}|^2 + |a_{33}|^2 &= \|h_\alpha\|^2 = (1+\zeta)^2, \\ a_{21}\bar{a}_{11} &= (f_\alpha, g_\alpha) = 1 + \varkappa, \\ a_{11}\bar{a}_{31} &= (g_\alpha, h_\alpha) = 1 + \lambda. \end{aligned}$$

Далее,

$$|(f_\alpha, h_\alpha) - 1| = |a_{21}\bar{a}_{31} + a_{22}\bar{a}_{32} - 1| = |\{a_{21}\bar{a}_{11}\cdot a_{11}\bar{a}_{31}\cdot |a_{11}|^{-2} - 1\} +$$
$$+ a_{22}\bar{a}_{32}| \leqslant |a_{21}\bar{a}_{11}\cdot a_{11}\bar{a}_{31}\cdot |a_{11}|^{-2} - 1| + |a_{22}\bar{a}_{32}|.$$

Сейчас мы оценим это выражение, пользуясь тем, что $|\theta| \leqslant 1/2$ и $|\eta|, \ldots, |\lambda| \leqslant C$. При этом величины $D_1$, $D_2$ будут константами, зависящими от $C$. Первый член, очевидно, не превосходит величины

$$(1 + |\varkappa|)(1 + |\lambda|)(1 - |\theta|)^{-2} - 1 \leqslant D_1(|\theta| + |\varkappa| + |\lambda|).$$

Что же касается второго члена, то заметим, что

$$|a_{22}|^2 = \{|a_{21}|^2 + |a_{22}|^2\} - \frac{|a_{21}\bar{a}_{11}|^2}{|a_{11}|^2} \leqslant (1 + |\eta|)^2 - \frac{(1 - |\varkappa|)^2}{(1 + |\theta|)^2},$$

$$|a_{32}|^2 \leqslant \{|a_{31}|^2 + |a_{32}|^2 + |a_{33}|^2\} - \frac{|a_{11}\bar{a}_{31}|^2}{|a_{11}|^2} \leqslant (1 + |\zeta|)^2 - \frac{(1 - |\lambda|)^2}{(1 + |\theta|)^2}$$

и оба выражения ограничены величиной $D_2(|\eta| + |\theta| + |\zeta| + |\varkappa| + |\lambda|)$. Таким образом,

$$|a_{22}a_{32}| \leqslant D_2(|\eta| + |\theta| + |\zeta| + |\varkappa| + |\lambda|).$$

Комбинируя доказанные неравенства, получаем, что

$$|(f_\alpha, h_\alpha) - 1| \leqslant D(|\eta| + |\theta| + |\zeta| + |\varkappa| + |\lambda|)$$

для всех $\alpha \in I$, кроме конечного числа. Это и есть требуемое неравенство, так что доказательство завершено.

Определение 3.3.3. *Эквивалентность $\approx$ разбивает множество всех $C_0$-последовательностей на попарно непересекающиеся классы эквивалентности (см. лемму 3.3.3) Обозначим множество этих классов эквивалентности через* $\Gamma$ *и класс эквивалентности данной $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, через $\mathfrak{C}(f_\alpha; \alpha \in I)$.*

Теорема I. *Если две $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, и $g_\alpha$, $\alpha \in I$, принадлежат двум различным классам эквивалентности, то $(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha) = 0$. Если они принадлежат одному классу эквивалентности, то $(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда некоторое $(f_\alpha, g_\alpha) = 0$.*

Доказательство. Ясно, что $(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha) = \Pi_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha)$ (в смысле квазисходимости), и поэтому наше утверждение совпадает с утверждением леммы 2.5.1.

Одно дополнительное замечание, касающееся эквивалентности $\approx$.

Лемма 3.3.4. *Соотношение $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \approx (g_\alpha;\ \alpha \in I)$ имеет место тогда и только тогда, когда одновременно сходятся $\sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha - g_\alpha \|^2$, $\sum_{\alpha\in I} |\Im (f_\alpha, g_\alpha)|$.*

Доказательство. Другими словами, мы должны доказать, что последние две сходимости эквивалентны в совокупности сходимости $\sum_{\alpha\in I} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|$. Так как $\sum_{\alpha\in I} |\| f_\alpha \|^2 - 1|$, $\sum_{\alpha\in I} |\| g_\alpha \|^2 - 1|$ сходятся (согласно лемме 3.2.3), мы можем сравнивать их со сходимостью $\sum_{\alpha\in I} |(f_\alpha, g_\alpha) - {}^1/_2 \| f_\alpha \|^2 - {}^1/_2 \| g_\alpha \|^2|$.

Теперь

$$\Re \{(f_\alpha, g_\alpha) - {}^1/_2 \| f_\alpha \|^2 - {}^1/_2 \| g_\alpha \|^2\} =$$
$$= - {}^1/_2 \{\| f_\alpha \|^2 + \| g_\alpha \|^2 - 2\Re (f_\alpha, g_\alpha)\} = - {}^1/_2 \| f_\alpha - g_\alpha \|^2,$$
$$\Im \{(f_\alpha, g_\alpha) - {}^1/_2 \| f_\alpha \|^2 - {}^1/_2 \| g_\alpha \|^2\} = \Im (f_\alpha, g_\alpha),$$

а сходимость $\sum_{\alpha\in I} z_\alpha$ всегда эквивалентна совместной сходимости $\sum_{\alpha\in I} |\Re z_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} |\Im z_\alpha|$ (см. начало доказательства леммы 2.3.3). Это завершает доказательство.

Лемма 3.3.5. *Если $f_\alpha \neq g_\alpha$ лишь для конечного числа значений $\alpha$, то $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \approx (g_\alpha; \alpha \in I)$.*

Доказательство. Очевидно, следует из леммы 3.3.4, так как $f_\alpha = g_\alpha$ означает, что $(\| f_\alpha - g_\alpha \|)^2 = \Im (f_\alpha, g_\alpha) = 0$.

Следующая лемма заслуживает определенного внимания, так как она является весьма характерным следствием наших соглашений, придающих смысл квазисходящимся (но не сходящимся) выражениям $\Pi_{\alpha\in I} z_\alpha$.

Лемма 3.3.6. *Пусть $z_\alpha$ — произвольные комплексные числа и $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ является квазисходящимся. Тогда:*

(I) *если $f_\alpha$, $\alpha \in I$, — $C$-последовательность, то такова и $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in I$;*

(II) *если $\sum_{\alpha\in I} ||z_\alpha| - 1|$ сходится*[20] *и $f_\alpha$ $\alpha \in I$, — $C_0$-последовательность, то такова и $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in I$;*

---

[20] По лемме 2.4.1, (II) это выполнено, если $\Pi_{\alpha\in I} |z_\alpha| \neq 0$, т. е. если $\Pi_{\alpha\in I} z_\alpha \neq 0$ или не сходится.

(III) *всегда*

$$\Pi\otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha = \prod_{\alpha\in I} z_\alpha \cdot \Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \qquad (*)$$

*за исключением случая, когда* $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ *является (квазисходящимся, но) не сходящимся и* $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha \neq 0$. *В этом случае* $z_\alpha$, $f_\alpha$ *удовлетворяют предположениям п.* (II) *и все* $z_\alpha \neq 0$;

(IV) *если* $z_\alpha$, $f_\alpha$ *удовлетворяют предположениям п.* (II), *то* $C_0$*-последовательности* $f_\alpha$, $\alpha \in I$, *и* $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in I$, *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\sum_{\alpha\in I} |z_\alpha - 1|$ *сходится. Если все* $z_\alpha \neq 0$, *то последнее эквивалентно сходимости произведения* $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ *(помимо простой квазисходимости).*

Замечание. Совместное использование утверждений (III), (IV) с теоремой I показывает, что всегда, когда соотношение $(*)$ несправедливо,

$$(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \quad \Pi\otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha) = 0.$$

Доказательство (I). Так как $\prod_{\alpha\in I} |z_\alpha|$, $\prod_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|$ сходятся, то

$$\prod_{\alpha\in I} \|z_\alpha f_\alpha\| = \prod_{\alpha\in I} |z_\alpha| \cdot \prod_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|.$$

(II). $\sum_{\alpha\in I} |\,|z_\alpha| - 1|$, $\sum_{\alpha\in I} |\,\|f_\alpha\| - 1|$, сходятся, следовательно, величина $|\,|z_\alpha| - 1|$ ограничена, а с ней ограничена и $|z_\alpha|$, скажем $|z_\alpha| \leqslant C$. Теперь

$$|\,\|z_\alpha f_\alpha\| - 1| = |\,|z_\alpha|\,\|f_\alpha\| - 1| = |(|z_\alpha| - 1) + |z_\alpha|(\|f_\alpha\| - 1)| \leqslant$$
$$\leqslant |\,|z_\alpha| - 1| + C|\,\|f_\alpha\| - 1|,$$

и, таким образом, $\sum_{\alpha\in I} |\,\|z_\alpha f_\alpha\| - 1|$ сходится (по лемме 2.3.1).

(III). Соотношение $(*)$ означает, что

$$(\Pi\otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha)(g_\alpha;\ \alpha\in I) = \prod_{\alpha\in I} z_\alpha \cdot (\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha)(g_\alpha;\ \alpha\in I)$$

для всех $C$-последовательностей $g_\alpha$, $\alpha \in I$, т. е. что $\prod_{\alpha\in I} (z_\alpha f_\alpha, g_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} z_\alpha \times \prod_{\alpha\in I} (f_\alpha, g_\alpha)$. Положим $z'_\alpha = (f_\alpha, g_\alpha)$; тогда эта формула приобретает вид

$$\prod_{\alpha\in I} z_\alpha z'_\alpha = \prod_{\alpha\in I} z_\alpha \cdot \prod_{\alpha\in I} z'_\alpha.$$

Теперь легко проверить, что эта формула справедлива, если один из множителей справа сходится, в то время как второй может быть только квазисходящимся [21] (ввиду леммы 2.4.2). Таким образом, в случае, когда соотношение $(*)$ не имеет место, $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ и $\prod_{\alpha\in I} z'_\alpha$ расходятся. Это исключает (по лемме 2.4.2,

---

[21] Если оба являются квазисходящимися, то это может быть несправедливо: положим $z_\alpha = e^{i\theta_\alpha}$, $z_\alpha = e^{-i\theta_\alpha}$, где $-\pi \leqslant \theta_\alpha < \pi$ и $\sum_{\alpha\in I} |\theta_\alpha|$ не сходится.

(I)) случай $\prod_{\alpha\in I}|z'_\alpha|=0$. Так как $|z'_\alpha|=|(f_\alpha, g_\alpha)|\leqslant\|f_\alpha\|\|g_\alpha\|$ и так как $\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|$, $\prod_{\alpha\in I}\|g_\alpha\|$ сходятся, то это исключает также случай $\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|=0$, а следовательно, и случай $\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|^2=0$. Теперь

$$(\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha)(f_\alpha;\ \alpha\in I)=\prod_{\alpha\in I}(f_\alpha,f_\alpha)=\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|^2\neq 0,\qquad \Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha\neq 0.$$

Поэтому, если соотношение (*) несправедливо, то $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$ расходится и $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha\neq 0$. Отсюда следует, что $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|=0$ (см. лемму 2.4.2, (I)), т. е. что все $z_\alpha\neq 0$ и $\sum_{\alpha\in I}||z_\alpha|-1|$ сходится (см. примеч. 20); кроме того, отсюда следует, что $f_\alpha$, $\alpha\in I$, — $C_0$-последовательность (см. лемму 3.3.1). Таким образом, $z_\alpha$, $f_\alpha$ удовлетворяют предположениям п. (II).

(IV). $\sum_{\alpha\in I}||z_\alpha|-1|$, $\sum_{\alpha\in I}|\|f_\alpha\|-1|$ сходятся по предположению. Эквивалентность последовательностей $f_\alpha$, $\alpha\in I$, и $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha\in I$, означает, что $\sum_{\alpha\in I}|(z_\alpha f_\alpha, f_\alpha)-1|=\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha\|f_\alpha\|^2-1|$ сходится. Теперь величина $||z_\alpha|-1|$ ограничена, следовательно, ограничена и величина $|z_\alpha|$, скажем $|z_\alpha|\leqslant C$. Поэтому

$$||z_\alpha-1|-|z_\alpha\|f_\alpha\|^2-1||\leqslant|(z_\alpha-1)-(z_\alpha\|f_\alpha\|^2-1)|=$$
$$=|z_\alpha(\|f_\alpha\|^2-1)|\leqslant C|\|f_\alpha\|^2-1|,$$

и $\sum_{\alpha\in I}||z_\alpha-1|-|z_\alpha\|f_\alpha\|^2-1||$ сходится (по лемме 2.3.1), а с ним сходится и $\sum_{\alpha\in I}(|z_\alpha-1|-|z_\alpha\|f_\alpha\|^2-1|)$ (по лемме 2.3.3). Таким образом, сходимость $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha\|f_\alpha\|^2-1|$ эквивалентна сходимости $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha-1|$. Это доказывает первую часть утверждения (IV).

Сделаем сейчас дополнительное предположение, что все $z_\alpha\neq 0$. Сходимость $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$ эквивалентна сходимости $\sum_{\alpha\in I}|\arg z_\alpha|$ (по лемме 2.4.2., (II)). поскольку по лемме 2.4.1, (II) $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|\neq 0$, а она, в свою очередь, эквивалентна сходимости $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha-1|$, потому что

$$\frac{1}{\pi}|\arg z_\alpha|\leqslant|z_\alpha-1|\leqslant||z_\alpha|-1|+|\arg z_\alpha|.$$

Далее, $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|\neq 0$ (по лемме 2.4.1, (II)), и поэтому, если $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$ сходится, оно необходимо не равно нулю (по лемме 2.4.2) [22]. Таким образом, сходимость $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$ может быть описана леммой 2.5.1: она эквивалентна сходимости $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha-1|$; это доказывает вторую часть п. (IV).

[22] Простая квазисходимость не обеспечивала бы этого.

Значение этой леммы мы увидим позже, в п. 6.2. Непосредственным же следствием ее является

Лемма 3.3.7. *Каждый класс эквивалентности $\mathfrak{C}$ содержит $(C_0)$-последовательность $f_\alpha$, $\alpha \in I$, с $\| f_\alpha \| = 1$ для всех $\alpha \in I$.*

Доказательство. Выберем $(f'_\alpha;\ \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$. Так как $\sum_{\alpha \in I} | \| f'_\alpha \| - 1 |$ сходится, то, кроме конечного множества элементов $\alpha$, $| \| f'_\alpha \| - 1 | \leqslant 1/2$, $\| f'_\alpha \| \geqslant 1/2$. Для этих исключительных $\alpha$ мы можем (используя лемму 3.3.5) заменить $f'_\alpha$ на $f''_\alpha$ с $\| f'_\alpha \| \geqslant 1/2$. Итак, мы можем предполагать, что все $\| f'_\alpha \| \geqslant 1/2$.

Далее, $| 1/\| f'_\alpha \| - 1 | \leqslant 2 | \| f'_\alpha \| - 1 |$, следовательно, $\sum_{\alpha \in I} | 1/\| f'_\alpha \| - 1 |$ сходится (по лемме 2.3.1). Поэтому, применяя лемму 3.3.6, (II), (IV) к $z_\alpha = | z_\alpha | = 1/\| f'_\alpha \|$ и нашим $f'_\alpha$, получаем, что $f_\alpha = (1/\| f'_\alpha \|) f'_\alpha$ также образуют $C_0$-последовательность, эквивалентную $f'_\alpha$, $\alpha \in I$, и принадлежащую, таким образом, к $\mathfrak{C}$. ).сно, что $\| f_\alpha \| = 1$, так что доказательство закончено.

3.4. Лемма 3.4.1. $(\Phi, \Phi) \geqslant 0$.

Доказательство. Имеем $\Phi \in \Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$, и поэтому

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{p} \Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_{\alpha,\nu}.$$

Каждая последовательность $f^0_{\alpha,\nu}$, $\alpha \in I$, есть $C$-последовательность. Для каждой последовательности, не являющейся $C_0$-последовательностью, лемма 3.3.1 дает $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_{\alpha,\nu} = 0$, так что мы можем опустить такие слагаемые. Поэтому можно предполагать, что все $f_{\alpha,\nu}$, $\alpha \in I$, являются $C_0$-последовательностями. Обозначим класс эквивалентности последовательности $f^0_{\alpha,\nu}$, $\alpha \in I$, через $\mathfrak{C}_\nu$, различные классы среди $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_p$ — через $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_q$ (ясно, что $q = 1, \ldots, p$). Пусть $N_i$ есть множество тех $\nu = 1, \ldots, p$, для которых $\mathfrak{C}_\nu = \mathfrak{D}_i$ $(i = 1, \ldots, q)$. Положим теперь

$$\Phi_i = \sum_{\nu \in N_i} \prod \otimes_{\alpha \in I} f^0_{\alpha,\nu};$$

тогда $\Phi = \sum_{i=1}^{q} \Phi_i$. Если $i \neq j$, то $\mathfrak{D}_i \neq \mathfrak{D}_j$; следовательно, если $\nu \in N_i$, $\mu \in N_j$, то $\mathfrak{C}_\nu \neq \mathfrak{C}_\mu$, $(f^0_{\alpha,\nu};\ \alpha \in I) \not\approx (f^0_{\alpha,\mu};\ \alpha \in I)$. Теорема I дает поэтому, что $(\Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_{\alpha,\nu}, \Pi \otimes_{\alpha \in I} f^0_{\alpha,\mu}) = 0$, и, таким образом, $(\Phi_i, \Phi_j) = 0$. Следовательно, мы имеем

$$(\Phi, \Phi) = \left( \sum_{i=1}^{q} \Phi_i,\ \sum_{j=1}^{q} \Phi_j \right) = \sum_{i,j=1}^{q} (\Phi_i, \Phi_j) = \sum_{i=1}^{q} (\Phi_i, \Phi_i).$$

Поэтому неравенство $(\Phi, \Phi) \geqslant 0$ было бы установлено, если бы мы доказали, что $(\Phi_i, \Phi_i) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, q$. Записывая вновь $\Phi$ вместо $\Phi_i$, $p$ вместо $q$, $1, \ldots, p$ вместо элементов множества $N_i$ и $\mathfrak{C}$ вместо $\mathfrak{C}_i$, видим, что неравенство $(\Phi, \Phi) \geqslant 0$ необходимо доказать только для случая, когда все последовательности $f^0_{\alpha,\nu}$, $\alpha \in I$, принадлежат к одному классу эквивалентности $\mathfrak{C}$. Это означает, что для всех $\mu$, $\nu = 1, \ldots, p$ $(f^0_{\alpha,\nu};\ \alpha \in I) \approx (f^0_{\alpha,\mu};\ \alpha \in I)$, т. е. $\sum_{\alpha \in I} |(f^0_{\alpha,\nu}, f^0_{\alpha,\mu}) - 1|$ сходится. Таким образом, $\prod_{\alpha \in I} (f^0_{\alpha,\nu}, f^0_{\alpha,\mu})$ является сходящимся

(по лемме 2.4.1, а не просто квазисходящимся), но

$$(\Phi, \Phi) = \sum_{\nu,\mu=1}^{p} \prod_{\alpha\in I} (f^0_{\alpha,\nu}, f^0_{\alpha,\mu}).$$

Каждый член последней суммы является сходящимся, поэтому значение (Ф, Ф) неотрицательно, если мы сможем показать, что

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p} (f^0_{\alpha_1,\nu}, f^0_{\alpha_1,\mu}) \cdot \ldots \cdot (f^0_{\alpha_s,\nu}, f^0_{\alpha_s,\mu}) \geqslant 0$$

для каждого множества попарно различных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Положим $(f^0_{\alpha,\nu}, f^0_{\alpha,\mu}) = a^\alpha_{\nu\mu}$. Тогда для любых (комплексных) $x_1, \ldots, x_p$

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p} a^\alpha_{\nu\mu} x_\nu \bar{x}_\mu = \sum_{\nu,\mu=1}^{p} (f^0_{\alpha,\nu}, f^0_{\alpha,\mu}) x_\nu \bar{x}_\mu =$$
$$= \left(\sum_{\nu=1}^{p} x_\nu f^0_{\alpha,\nu}, \sum_{\mu=1}^{p} x_\mu f^0_{\alpha,\mu}\right) = \left\| \sum_{\nu=1}^{p} x_\nu f^0_{\alpha,\nu} \right\|^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, матрица $(a^\alpha_{\nu\mu})_{\nu,\mu=1,\ldots,p}$ неотрицательна для каждого $\alpha \in I$. Поэтому она есть сумма $p$ неотрицательных матриц ранга 1 [23], т. е. сумма $p$ слагаемых вида $u^\alpha_\nu \overline{u^\alpha_\mu}$. Таким образом,

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p} (f^0_{\alpha_1,\nu}, f^0_{\alpha_1,\mu}) \cdot \ldots \cdot (f^0_{\alpha_s,\nu}, f^0_{\alpha_s,\mu}) = \sum_{\nu,\mu=1}^{p} a^{\alpha_1}_{\nu\mu} \cdot \ldots \cdot a^{\alpha_s}_{\nu\mu}$$

есть сумма $p^s$ членов вида

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p} u^{\alpha_1}_\nu \cdot \overline{u^{\alpha_1}_\mu} \cdot \ldots \cdot u^{\alpha_s}_\nu \cdot \overline{u^{\alpha_s}_\mu} = \sum_{\nu,\mu=1}^{p} u^{\alpha_1}_\nu \cdot \ldots \cdot u^{\alpha_s}_\nu \cdot \overline{u^{\alpha_1}_\mu \cdot \ldots \cdot u^{\alpha_s}_\mu} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{p} u^{\alpha_1}_\nu \cdot \ldots \cdot u^{\alpha_s}_\nu \overline{\sum_{\mu=1}^{p} u^{\alpha_1}_\mu \cdot \ldots \cdot u^{\alpha_s}_\mu} = \left| \sum_{\nu=1}^{p} u^{\alpha_1}_\nu \cdot \ldots \cdot u^{\alpha_s}_\nu \right|^2 \geqslant 0.$$

Поэтому это выражение неотрицательно. Доказательство завершено.

Определение 3.4.1. *Определим* $\| \Phi \| = \sqrt{(\Phi, \Phi)} \geqslant 0$ $((\Phi, \Phi) \geqslant 0$ *по лемме* 3.4.1).

Лемма 3.4.2. $|(\Phi, \Psi)| \leqslant \| \Phi \| \, \| \Psi \|$ (*неравенство Шварца*).

Доказательство. Воспользуемся леммами 3.2.2 и 3.4.1: для любых двух вещественных $x$, $y$

$$0 \leqslant (x\Phi + y\Psi, x\Phi + y\Psi) = x^2 (\Phi, \Phi) + y^2 (\Psi, \Psi) + xy ((\Phi, \Psi) +$$
$$+ (\Psi, \Phi)) = x^2 \| \Phi \|^2 + y^2 \| \Psi \|^2 + 2xy \Re (\Phi, \Psi),$$

поэтому этот многочлен по $x$, $y$ имеет неотрицательный дискриминант: $|\Re (\Phi, \Psi)| \leqslant \leqslant \| \Phi \| \| \Psi \|$. Заменим Ф на $e^{-i\theta}\Phi$, $\theta$ вещественно. Тогда $\| \Phi \| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}$ не

---

[23] Это утверждение инвариантно относительно ортогональных преобразований; поэтому достаточно проверить его в случае, когда $a^\alpha_{\nu\mu}$ имеет диагональный вид: $a^\alpha_{\nu\mu} = a^\alpha_\nu \delta_{\nu-\mu}$ ($\delta_\rho = 1$ или $\delta_\rho = 0$, если соответственно $\rho = 0$, $\rho \neq 0$). Из неотрицательности следует, что $a^\alpha_\nu \geqslant 0$. Теперь матрицы $a^\alpha_{\nu\mu} = \sum_{\sigma=1}^{p} a^\alpha_{\sigma;\nu\mu}$, где $a^\alpha_{\sigma;\nu\mu} = a^\alpha_\sigma \delta_{\nu-\sigma} \delta_{\mu-\sigma}$, и являются требуемыми матрицами.

изменится, а $|\Re(\Phi, \Psi)|$ перейдет в $|\Re\{e^{-i\theta}(\Phi, \Psi)\}|$ (согласно лемме 3.2.2). Полагая $\theta = \arg(\Phi, \Psi)$, получаем $|(\Phi, \Psi)| \leqslant \|\Phi\| \|\Psi\|$.

Лемма 3.4.3. *Из $\Phi \neq 0$ следует, что* $\|\Phi\|^2 = (\Phi, \Phi) > 0$.

Доказательство. По лемме 3.4.1 всегда $\|\Phi\|^2 = (\Phi, \Phi) \geqslant 0$, поэтому мы должны только вывести, что $\Phi = 0$, если $\|\Phi\| = 0$.

Из $\|\Phi\| = 0$ следует (согласно лемме 3.2.3), что $|(\Phi, \Psi)| \leqslant \|\Phi\| \|\Psi\| = 0$, $(\Phi, \Psi) = 0$ для всех $\Psi$. Положим $\Psi = \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha$, тогда последнее означает согласно лемме 3.2.3, что $\Phi(f_\alpha;\ \alpha \in I) = 0$. Так как $f_\alpha$, $\alpha \in I$, была произвольная $C$-последовательность, то необходимо, чтобы $\Phi = 0$.

Теорема II. *Пространство* $\Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *является* (*комплексным*) *линейным пространством с* (*эрмитовым и положительно определенным*) *линейным скалярным произведением* $(\Phi, \Psi)$, *введенным в лемме* 3.2.1 (*т. е. оно удовлетворяет условиям* **A**, **B** *статьи* [8, с. 64]).

*Это пространство, таким образом, может быть метризовано, если мы определим* distance $(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\|$, *где* $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)} \geqslant 0$ (*см. определение* 3.4.1).

Доказательство. С учетом работы [8, с. 64—65] утверждение теоремы следует из лемм 3.2.2 и 3.4.3

Пространство $\Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ необязательно полно (условие **E** в [8, с, 66]), и это предопределяет направление наших дальнейших построений.

3.5. Лемма 3.5.1. *Мы имеем* $\|\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0\| = \Pi \otimes_{\alpha \in I} \|f_\alpha^0\|$ *и для каждого* $\Phi \in \Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$,

$$|\Phi(f_\alpha;\ \alpha \in I)| \leqslant \|\Phi\| \prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha^0\|.$$

Доказательство. По определению,

$$\|\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0\|^2 = (\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0,\ \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0) =$$

$$= \prod_{\alpha \in I} (f_\alpha^0, f_\alpha^0) = \prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha^0\|^2 = \left(\prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha^0\|\right)^2,$$

$$\left\|\prod \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0\right\| = \prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha^0\|.$$

Теперь леммы 3.2.3 и 3.4.2 (неравенство Шварца) дают

$$|\Phi(f_\alpha^0;\ \alpha \in I)| = |(\Phi, \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0)| \leqslant \|\Phi\| \|\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0\| = \|\Phi\| \Pi_{\alpha \in I} \|f_\alpha^0\|.$$

Определение 3.5.1. *Рассмотрим те функционалы* $\Phi \in \Pi \widetilde{\otimes}_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$, *для которых найдется последовательность* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$, *такая, что*

(I) $\Phi(f_\alpha; \alpha \in I) = \lim_{r \to \infty} \Phi_r(f_\alpha;\ \alpha \in I)$

*для всех $C$-последовательностей* $f_\alpha$, $\alpha \in I$;

(II) $\lim_{r,s \to \infty} \|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$.

Множество, которое образуют такие функционалы, есть *полное тензорное произведение* пространств $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha \in I$, обозначаемое в дальнейшем через $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Соотношения (I), (II) будут обозначаться через $\Phi = \underset{r \to \infty}{\mathrm{L}} \Phi_r$.

Лемма 3.5.2. *Если последовательность* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *удовлетворяет условию* (II) *определения* 3.5.1, *то существует в точности одно* $\Phi \in \Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$, *такое, что* $\Phi = \underset{r\to\infty}{\mathrm{L}}\, \Phi_r$.

*Если* $\Phi = \underset{r\to\infty}{\mathrm{L}}\, \Phi_r$, *то все последовательности* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \in \Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *с* $\Phi = \underset{r\to\infty}{\mathrm{L}}\, \Psi_r$ *характеризуются тем, что* $\lim_{r\to\infty} \|\Phi_r - \Psi_r\| = 0$.

Доказательство. Мы имеем (по лемме 3.5.1)

$$|\Phi_r(f_\alpha;\ \alpha \in I) - \Phi_s(f_\alpha;\ \alpha \in I)| \leqslant \|\Phi_r - \Phi_s\| \Pi_{\alpha \in I} \|f_\alpha\|$$

для каждой $C$-последовательности $f_\alpha$. Поэтому из условия (II) следует, что

$$\lim_{r,s\to\infty} |\Phi_r(f_\alpha;\ \alpha \in I) - \Phi_s(f_\alpha;\ \alpha \in I)| = 0,$$

и, таким образом, (числовой) предел $\lim_{r\to\infty} \Phi_r(f_\alpha;\ \alpha \in I)$ существует. Обозначим его через $\Phi(f_\alpha;\ \alpha \in I)$. Ясно, что функционал $\Phi \in \Pi \widetilde{\otimes}_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. По построению соотношения (I), (II) выполнены, следовательно, $\Phi = \underset{r\to\infty}{\mathrm{L}}\, \Phi_r$. Таким образом, $\Phi \in \Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ и $\Phi$ единственно ввиду соотношения (I).

Что касается второго утверждения, то мы можем заменить $\Phi$, $\Phi_r$, $\Psi_r$ на $0$, $\Phi_r - \Psi_r$, $0$, т. е. мы можем предполагать, что $\Phi = \Psi_r = 0$. Таким образом, мы должны доказать, что условия:

(I′) $\lim_{r\to\infty} \Phi_r(f_\alpha;\ \alpha \in I) = 0$ для всех $C$-последовательностей $f_\alpha$, $\alpha \in I$;

(II′) $\lim_{r,s\to\infty} \|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$

— эквивалентны тому, что $\lim_{r\to\infty} \|\Phi_r\| = 0$.

*Достаточность*. Если $\lim_{r\to\infty} \|\Phi_r\| = 0$, то неравенство $|\Phi_r(f_\alpha;\ \alpha \in I)| \leqslant \|\Phi_r\| \Pi_{\alpha \in I} \|f_\alpha\|$ (используется лемма 3.5.1) дает (I′), а неравенство $\|\Phi_r - \Phi_s\| \leqslant \|\Phi_r\| + \|\Phi_s\|$ дает (II′).

*Необходимость*. Предположим, что выполнены условия (I′), (II′) и не выполнено условие $\lim_{r\to\infty} \|\Phi_r\| = 0$. Тогда $\|\Phi_r\| \geqslant a$ для некоторого фиксированного $a > 0$ и для бесконечного множества чисел $r$. Теперь (I′) означает, что $\lim_{r\to\infty} (\Phi_r, \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha) = 0$ (по лемме 3.2.3), и поэтому $\lim_{r\to\infty} (\Phi_r, \Omega) = 0$ для всех $\Omega \in \Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Выберем теперь некоторое $r_0$ с $\|\Phi_{r_0}\| \geqslant a$, такое большое, что $r, s \geqslant r_0$ влечет за собой $\|\Phi_r - \Phi_s\| \leqslant a/2$ (используется (II′)), и положим $\Omega = \Phi_{r_0}$. Тогда для $r \geqslant r_0$ имеем

$$|(\Phi_r, \Phi_{r_0})| \geqslant |(\Phi_{r_0}, \Phi_{r_0})| - |(\Phi_r - \Phi_{r_0}, \Phi_{r_0})| \geqslant \|\Phi_{r_0}\|^2 - \|\Phi_r - \Phi_{r_0}\| \|\Phi_{r_0}\| = \|\Phi_{r_0}\| (\|\Phi_{r_0}\| - \|\Phi_r - \Phi_{r_0}\|) \geqslant a(a - a/2) = a^2/2 > 0,$$

что противоречит условию $\lim_{r\to\infty} (\Phi_r, \Phi_{r_0}) = 0$.

Лемма 3.5.3. *Если* $\Phi, \Psi \in \Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, *т. е. если*

$$\Phi = \mathop{L}_{r\to\infty} \Phi_r, \quad \Psi = \mathop{L}_{r\to\infty} \Psi_r, \quad \Phi_r, \Psi_r \in \Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha,$$

*то* $\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Psi_r)$ *существует. Обозначим его через* $(\Phi, \Psi)$. *Эта величина зависит лишь от* $\Phi, \Psi$, *но не от используемого частного представления. Если* $\Phi, \Psi \in \Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, *то это согласуется с прежним определением.*

Доказательство. Мы имеем $\lim_{r,s\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$, $\lim_{r,s\to\infty}\|\Psi_r - \Psi_s\| = 0$, что влечет по неравенству Шварца, что $\lim_{r,s\to\infty}|(\Phi_r, \Psi_r) - (\Phi_s, \Psi_s)| = 0$, следовательно, $\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Psi_r)$ существует. Если, далее, $\Phi = \mathop{L}_{r\to\infty}\Phi'_r$, $\Psi = \mathop{L}_{r\to\infty}\Psi'_r$, то мы имеем, что $\lim_{r\to\infty}\|\Phi_r - \Phi'_r\| = 0$, $\lim_{r\to\infty}\|\Psi_r - \Psi'_r\| = 0$ (используется лемма 3.5.2), и неравенство Шварца дает, что $\lim_{r\to\infty}|(\Phi_r, \Psi_r) - (\Phi'_r, \Psi'_r)| = 0$, следовательно, $\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Psi_r) = \lim_{r\to\infty}(\Phi'_r, \Psi'_r)$. Таким образом, $\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Psi_r)$ зависит лишь от $\Phi, \Psi$.

Если $\Phi, \Psi \in \Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, то мы можем положить все $\Phi_r = \Phi$, $\Psi_r = \Psi$, и тогда ясно, что новое $(\Phi, \Psi)$ согласуется со старым.

Лемма 3.5.4. *В пространстве* $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ $(\Phi, \Psi)$ *линейно по* $\Phi$, *антилинейно по* $\Psi$, *эрмитово-симметрично по* $\Phi, \Psi$ *и положительно определено. Вместе с* $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)} \geqslant 0$ *оно удовлетворяет неравенству Шварца* (*см. леммы* 3.2.2, 3.4.2 *и* 3.4.3, *где соответствующие утверждения сделаны для* $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$).

Доказательство. Все эти свойства, кроме положительной определенности, следуют по непрерывности из лемм 3.2.2, 3.4.2.

$(\Phi, \Phi) \geqslant 0$ следует по непрерывности из леммы 3.4.1. Если $(\Phi, \Phi) = 0$, то выберем $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ с $\Phi = \mathop{L}_{r\to\infty}\Phi_r$. Тогда $\lim_{r\to\infty}\|\Phi_r\|^2 = \lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Phi_r) = (\Phi, \Phi) = 0$, $\lim_{r\to\infty}\|\Phi_r\| = 0$. Таким образом, лемма 3.5.2 дает $\Phi = \mathop{L}_{r\to\infty} 0 = 0$. Следовательно, $\Phi \neq 0$ влечет $(\Phi, \Phi) > 0$, что и доказывает положительную определенность.

Лемма 3.5.5. *Пространство* $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *является* (*комплексным*) *линейным пространством с* (*эрмитовым и положительно определенным*) *скалярным произведением* $(\Phi, \Psi)$, *введенным в лемме* 3.5.3 (*т. е. оно удовлетворяет условиям* **A**, **B** *работы* [8, с. 64]).

Таким образом, это пространство может быть метризовано, если определить distance $(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\|$, где $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)} \geqslant 0$ (см. лемму 3.5.4).

Пространство $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ в том виде, как оно описано в теореме II, является линейным подпространством пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ с теми же определениями $u\Phi$, $\Phi \pm \Psi$, $(\Phi, \Psi)$, $\|\Phi\|$.

Доказательство. Первая и вторая части следуют (с учетом [8, с. 64—65]) из леммы 3.4.4, последняя часть следует из леммы 3.5.3.

Лемма 3.5.6. *Леммы* 3.2.3 *и* 3.5.1 *справедливы для всех* $\Phi \in \Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Доказательство. Они справедливы для всех элементов из $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Следовательно, если $\Phi = \mathop{L}_{r\to\infty}\Phi_r$, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, то они справедливы для

всех $\Phi_r$. Теперь определение 3.5.1, (I), лемма 3.5.3 и $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)} = \sqrt{\lim\limits_{r\to\infty}(\Phi_r, \Phi_r)} = \lim\limits_{r\to\infty}\sqrt{(\Phi_r, \Phi_r)} = \lim\limits_{r\to\infty}\|\Phi_r\|$ обобщают их по непрерывности на $\Phi$.

Лемма 3.5.7. *Если* $\Phi \in \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *и* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \Pi' \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, *то* $\Phi = \mathrm{L}_{r\to\infty} \Phi_r$ *эквивалентно тому, что* $\lim\limits_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r\| = 0$.

Доказательство. *Необходимость*. Из $\Phi = \mathrm{L}_{r\to\infty} \Phi_r$ следует, что

$$\|\Phi - \Phi_s\| = \sqrt{(\Phi - \Phi_s, \Phi - \Phi_s)} = \sqrt{\lim_{r\to\infty}(\Phi_r - \Phi_s, \Phi_r - \Phi_s)} =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\sqrt{(\Phi_r - \Phi_s, \Phi_r - \Phi_s)} = \lim_{r\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\|,$$

откуда $\lim\limits_{s\to\infty}\|\Phi - \Phi_s\| = \lim\limits_{r,s\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$ (по определению 3.5.1, (II)).

*Достаточность*. Определение 3.5.1, (I) следует из того, что $\lim\limits_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r\| = 0$ (ввиду леммы 3.5.6 (3.5.1)), а 3.5.1, (II) выполняется вследствие неравенства

$$\|\Phi_r - \Phi_s\| = \|-(\Phi - \Phi_r) + (\Phi - \Phi_s)\| \leqslant \|\Phi - \Phi_r\| + \|\Phi - \Phi_s\|.$$

Лемма 3.5.8. $\Pi' \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *всюду плотно в* $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$.

Доказательство. Если $\Phi \in \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, то $\Phi = \mathrm{L}_{r\to\infty} \Phi_r$, $\Phi_r \in \Pi' \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$. По лемме 3.5.7 $\lim\limits_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r\| = 0$, следовательно, $\Phi$ есть предельная точка для $\Pi' \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$.

Лемма 3.5.9. *Пространство* $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *является топологически полным, т. е. оно удовлетворяет условию* E *статьи* [8, с. 65].

Доказательство. Предположим, что $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \in \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\lim\limits_{r,s\to\infty}\|\Phi^{(r)} - \Phi^{(s)}\| = 0$. Для каждого $\Phi^{(r)}$ выберем некоторое $\Phi_r \in \Pi' \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, такое, что $\|\Phi^{(r)} - \Phi_r\| \leqslant 1/r$ (используется лемма 3.5.8). Тогда $\|\Phi_r - \Phi_s\| \leqslant \|\Phi^{(r)} - \Phi^{(s)}\| + 1/r + 1/s$, следовательно, $\lim\limits_{r,s\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$. Таким образом, лемма 3.5.2 обеспечивает существование некоторого $\Phi \in \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, такого, что $\Phi = \mathrm{L}_{r\to\infty} \Phi_r$, т. е. $\lim\limits_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r\| = 0$ (ввиду леммы 3.5.7). Так как $\|\Phi - \Phi^{(r)}\| \leqslant \|\Phi - \Phi_r\| + 1/r$, то $\lim\limits_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi^{(r)}\| = 0$.

Теорема III. *Относительно скалярного произведения* $(\Phi, \Psi)$, *введенного в лемме* 3.5.3, *пространство* $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *является гильбертовым пространством (т. е. оно удовлетворяет условиям* **A, B, E** *работы* [8, с. 64—66]). *Оно метризуемо, как описано в лемме* 3.5.5.

Пространство $\Pi' \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, описанное в теореме II, является линейным всюду плотным подмножеством $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ с тем же определением величин $u\Phi$, $\Phi \pm \Psi$, $(\Phi, \Psi)$, $\|\Phi\|$.

Дальнейшие существенные свойства пространства $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ даны в лемме 3.5.6.

Доказательство немедленно следует из лемм 3.5.5, 3.5.8 и 3.5.9.

**3.6.** Важность гильбертова пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ становится ясной в свете следующей теоремы.

Теорема IV. *Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ со следующими свойствами:*

(I) *для каждой $C$-последовательности (возможна альтернатива: для каждой $C_0$-последовательности) $f_\alpha$, $\alpha\in I$, определен элемент $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha\in\mathfrak{H}$;*

(II) $(\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha,\ \Pi\otimes^*_{\alpha\in I}g_\alpha)=\Pi_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha)$;

(III) *конечные линейные комбинации элементов $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha$ образуют множество $\mathfrak{H}'$, всюду плотное в $\mathfrak{H}$.*

*Тогда существует изоморфизм пространств $\mathfrak{H}$ и $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, при котором каждый элемент $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha$ соответствует элементу $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$. Этот изоморфизм единствен.*

Доказательство. *Достаточность.* Пространство

$$\mathfrak{H}=\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha,\quad \Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha=\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha,$$

обладает свойствами (I) — (III) вследствие теоремы III (что касается свойства (III) в случае $C_0$-последовательностей, то заметим, что последовательности $f_\alpha$, $\alpha\in I$, не являющиеся $C_0$-последовательностями, значения не имеют: их $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha=$ $=0$ по лемме 3.3.1). Кроме того, указанные свойства сохраняются при изоморфизмах.

*Необходимость.* Предположим, что пространство $\mathfrak{H}$ и элементы $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha$ обладают свойствами (I) — (III) (для всех $C$-последовательностей или для всех $C_0$-последовательностей). Сопоставим элементу $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha$ в $\mathfrak{H}$ элемент $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ в $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Это соответствие оставляет $(\Phi,\Psi)$ инвариантным, так как условие (II) справедливо и для $\mathfrak{H}$, и для $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Поэтому мы можем продолжить его (единственным образом) до линейного соответствия между $\mathfrak{H}'$ и $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (в случае $C_0$-последовательностей вспомните замечание в доказательстве достаточности). Это продолжение также оставляет $(\Phi,\Psi)$ инвариантным, а с ним и $\|\Phi\|=$ $=\sqrt{(\Phi,\Phi)}$, и расстояние $(\Phi,\Psi)=\|\Phi-\Psi\|$. Таким образом, соответствие взаимно однозначно и изометрично. Поэтому оно продолжается по непрерывности (единственным образом) до взаимно однозначного и изометричного соответствия между замыканиями пространств $\mathfrak{H}'$ и $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, т. е. между $\mathfrak{H}$ и $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. По непрерывности это соответствие вновь линейно и оставляет $(\Phi,\Psi)$ инвариантным. Таким образом, это — изоморфизм. Кроме того, как мы уже отмечали, построенный изоморфизм отображает $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha$ в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$.

*Единственность* ясна из приведенной выше конструкции изоморфизма.

Мы видим, в частности, что если множество $I$ содержит единственный элемент, скажем $\alpha_0$, то пространство $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ с $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha=f_{\alpha_0}$ удовлетворяет условиям теоремы IV. Следовательно, $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ изоморфно $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$. Но $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ есть просто множество всех $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha$, поэтому $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ есть множество всех $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ и, как следствие, оно равно $\Pi'\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Легко проверить, что это, вообще говоря, неверно, если множество $I$ содержит два или более элементов.

Мы используем последний изоморфизм для отождествления соответствующих элементов, а именно, мы имеем, что $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$, $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha = f_{\alpha_0}$, если $\alpha_0$ есть единственный элемент множества $I$.

Для каждого конечного множества $I$ наша конструкция $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ совпадает с конструкцией работы [7, с. 127—131] (там $I$ есть множество $\mathfrak{S}(1, \ldots, n)$ и $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ записывается через $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$). Обсуждение случая таких (т. е. конечных) множеств $I$ можно найти там же.

Если множество $I$ конечно, то, как показывают наши определения 3.3.1 и 3.3.2, каждая последовательность $f_\alpha$, $\alpha \in I$, является $C$- и даже $C_0$-последовательностью и любые две такие последовательности эквивалентны. Поэтому $\Gamma$ (см. определение 3.3.3) состоит только из одного класса эквивалентности. Как мы увидим в лемме 6.4.1, $\Gamma$ состоит из бесконечного числа классов эквивалентности, когда $I$ бесконечно.

Если задано замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{M}_\alpha \neq (0)$ каждого пространства $\mathfrak{H}_\alpha$, мы можем образовать $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha$. Элементы $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ ($f_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ и $f_\alpha$, $\alpha \in I$, — $C$-последовательность), необходимые для его построения, можно обозначить через $\tilde{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ для того, чтобы отличать их от элементов $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Рассмотрим, наконец, элементы $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ (в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$) с $f_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ и обозначим замкнутое линейное множество, порождаемое ими, через $\bar{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha$ ($\subset \Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$). Применим теперь теорему IV (к $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha$, $\tilde{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ вместо $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$), положив $\mathfrak{H} = \bar{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha$, $\Pi\otimes^*_{\alpha\in I}f_\alpha = \Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ (здесь $f_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$). В результате имеем изоморфизм $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha$ и $\bar{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha$, отображающий $\tilde{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$.

Воспользуемся этим изоморфизмом для отождествления соответствующих элементов. Тогда $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha = \bar{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha$, $\tilde{\Pi}\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha = \Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$. Следовательно, мы получаем теперь, что $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{M}_\alpha \subset \Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, если $\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{H}_\alpha$, и их $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ согласованы, если все $f_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$.

## Глава 4

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛНОГО ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА НЕПОЛНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

**4.1.** Определение 4.1.1. *Пусть $\mathfrak{C} \in \Gamma$ есть класс эквивалентности. Обозначим через $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ замкнутое линейное множество, порожденное всеми $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$, где $f_\alpha$, $\alpha \in I$, есть произвольная $C_0$-последовательность из $\mathfrak{C}$. Ясно, что $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha \subset \Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.*

Пространство $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ есть *неполное тензорное произведение пространств* $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha \in I$, точнее, оно есть *$\mathfrak{C}$-адическое неполное тензорное произведение.*

Лемма 4.1.1. *Пространства* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *для всех* $\mathfrak{C}\in\Gamma$ *взаимно ортогональны, и замкнутое линейное множество, которое они порождают, есть* $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Доказательство. Допустим $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}\in\Gamma$, $\mathfrak{C}\neq\mathfrak{D}$. Рассмотрим две $C_0$-последовательности $(f_\alpha;\alpha\in I)\in\mathfrak{C}$, $(g_\alpha;\alpha\in I)\in\mathfrak{D}$. Тогда $(f_\alpha;\alpha\in I)\not\approx(g_\alpha;\alpha\in I)$, следовательно, по теореме I вектор $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ ортогонален вектору $\Pi\otimes_{\alpha\in I}g_\alpha$. Поэтому вектор $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ ортогонален всему пространству $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и, следовательно, все пространство $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ ортогонально $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Пространство $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ есть замкнутое линейное пространство, порожденное элементами $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$, где $f_\alpha$, $\alpha\in I$, пробегает все $C$-последовательности. По лемме 3.3.1 им достаточно разрешить пробегать все $C_0$-последовательности. Но каждая $C_0$-последовательность принадлежит некоторому $\mathfrak{C}\in\Gamma$, следовательно, $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ порождено всеми $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}\in\Gamma$.

Лемма 4.1.2. *Рассмотрим некоторое* $\mathfrak{C}\in\Gamma$ *и некоторую* $C_0$-*последовательность* $(f^0_\alpha;\alpha\in I)\in\mathfrak{C}$ *с* $\|f^0_\alpha\|=1$ (*см. лемму* 3.3.7). *Тогда* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *является замкнутым линейным пространством, порожденным всеми* $C_0$-*последовательностями* $f_\alpha$, $\alpha\in I$, *для которых* $f_\alpha\neq f^0_\alpha$ *лишь для конечного числа элементов* $\alpha$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}^*$ — замкнутое линейное пространство, порожденное этими $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$. Лемма 3.3.5 гарантирует, что $\mathfrak{H}^*\subset\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Если мы сможем доказать, что $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha\in\mathfrak{H}^*$, когда $(f_\alpha;\alpha\in I)\in\mathfrak{C}$, то тогда $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha\subset\mathfrak{H}^*$ и, следовательно, $\mathfrak{H}^*=\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, что завершит доказательство.

Предположим поэтому, что $(f_\alpha;\alpha\in I)\in\mathfrak{C}$, т. е. $(f_\alpha;\alpha\in I)\approx(f^0_\alpha;\alpha\in I)$. Другими словами, предположим, что $\sum_{\alpha\in I}|(f_\alpha,f^0_\alpha)-1|$ сходится.

Если $\|\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha\|=\Pi_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|=0$, то $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha=0\in\mathfrak{H}^*$. Мы можем поэтому предполагать, что $\Pi_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|\neq 0$, т. е. что $\|f_\alpha\|\neq 0$ и $\Pi_{\alpha\in I}1/\|f_\alpha\|$ сходится и не равно нулю. Тогда по лемме 2.4.1, (II) $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha-1|$ $(z_\alpha=1/\|f_\alpha\|>0)$ сходится. Применим теперь лемму 3.3.6, (III), (IV): $(z_\alpha f_\alpha;\alpha\in I)\in\mathfrak{C}$ и $\Pi\otimes_{\alpha\in I}z_\alpha f_\alpha=\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha\cdot\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha=[\Pi_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|]^{-1}\cdot\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$, следовательно, $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha=\Pi_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|\cdot\Pi\otimes_{\alpha\in I}z_\alpha f_\alpha$. Таким образом, вместо $f_\alpha$, $\alpha\in I$, мы можем рассматривать $C_0$-последовательность $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha\in I$. Но $\|z_\alpha f_\alpha\|=z_\alpha\|f_\alpha\|=1$. Итак, мы можем предполагать, что $\|f_\alpha\|=1$ для всех $\alpha\in I$.

Выберем некоторое $\delta$ $(0<\delta<1)$ и некоторое конечное множество $J=\mathfrak{E}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ попарно различны, так что $|(f_{\alpha_1},f^0_{\alpha_1})-1|+\dots+|(f_{\alpha_n},f^0_{\alpha_n})-1|>\sum_{\alpha\in I}|(f_\alpha,f^0_\alpha)-1|-\delta$, т. е. $\sum_{\alpha\in I-J}|(f_\alpha,f^0_\alpha)-1|\leqslant\delta$. Ясно, что произведение $\Pi_{\alpha\in I}(f_\alpha,f^0_\alpha)$ является сходящимся (не только квазисходящимся). Для любых попарно различных $\beta_1,\dots,\beta_m\in I-J$ имеем[24]

[24] Благодаря легко проверяемому неравенству $|z_1\cdot\ldots\cdot z_m-1|\leqslant\exp(|z_1-1|+\ldots+|z_m-1|)-1$.

$$|(f_{\beta_1}, f^0_{\beta_1})\cdot\ldots\cdot(f_{\beta_m}, f^0_{\beta_m}) - 1| \leqslant \exp(|(f_{\beta_1}, f^0_{\beta_1}) - 1| + \ldots + |(f_{\beta_m}, f^0_{\beta_m}) - 1|) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\sum_{\alpha\in I-J} |(f_\alpha, f^0_\alpha) - 1|\right) - 1 \leqslant e^\delta - 1 \leqslant e\delta.$$

Поэтому $|\Pi_{\alpha\in I-J}(f_\alpha, f^0_\alpha) - 1| \leqslant e\delta$.

Пусть теперь

$$g_\alpha = \begin{cases} f_\alpha & \text{для } \alpha\in J, \\ f^0_\alpha & \text{для } \alpha\in I - J. \end{cases}$$

Ясно, что $\Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha \in \mathfrak{H}^*$ и

$$\|\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha - \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha\|^2 = \|\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha\|^2 + \|\Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha\|^2 - 2\Re(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha,$$
$$\Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha) = (\Pi_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|)^2 - (\Pi_{\alpha\in I}\|g_\alpha\|)^2 - 2\Re(\Pi_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha)) =$$
$$= 1 + 1 - 2\Re(\Pi_{\alpha\in J}(f_\alpha, g_\alpha)\cdot\Pi_{\alpha\in I-J}(f_\alpha, g_\alpha)) = 2 - 2\Re(\Pi_{\alpha\in J}(f_\alpha, f_\alpha)\times$$
$$\times\Pi_{\alpha\in I-J}(f_\alpha, f^0_\alpha)) = 2 - 2\Re(\Pi_{\alpha\in I-J}(f_\alpha, f^0_\alpha)) =$$
$$= 2\Re(1 - \Pi_{\alpha\in I-J}(f_\alpha, f^0_\alpha)) \leqslant 2|\Pi_{\alpha\in I-J}(f_\alpha, f^0_\alpha) - 1| \leqslant 2e\delta,$$
$$\|\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha - \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha\| \leqslant \sqrt{2e\delta}.$$

Так как выбранное $\delta$, $0<\delta<1$, было произвольным, то это означает, что $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ является предельной точкой пространства $\mathfrak{H}^*$ и поэтому принадлежит $\mathfrak{H}^*$. Таким образом, доказательство завершено.

Лемма 4.1.3. *Если элемент $f_{\alpha_0}\in\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ и элементы $f_\alpha$, $\alpha\neq\alpha_0$, фиксированы при образовании $C$- (или даже $C_0$-) последовательности*[25], *то $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ есть линейная и непрерывная функция $f_{\alpha_0}$.*

Доказательство. Мы имеем, очевидно, что [26]

$$(zf_{\alpha_0})\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha = z(f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha),$$
$$(f_{\alpha_0} + g_{\alpha_0})\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha = f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha + g_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha,$$
$$\|f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha - g_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha\| =$$
$$= \|(f_{\alpha_0} - g_{\alpha_0})\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha\| =$$
$$= \|f_{\alpha_0} - g_{\alpha_0}\|\,\Pi_{\alpha\in I,\,\alpha\neq\alpha_0}\|f_\alpha\|.$$

Эти формулы доказывают все утверждения нашей леммы.

Лемма 4.1.4. *Рассмотрим некоторое $\mathfrak{C}\in\Gamma$. Выберем из $\mathfrak{C}$ какую-нибудь последовательность $f^0_\alpha$, $\alpha\in I$, с $\|f^0_\alpha\| = 1$ (см. лемму 3.3.7).*

---

[25] Ясно, что ни один из этих фактов не зависит от выбора $f_{\alpha_0}$.

[26] Для того чтобы иметь возможность отдельно обращаться с множителем $\alpha=\alpha_0$, запишем $\mathfrak{H}_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0}\mathfrak{H}_\alpha$ и $f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha$ вместо $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ соответственно.

*Пусть* $\aleph_\alpha$ — *размерность* $\mathfrak{H}_\alpha$. *Используем некоторое множество индексов* $K_\alpha$ *мощности* $\aleph_\alpha$ *и образуем полное ортонормированное множество* $\varphi_{\alpha,\beta}$, $\beta \in K_\alpha$, *в* $\mathfrak{H}_\alpha$. *Выберем его таким образом, чтобы* $0 \in K_\alpha$ *и* $\varphi_{\alpha,0} = f_\alpha^0$.

*Пусть* F — *множество функций* $\beta(\alpha)$, *определенных для всех* $\alpha \in I$ *и таких, что если* $\alpha \in I$, *то* $\beta(\alpha) \in K_\alpha$ *и* $\beta(\alpha) \neq 0$ *лишь для конечного множества элементов* $\alpha$. *Тогда если функции* $\beta(\alpha)$ *пробегают все* F, *то элементы* $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}$ *образуют полное ортонормированное множество в пространстве* $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{\alpha \in I} | \| \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)} \| - 1 | = \sum_{\alpha \in I} | 1 - 1 | = \sum_{\alpha \in I} 0$ сходится, то все последовательности $\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}$, $\alpha \in I$, являются $C_0$-последовательностями и, следовательно, все $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}$ существуют. Так как $\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)} \neq \varphi_{\alpha,0} = f_\alpha^0$, если только $\beta(\alpha) \neq 0$, т. е. для конечного числа элементов $\alpha$, то $(\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)};\ \alpha \in I) \approx (f_\alpha^0;\ \alpha \in I)$ (по лемме 3.3.5) и, следовательно, $(\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)};\ \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$, $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)} \in \Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$.

Далее, $(\Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}, \Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\gamma(\alpha)}) = \prod_{\alpha \in I} (\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}, \varphi_{\alpha,\gamma(\alpha)})$. Если $\beta(\alpha) = \gamma(\alpha)$ для всех $\alpha \in I$, то все множители справа равны единице, и, следовательно, это выражение равно единице. Если случится, что $\beta(\alpha) \neq \gamma(\alpha)$, то соответствующий множитель в правой части равен нулю, и, следовательно, это выражение обращается в нуль.

Таким образом, $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}$, $\beta(\alpha) \in$ F образуют ортонормированное множество в $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$. Осталось доказать его полноту. Пусть $\mathfrak{H}^*$ — замкнутое линейное множество, порожденное элементами $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}$, $\beta(\alpha) \in$ F. Мы должны доказать, что $\mathfrak{H}^*$ содержит $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$. Благодаря лемме 4.1.2 достаточно доказать, что оно содержит все такие элементы $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha \in \mathfrak{H}^*$, у которых $f_\alpha \neq f_\alpha^0$ лишь для конечного числа элементов $\alpha$.

Рассмотрим следующее утверждение $S_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$: если

$(\mathrm{I})_n$ число таких $\alpha \in I$, для которых $f_\alpha \neq \varphi_{\alpha,\beta}$ (для всех $\beta \in K_\alpha$), равно $n$ и если

(II) число таких $\alpha \in I$, для которых $f_\alpha \neq \varphi_{\alpha,0} = f_\alpha^0$, конечно,

то $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha \in \mathfrak{H}^*$.

Утверждение $S_0$ справедливо: если $f_\alpha$, $\alpha \in I$, удовлетворяет $(\mathrm{I})_0$, (II), то $f_\alpha = \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}$, $\beta(\alpha) \in$ F, следовательно, $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha = \Pi \otimes_{\alpha \in I} \varphi_{\alpha,\beta(\alpha)} \in \mathfrak{H}^*$. Предположим теперь, что $S_{n-1}$ имеет место для некоторого $n-1$, $n = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим $S_n$. Пусть последовательность $f_\alpha$, $\alpha \in I$, удовлетворяет соотношениям $(\mathrm{I})_n$, (II). Обозначим те $\alpha$, для которых $f_\alpha \neq \varphi_{\alpha,\beta}$, через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Спросим себя, для каких $g_{\alpha_n} \in \mathfrak{H}_{\alpha_n}$ вектор $g_{\alpha_n} \otimes \Pi \otimes_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_n} f_\alpha \in \mathfrak{H}^*$? Эти $g_{\alpha_n}$ образуют (см. лемму 4.1.3) замкнутое линейное пространство $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{H}_{\alpha_n}$, поскольку таковым является $\mathfrak{H}^*$. Каждое $\varphi_{\alpha_n,\beta} \in \mathfrak{R}$, так как мы предположили справедливость $S_{n-1}$. Следовательно, $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}_{\alpha_n}$, и в частности $f_{\alpha_n} \in \mathfrak{R}$. Таким образом, $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha = f_{\alpha_n} \otimes \Pi \otimes_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_n} f_\alpha \in \mathfrak{H}^*$, что доказывает $S_n$. Итак, все утверждения $S_n$ верны.

Пусть теперь $f_\alpha$, $\alpha \in I$, удовлетворяет только (II). Число элементов $\alpha \in I$ с $f_\alpha \neq \varphi_{\alpha,\beta}$ (они образуют подмножество в множестве тех $\alpha$, для которых

$f_\alpha \neq \varphi_{\alpha,0} = f^0_\alpha$) конечно (0, 1, 2, ...). Пусть $n$ — их число. Тогда имеет место $(\mathrm{I})_n$, и, следовательно, согласно $S_n$ мы имеем, что $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha \in \mathfrak{H}^*$. Но это есть в точности то, что было необходимо для завершения нашего доказательства.

Теорема V. *В обозначениях леммы 4.1.4 для* $\mathfrak{C}$, $f^0_\alpha$, $\aleph_\alpha$, $K_\alpha$, $\varphi_{\alpha,\beta}$ *и множества* F *функций* $\beta(\alpha)$ *существует взаимно однозначное соответствие между векторами* $\Phi \in \Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *и наборами коэффициентов* $a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]$, *такими, что*:

(I) $a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]$ *определено для функций* $\beta(\alpha)\in$ F *и только для них и принимает значение в множестве комплексных чисел*[27];

(II) $\sum_{\beta(\alpha)\in F} |a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]|^2$ *сходится.*

*Это соответствие устанавливается следующими уравнениями*:

$$(1)\quad a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I] = (\Phi, \Pi\otimes_{\alpha\in I}\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}) = \Phi(\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)};\ \alpha\in I).$$

*Если элементам* $\Phi, \Psi$ *сопоставлены соответственно наборы* $a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]$, $b[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]$, *то*

$$(2)\quad (\Phi, \Psi) = \sum_{\beta(\alpha)\in F} a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]\cdot\overline{b[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]}$$

$\left(\sum_{\beta(\alpha)\in F}\right.$ *сходится*$\left.\right)$.

Доказательсто. Элементы $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)}$, $\beta(\alpha)\in$ F, образуют по лемме 4.1.4 полное ортонормированное множество в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Поэтому первое уравнение определяет взаимно однозначное соответствие $\Phi\in\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ с $a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]$, такое, как предписано в (I), (II). Кроме того, имеет место уравнение (2) (см. соответствующие теоремы в [4, 12, 13, 15]). Второе уравнение в (1) совпадает с леммой 3.2.3.

Теорема V (или лемма 5.1.4, которой она практически эквивалентна) проясняет структуру $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, тогда как лемма 4.1.1 описывает, как $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ строится из $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}\in\Gamma$. Мы видим, в частности, что каждое $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ имеет ту же самую размерность — мощность F. Легко определить эту мощность с помощью $\aleph_\alpha$, $\alpha\in I$; мы сделаем это в некоторых специальных случаях (см. п.7.2). Размерность $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, очевидно, равна мощности Г, умноженной на мощность F. Мы еще раз вернемся к этому в лемме 6 4.1 и непосредственно за ней.

4.2. *Ассоциативный закон* имеет место для наших произведений лишь в ограниченной форме; особенно следует заметить, что он применим только к неполному тензорному произведению $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и не применим к полному тензорному произведению $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Что касается числа (мощности) сомножителей, то в этом, однако, нет ограничений [28]. Следующая теорема описывает ситуацию исчерпывающим образом.

Теорема VI. *Пусть* $I$ *есть множество индексов* $\alpha$, L — *множество индексов* $\gamma$ *и пусть для каждого* $\gamma\in$ L *дано множество* $I_\gamma$ *индексов* $\alpha$. *Допустим*,

---

[27] $a[\beta(\alpha);\ \alpha\in I]$ не зависит от $\alpha$-аргумента *функции* $\beta(\alpha)$.

[28] Из наших построений, в которых не возникало упорядочения $I$, ясно, что *коммутативный закон* справедлив без всяких ограничений.

*что множества* $I_\gamma$, $\gamma \in \mathrm{L}$, *попарно не пересекаются и их объединение есть* $I$. *Пусть для каждого* $\alpha \in I$ *задано гильбертово пространство* $\mathfrak{H}_\alpha$.

(I) *Если* $f_\alpha$, $\alpha \in I$, *есть* $C$- или $C_0$-*последовательность, то последовательность* $f_\alpha$, $\alpha \in I_\gamma$, *так же как и последовательность* $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha$, $\gamma \in \mathrm{L}$, является $C$- или $C_0$-*последовательностью соответственно. В случае* $C_0$-*последовательностей образуем классы эквивалентности* $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(f_\alpha; \alpha \in I)$ (*в* $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$), $\mathfrak{C}_\gamma = \mathfrak{C}(f_\alpha; \alpha \in I_\gamma)$ (*в* $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$), $\mathfrak{C}^0 = \mathfrak{C}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha; \gamma \in \mathrm{L})$ (*в* $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha)$).

(II) *Классы* $\mathfrak{C}_\gamma, \mathfrak{C}^0$ *зависят лишь от* $\mathfrak{C}$ (*и не зависят от частного выбора элементов* $f_\alpha$, $\alpha \in I$).

(III) *Существует, и притом единственный, изоморфизм пространств* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ ($\subset \Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$) *и* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$ ($\subset \Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$), *при котором* $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ *соответствует* $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha)$ *для всех* $C_0$-*последовательностей* $f_\alpha$, $\alpha \in I$, *из* $\mathfrak{C}$.

Доказательство. (I). Если $\Pi_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|$ сходится, то и все $\Pi_{\alpha\in I_\gamma}\|f_\alpha\|$ сходятся по лемме 2.4.1, (I), и если $\sum_{\alpha\in I}|\|f_\alpha\| - 1|$ сходится, то и все $\sum_{\alpha\in I_\gamma}|\|f_\alpha\| - 1|$ сходятся по лемме 2.3.1 (примененной к $I_\gamma \subset I$). Следовательно, $f_\alpha$, $\alpha \in I_\gamma$, являются соответственно $C$- или $C_0$-последовательностями вместе с $f_\alpha$, $\alpha \in I$. Таким образом, нужно обосновать только свойство соответственно $C$- или $C_0$-последовательности для $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha$, $\gamma \in \mathrm{L}$. Для любых попарно различных $\beta_1, \ldots, \beta_m \in I_\gamma$ имеем[29]

$$\max(\|f_{\beta_1}\| \cdot \ldots \cdot \|f_{\beta_m}\| - 1, 0) \leqslant \exp(\max(\|f_{\beta_1}\| - 1, 0) + \ldots + \max(\|f_{\beta_m}\| - 1, 0)) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{\alpha\in I_\gamma}\max(\|f_\alpha\| - 1, 0)\right) - 1 \leqslant e\sum_{\alpha\in I_\gamma}\max(\|f_\alpha\| - 1, 0),$$

если $\sum_{\alpha\in I_\gamma}\max(\|f_\alpha\| - 1, 0) \leqslant 1$. Таким образом,

$$\max(\|\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha\| - 1, 0) = \max\left(\prod_{\alpha\in I_\gamma}\|f_\alpha\| - 1, 0\right) \leqslant e\sum_{\alpha\in I_\gamma}\max(\|f_\alpha\| - 1, 0).$$

Теперь ясно, что для каждой $C$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, ряд

$$\sum_{\gamma\in\mathrm{L}}\left(\sum_{\alpha\in I_\gamma}\max(\|f_\alpha\| - 1, 0)\right) = \sum_{\alpha\in I}\max(\|f_\alpha\| - 1, 0)$$

сходится (по лемме 2.3.1), следовательно, $\sum_{\alpha\in I_\gamma}\max(\|f_\alpha\| - 1, 0) \leqslant 1$, за исключением конечного числа элементов $\gamma$. Поэтому приведенное выше неравенство обосновывает сходимость $\sum_{\gamma\in\mathrm{L}}\max(\|\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha\| - 1, 0)$ (ввиду леммы 2.3.1). Следовательно $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha$, $\gamma \in \mathrm{L}$, является также $C$-последовательностью.

---

[29] Ввиду легко проверяемого неравенства ($z_1, \ldots, z_m$ вещественны и неотрицательны)
$\max(z_1 \cdot \ldots \cdot z_m - 1, 0) \leqslant \exp(\max(z_1 - 1, 0) + \ldots + \max(z_m - 1, 0)) - 1.$

Далее, ввиду неравенства в примеч. 24

$$|\|f_{\beta_1}\| \cdot \ldots \cdot \|f_{\beta_m}\| - 1| \leqslant \exp(|\|f_{\beta_1}\| - 1| + \ldots + |\|f_{\beta_m}\| - 1|) - 1 \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\sum_{\alpha \in I_\gamma} |\|f_\alpha\| - 1|\right) - 1 \leqslant e \sum_{\alpha \in I_\gamma} |\|f_\alpha\| - 1|,$$

если $\sum_{\alpha \in I_\gamma} |\|f_\alpha\| - 1| \leqslant 1$. Таким образом,

$$|\|\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha\| - 1| = \left|\prod_{\alpha \in I_\gamma} \|f_\alpha\| - 1\right| \leqslant e \sum_{\alpha \in I_\gamma} |\|f_\alpha\| - 1|.$$

Для каждой $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, ряд

$$\sum_{\gamma \in L} \left(\sum_{\alpha \in I_\gamma} |\|f_\alpha\| - 1|\right) = \sum_{\alpha \in I} |\|f_\alpha\| - 1|$$

вновь сходится (по лемме 2.3.1). Итак, $\sum_{\alpha \in I_\gamma} |\|f_\alpha\| - 1| \leqslant 1$, за исключением конечного числа элементов $\gamma$. Наше неравенство влечет теперь сходимость $\sum_{\gamma \in L} |\|\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha\| - 1|$ (ввиду леммы 2.3.1). Следовательно, $\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha$, $\gamma \in L$, также является $C_0$-последовательностью.

(II). Мы должны доказать: если $(f_\alpha; \alpha \in I) \approx (g_\alpha; \alpha \in I)$, то $(f_\alpha; \alpha \in I_\gamma) \approx \approx (g_\alpha; \alpha \in I_\gamma)$ и $(\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha; \gamma \in L) \approx (\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} g_\alpha; \gamma \in L)$, т. е. если $\sum_{\alpha \in I} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|$ сходится, то $\sum_{\alpha \in I_\gamma} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|$ и $\sum_{\gamma \in I} |(\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} g_\alpha) - 1|$ сходятся. Первое утверждение очевидно. Что касается второго, то заметим, что мы имеем (точно так же, как в последней части доказательства (I)) для любых попарно различных $\beta_1, \ldots, \beta_m$

$$|(f_{\beta_1}, g_{\beta_1}) \cdot \ldots \cdot (f_{\beta_m}, g_{\beta_m}) - 1| \leqslant \exp(|(f_{\beta_1}, g_{\beta_1}) - 1| + \ldots + |(f_{\beta_m}, g_{\beta_m}) - 1|) -$$
$$- 1 \leqslant \exp\left(\sum_{\alpha \in I_\gamma} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|\right) - 1 \leqslant e \sum_{\alpha \in I_\gamma} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|,$$

если $\sum_{\alpha \in I_\gamma} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1| \leqslant 1$. Таким образом,

$$|(\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} g_\alpha) - 1| = \left|\prod_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha) - 1\right| \leqslant e \sum_{\alpha \in I_\gamma} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|.$$

Так как

$$\sum_{\gamma \in L} \left(\sum_{\alpha \in I_\gamma} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|\right) = \sum_{\alpha \in I} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|$$

сходится, то $\sum_{\alpha \in I_\gamma} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1| \leqslant 1$, за исключением конечного числа элементов $\gamma$. Наше неравенство обосновывает теперь сходимость

$$\sum_{\gamma \in L} |(\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} g_\alpha) - 1|.$$

(III). Рассмотрим уравнение

$$\prod_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha) = \prod_{\gamma \in L} \left(\prod_{\alpha \in I_\gamma} (f_\alpha, g_\alpha)\right) \qquad (*)$$

для двух $C_0$-последовательностей $(f_\alpha; \alpha \in I)$ и $(g_\alpha; \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$. По (I), (II) все эти произведения являются сходящимися (а не только квазисходящимися, ввиду леммы 2.4.1). Поэтому, как легко проверить, соотношение (*) справедливо [30].

Сопоставим теперь каждому элементу $\Pi\otimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ $((f_\alpha; \alpha \in I) \in \mathfrak{C})$ элемент $\Pi\otimes_{\gamma \in L} (\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha)$ в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\alpha \in L} (\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha \in I_\gamma} \mathfrak{H}_\alpha)$ (мы имеем $(f_\alpha; \alpha \in I_\gamma) \in \mathfrak{C}_\gamma$, $(\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha; \gamma \in L) \in \mathfrak{C}^0$). Согласно (*) это соответствие оставляет $(\Phi, \Psi)$ инвариантным. Поэтому оно единственным образом продолжается (в точности так же, как в доказательстве необходимости теоремы IV) до изоморфизма замкнутых линейных пространств, порожденных соответственно $\Pi\otimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ и $\Pi\otimes_{\gamma \in L} (\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha)$. Первое пространство есть, по определению, $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$; обозначим второе через $\overline{\mathfrak{H}}$. Итак мы должны доказать только, что $\overline{\mathfrak{H}} = \Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma \in L} (\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha \in I_\gamma} \mathfrak{H}_\alpha)$. Но $\subset$ очевидно, следовательно, нам нужно показать только $\supset$.

По (II) мы можем использовать любую последовательность $(f_\alpha; \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$, следовательно, мы вправе предполагать, что все $\|f_\alpha\| = 1$ (ввиду леммы 3.3.7). Выберем полное ортонормированное множество $\varphi_{\alpha,\beta}$, $\beta \in K_\alpha$, в каждом $\mathfrak{H}_\alpha$ с $0 \in K_\alpha$, $\varphi_{\alpha,0} = f_\alpha$. Пусть $F_\gamma$ есть множество всех функций $\beta(\gamma, \alpha)$, определенных для $\alpha \in I_\gamma$, $\beta(\gamma, \alpha) \in K_\alpha$ и не равных нулю только для конечного числа элементов $\alpha$ $(\alpha \in I_\gamma)$, все это при фиксированном $\gamma \in L$. Тогда $(\varphi_{\alpha,0}; \alpha \in I_\gamma) = (f_\alpha; \alpha \in I_\gamma) \in \mathfrak{C}_\gamma$ и можно применить лемму 4.1.4 к $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha \in I_\gamma} \mathfrak{H}_\alpha$: элементы $\Phi_{\gamma,\beta(\gamma,\alpha)} = \Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} \varphi_{\alpha,\beta(\gamma,\alpha)}$, $\beta(\gamma, \alpha) \in F_\gamma$, образуют в нем полное ортонормированное множество.

Обозначим функцию $\beta(\gamma, \alpha) = 0$ (для всех $\alpha \in I_\gamma$) через 0, тогда $\Phi_{\gamma,0} = \Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} \varphi_{\alpha,0} = \Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha$. Пусть $F^0$ есть множество всех функций $\beta^0(\gamma)$, определенных для $\gamma \in L$, $\beta^0(\gamma) \in F_\gamma$, которые не равны нулю лишь для конечного множества элементов $\gamma$ $(\gamma \in L)$. Так как $\beta^0(\gamma)$ есть в действительности функция от $\alpha$, $\alpha \in I_\gamma$, мы предпочитаем записывать ее в виде $\beta^0(\gamma, \alpha)$. $(\Phi_{\gamma,0}; \gamma \in L) = (\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} \varphi_{\alpha,0}; \gamma \in L) = (\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} f_\alpha; \gamma \in L) \in \mathfrak{C}^0$. Сейчас опять может быть применена лемма 4.1.4, теперь к $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma \in L} (\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha \in I_\gamma} \mathfrak{H}_\alpha)$: элементы $\Pi\otimes_{\gamma \in L} \Phi_{\gamma,\beta^0(\gamma,\alpha)} = \Pi\otimes_{\gamma \in L} (\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} \varphi_{\alpha,\beta^0(\gamma,\alpha)})$ образуют полное ортонормированное множество в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma \in L} (\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha \in I_\gamma} \mathfrak{H}_\alpha)$.

Далее, мы имеем $\beta^0(\gamma) = 0$, т. е. $\beta^0(\gamma, \alpha) = 0$ для всех $\alpha \in I_\gamma$, за исключением конечного числа элементов $\gamma \in L$. Для оставшихся $\gamma$ $\beta^0(\gamma) \in F_\gamma$, следовательно, вновь $\beta^0(\gamma, \alpha) = 0$, за исключением конечного числа элементов $\alpha$ (элемент $\gamma$ фиксирован). Таким образом, $\beta^0(\gamma, \alpha) = 0$ всегда, кроме конечного числа элементов $\alpha$ (элемент $\gamma$ не фиксирован). Так как область элементов $\alpha$ в $\beta^0(\gamma, \alpha)$ есть $I_\gamma$ и так как множества $I_\gamma$, $\gamma \in L$, попарно не пересекаются, то мы можем записать $\beta^0(\gamma, \alpha)$ как функцию только от $\alpha$: $\beta^0(\alpha)$, $\alpha \in I$. Следовательно, элементы $\Pi\otimes_{\gamma \in L} (\Pi\otimes_{\alpha \in I_\gamma} \varphi_{\alpha,\beta^0(\alpha)})$, у которых $\beta^0(\alpha) = 0$, за исключением конечного

[30] Это было бы не так в случае квазисходимости. Например, $\Pi_{\alpha \in \mathfrak{S}(1,2,\ldots)}(-1) = 0$ (квазисходимость), в то время как $\Pi_{\gamma \in \mathfrak{S}(1,2,\ldots)} (\Pi_{\alpha \in \mathfrak{S}(2\gamma-1,2\gamma)} (-1)) = \Pi_{\gamma \in \mathfrak{S}(1,2,\ldots)} 1 = 1$.

числа $\alpha$, образуют полное ортонормированное множество в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma\in L}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$. Таким образом, $\varphi_{\alpha,\beta^0(\alpha)}=\varphi_{\alpha,0}=f_\alpha$ с теми же исключениями и поэтому $(\varphi_{\alpha,\beta^0(\alpha)}; \alpha\in I)\approx(f_\alpha; \alpha\in I)$ (по лемме 3.3.5). Поэтому $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\varphi_{\alpha,\beta(\alpha)})\in\overline{\mathfrak{H}}$, и так как $\overline{\mathfrak{H}}$ — замкнутое линейное множество, то отсюда следует, что $\overline{\mathfrak{H}}\supset\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma\in L}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$. Это завершает доказательство того, что $\overline{\mathfrak{H}}=\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma\in L}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$.

Мы уже знаем, что наш изоморфизм отображает $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ на $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}f_\alpha)$. Его единственность (при этом ограничении) очевидна из его построения.

Заметим, что ассоциативный закон не может быть обобщен на полные тензорные произведения $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$, когда L бесконечно, по двум причинам.

Во-первых, различные классы $\mathfrak{C}$ могут приводить к одинаковым $\mathfrak{C}_\gamma$ и $\mathfrak{C}^0$: положим $L=\mathfrak{S}(1,2,\ldots)$, $I=\mathfrak{S}(1,2,\ldots)$, $I_\gamma=\mathfrak{S}(2\gamma-1,2\gamma)$ (см. примеч. 30). Выберем в каждом $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha\in I$, некоторые $f_\alpha\in\mathfrak{H}_\alpha$ с $\|f_\alpha\|=1$ и положим $g_\alpha=-f_\alpha$. Тогда $f_\alpha$, $\alpha\in I$, и $g_\alpha$, $\alpha\in I$, есть, очевидно, две неэквивалентные $C_0$-последовательности для $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, но они эквивалентны для каждого $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ ($I_\gamma$ **конечно**), и так как $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}f_\alpha=f_{2\gamma-1}\otimes f_{2\gamma}$, $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}g_\alpha=g_{2\gamma-1}\otimes g_{2\gamma}=(-f_{2\gamma-1})\otimes(-f_{2\gamma})=f_{2\gamma-1}\otimes f_{2\gamma}$, то $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}f_\alpha$, $\gamma\in L$, и $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}g_\alpha$, $\gamma\in L$, также эквивалентны (для $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$). Таким образом, $\mathfrak{C}\neq\mathfrak{D}$, но $\mathfrak{C}_\gamma=\mathfrak{D}_\gamma$ и $\mathfrak{C}^0=\mathfrak{D}^0$ (нужно, однако, признать, что это явление вызвано нашим способом введения квазисходимости в определении 2.5.1, (II)).

Во-вторых, $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$ может содержать такие классы эквивалентности $\mathfrak{C}^0=\mathfrak{C}^0(\Phi_\gamma; \gamma\in L)$, для которых элементы $\Phi_\gamma\in\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ не могут быть выбраны в виде $\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}f_\alpha$. Это явление будет иметь решающее значение в п.7.3.

Эти сложности не возникают, однако, если множество L конечно ($I_\gamma$ могут быть произвольны).

Теорема VII. *Если множество* L *конечно, то изоморфизм, упоминавшийся в теореме* VI, (III), *может быть продолжен до единственного изоморфизма пространства* $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *и* $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$.

Доказательство. Так как L конечно, то существует только один класс эквивалентности $\mathfrak{C}^0$ для $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$ (см. второе замечание в конце п.3.6). Таким образом, теорема VI, (III) устанавливает изоморфизм между $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}^0}_{\gamma\in L}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)=\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$.

Так как L конечно, то ряд $\sum_{\alpha\in I}|(f_\alpha,g_\alpha)-1|$ сходится тогда и только тогда, когда все ряды $\sum_{\alpha\in I_\gamma}|(f_\alpha,g_\alpha)-1|$, $\gamma\in L$, сходятся (по лемме 2.3.1). Таким образом, при изменении класса эквивалентности $\mathfrak{C}$ меняется по меньшей мере один из классов эквивалентности $\mathfrak{C}_\gamma$, $\gamma\in L$. С другой стороны, любая возможная комбинация $\mathfrak{C}_\gamma$, $\gamma\in L$, принадлежит $\mathfrak{C}\in\Gamma$: выберем все представители

множества $f_\alpha$ с $\|f_\alpha\| = 1$ (используется лемма 3.3.7). Следовательно, $\mathfrak{C}$ и все комбинации $\mathfrak{C}_\gamma$, $\gamma \in \mathrm{L}$, находятся во взаимно однозначном соответствии.

Пространства $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ попарно ортогональны, так же как и $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ (по лемме 4.1.1). Таким образом, $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$ также попарно ортогональны. Поэтому изоморфизмы различных $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ с их $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$ продолжаются единственным образом до изоморфизма замкнутых линейных множеств, порожденных соответственно $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$. Первое множество есть $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (по лемме 4.1.1), второе обозначим через $\bar{\mathfrak{H}}$. Итак, мы должны только доказать, что $\bar{\mathfrak{H}} = \Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$. Но $\subset$ очевидно, следовательно, нам нужно показать только $\supset$. Это будет установлено, если мы докажем, что $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}\Phi_\gamma \in \bar{\mathfrak{H}}$ для любого $\Phi_\gamma \in \Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$, $\gamma \in \mathrm{L}$.

L есть конечное множество, пусть $\mathrm{L} = \mathfrak{S}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ попарно различны. Рассмотрим теперь следующее утверждение $R_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots, m)$: если $\Phi_\gamma \in \Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ для $\gamma \in \mathrm{L}$, а для $\gamma = \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_m$ даже $\Phi_\gamma \in \Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ ($\mathfrak{C}_\gamma$ произвольны), то $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}\Phi_\gamma \in \bar{\mathfrak{H}}$.

Утверждение $R_0$ справедливо: $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}\Phi_\gamma \in \Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha) \subset \bar{\mathfrak{H}}$. Предположим теперь, что $R_{n-1}$ имеет место для некоторого $n-1$, $n = 1, 2, \dots, m$, и рассмотрим $R_n$. Выберем некоторое $\Phi_\gamma \in \Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ для $\gamma \in \mathrm{L}$ с $\Phi_\gamma \in \Pi\otimes^{\mathfrak{C}_\gamma}_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ для $\gamma = \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_m$. Спросим себя: для каких $\Psi_{\gamma_n} \in \Pi\otimes_{\alpha\in I_{\gamma_n}}\mathfrak{H}_\alpha$ элемент $\Psi_{\gamma_n} \otimes \otimes \Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L},\gamma\neq\gamma_n}\Phi_\gamma \in \bar{\mathfrak{H}}$? Эти $\Psi_{\gamma_n}$ образуют замкнутое линейное множество $\mathfrak{R}$ в $\Pi\otimes_{\alpha\in I_{\gamma_n}}\mathfrak{H}_\alpha$, учитывая лемму 4.1.3 и то, что таковым является $\bar{\mathfrak{H}}$. Каждое $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_{\gamma_n}}_{\alpha\in I_{\gamma_n}}\mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{R}$, так как мы предположили истинность $R_{n-1}$. Следовательно, $\mathfrak{R} = \Pi\otimes_{\alpha\in I_{\gamma_n}}\mathfrak{H}_\alpha$ (по лемме 4.1.1), и в частности $\Phi_{\gamma_n} \in \mathfrak{R}$, т. е. $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma_n} \otimes \otimes \Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L},\gamma\neq\gamma_n}\Phi_\gamma \in \bar{\mathfrak{H}}$, доказывая $R_n$. Таким образом, все утверждения $R_n$ справедливы.

Но $R_m$ утверждает следующее: если $\Phi_\gamma \in \Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha$ для $\gamma \in \mathrm{L}$, то $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}\Phi_\gamma \in \bar{\mathfrak{H}}$, и это завершает доказательство.

# Часть III
# КОЛЬЦА ОПЕРАТОРОВ В ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

## Глава 5
## ПРОДОЛЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ И ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

5.1. Теперь мы хотим изучить связь операторов в различных $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha \in I$, с операторами в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Мы будем обозначать кольцо всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}_\alpha$ через $\mathcal{B}_\alpha$, а кольцо таких операторов в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ — через $\mathcal{B}_\otimes$ (см. [7, с. 135]).

Лемма 5.1.1. *Если дан оператор $A_{\alpha_0} \in \mathcal{B}_{\alpha_0}$, то существует единственный оператор $\overline{A}_{\alpha_0} \in \mathcal{B}_\otimes$, такой, что для всех C-последовательностей $f_\alpha$, $\alpha \in I$,*

$$\overline{A}_{\alpha_0}(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha) = \overline{A}_{\alpha_0}(f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha) = (A_{\alpha_0} f_{\alpha_0})\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha.$$

Доказательство. Значения $\overline{A}_{\alpha_0}$ заданы для каждого $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$, следовательно, если $\overline{A}_{\alpha_0} \in \mathcal{B}_\otimes$ вообще существует, то его значения единственным образом определяются в замкнутом линейном множестве, порожденном $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$, которое есть $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Таким образом, если оператор $\overline{A}_{\alpha_0} \in \mathcal{B}_\otimes$ существует, то он единствен.

Если $f_\alpha$, $\alpha \in I$, есть $C$-последовательность, но не $C_0$-последовательность, то таковой является и последовательность $A_{\alpha_0} f_{\alpha_0}$ и $f_\alpha$, $\alpha \in I$, $\alpha \neq \alpha_0$. Следовательно, $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha = 0$ и $(A_{\alpha_0} f_{\alpha_0})\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha = 0$ и наши требования на $\overline{A}_{\alpha_0}$ становятся в этом случае бессодержательными.

Таким образом, мы должны доказать лишь существование оператора $\overline{A}_{\alpha_0} \in \mathcal{B}_\otimes$, и нам необходимо рассматривать только $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha\in I$.

Применим теорему VII при $L = \mathfrak{S}(1, 2)$, $I_1 = \mathfrak{S}(\alpha_0)$, $I_2 = I - \mathfrak{S}(\alpha_0)$. Мы имеем изоморфизм между $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_{\alpha_0}\otimes\prod_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha$ и $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathfrak{S}(1,2)}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha) = \mathfrak{H}_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I-\mathfrak{S}(\alpha_0)}\mathfrak{H}_\alpha$ [31], при котором элемент $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha = f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha$ соответствует элементу $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathfrak{S}(1,2)}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma} f_\alpha) = f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I-\mathfrak{S}(\alpha_0)} f_\alpha$ (см. примеч. 31) для всех $C_0$-последовательностей $f_\alpha$, $\alpha \in I$. Таким образом, если наша лемма имеет место для $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathfrak{S}(1,2)}\mathfrak{G}_\gamma$, где $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$, $\mathfrak{G}_2 = \Pi\otimes_{\alpha\in I-\mathfrak{S}(\alpha_0)}\mathfrak{H}_\alpha$ ($\alpha_0$ заменяется на 1), то она имеет место также и для $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Другими словами, мы можем предполагать, что $I = \mathfrak{S}(1, 2)$, $\alpha_0 = 1$.

Пусть $\varphi_\rho$, $\rho \in K$, есть полное ортонормированное множество в $\mathfrak{H}_2$. Мы хотим иметь оператор $\overline{A}_1 \in \mathcal{B}_\otimes$, такой, что

$$\overline{A}_1(f_1\otimes f_2) = (A_1 f_1)\otimes f_2 \tag{*}$$

---

[31] Заметим, что $\mathfrak{H}_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0}\mathfrak{H}_\alpha$ есть только другая запись $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (см. примеч. 26), в то время как $\mathfrak{H}_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I-\mathfrak{S}(\alpha_0)}\mathfrak{H}_\alpha$ обозначает совсем другой объект. Но теорема VII устанавливает их изоморфность.

для всех $f_1 \in \mathfrak{H}_1$, $f_2 \in \mathfrak{H}_2$. Достаточно обеспечить (*) только для $f_2 = \varphi_\rho$, $\rho \in K$: при фиксированном $f_1 \in \mathfrak{H}_1$ те $f_2 \in \mathfrak{H}_2$, для которых имеет место (*), образуют замкнутое линейное множество в $\mathfrak{H}_2$ (по лемме 4.1.3), и так как оно содержит все $\varphi_\rho$, $\rho \in K$, то оно равно $\mathfrak{H}_2$.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{H}'$ всех конечных линейных комбинаций $f_1^{(1)} \otimes \varphi_{\rho_1} + \ldots + f_1^{(n)} \otimes \varphi_{\rho_n}$ ($f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)} \in \mathfrak{H}_1$, $\rho_1, \ldots, \rho_n \in K$ попарно различны). Замкнутое линейное множество, порожденное $\mathfrak{H}'$, содержит все $f_1 \otimes \varphi_\rho$ и, следовательно, (по лемме 4.1.3) все $f_1 \otimes f_2$, поэтому оно есть $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$. Но $\mathfrak{H}'$ есть линейное множество, поэтому оно должно быть плотно в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$.

Определим теперь оператор ${}^-A_1^-$ в $\mathfrak{H}'$ с помощью равенства

$$ {}^-A_1^-(f_1^{(1)} \otimes \varphi_{\rho_1} + \ldots + f_1^{(n)} \otimes \varphi_{\rho_n}) = (A_1 f_1^{(1)}) \otimes \varphi_{\rho_1} + \ldots + (A_1 f_1^{(n)}) \otimes \varphi_{\rho_n}. \qquad (**) $$

${}^-A_1^-$, очевидно, линеен. Так как $A_1 \in \mathcal{B}_1$, то существует некоторое $C$, такое, что всегда $\| A_1 f_1 \|_1 \leqslant C \| f_1 \|_1$. Теперь, так как слагаемые обеих частей попарно ортогональны ($\rho_1, \ldots, \rho_n$ попарно различны), (**) дает, что

$$ \| {}^-A_1^-(f_1^{(1)} \otimes \varphi_{\rho_1} + \ldots + f_1^{(n)} \otimes \varphi_{\rho_n}) \|^2 = \| (A_1 f_1^{(1)}) \otimes \varphi_{\rho_1} + \ldots + (A_1 f_1^{(n)}) \otimes \varphi_{\rho_n} \|^2 = $$
$$ = \| (A_1 f_1^{(1)}) \otimes \varphi_{\rho_1} \|^2 + \ldots + \| (A_1 f_1^{(n)}) \otimes \varphi_{\rho_n} \|^2 = \| A_1 f_1^{(1)} \|^2 \| \varphi_{\rho_1} \|^2 + \ldots $$
$$ \ldots + \| A_1 f_1^{(n)} \|^2 \| \varphi_{\rho_n} \|^2 = \| A_1 f_1^{(1)} \|^2 + \ldots + \| A_1 f_1^{(n)} \|^2 \leqslant C^2 (\| f_1^{(1)} \|^2 + \ldots + \| f_1^{(n)} \|^2), $$
$$ \| f_1^{(1)} \otimes \varphi_{\rho_1} + \ldots + f_1^{(n)} \otimes \varphi_{\rho_n} \|^2 = \| f_1^{(1)} \otimes \varphi_{\rho_1} \|^2 + \ldots + \| f_1^{(n)} \otimes \varphi_{\rho_n} \|^2 = $$
$$ = \| f_1^{(1)} \|^2 \| \varphi_{\rho_1} \|^2 + \ldots + \| f_1^{(n)} \|^2 \| \varphi_{\rho_n} \|^2 = \| f_1^{(1)} \|^2 + \ldots + \| f_1^{(n)} \|^2, $$

т. е. для всех $\Phi \in \mathfrak{H}'$

$$ \| {}^-A_1^- \Phi \|^2 \leqslant C^2 \| \Phi \|^2, \quad \| {}^-A_1^- \Phi \| \leqslant C \| \Phi \|. $$

Это соотношение вместе с линейностью ${}^-A_1^-$ и тем фактом, что $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, гарантирует существование замыкания $\overline{A}_1 \in \mathcal{B}_\otimes$ оператора ${}^-A_1^-$ (см. [10, с. 296]). Теперь

$$ \overline{A}_1 (f_1 \otimes \varphi_\rho) = {}^-A_1^- (f_1 \otimes \varphi_\rho) = (A_1 f_1) \otimes \varphi_\rho, $$

что и есть требуемый частный случай (*). Таким образом, доказательство завершено.

Определение 5.1.1. *Обозначим множество* $\{\overline{A}_{\alpha_0},\ A_{\alpha_0} \in \mathcal{B}_{\alpha_0}\}$ *через* $\overline{\mathcal{B}}_{\alpha_0} (\subset \mathcal{B}_\otimes)$. *Мы будем называть* $\overline{A}_{\alpha_0}$ *продолжением* $A_{\alpha_0}$.

Лемма 5.1.2. *Соответствие* $A_{\alpha_0} \leftrightarrow \overline{A}_{\alpha_0}$ *является взаимно однозначным отображением* $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ *на* $\overline{\mathcal{B}}_{\alpha_0}$, *изоморфным относительно операций* $uA$ ($u$ — *произвольное комплексное число*), $A^*$ (*сопряжение*), $A + B$, $AB$. *Оно переводит операторы* $0_{\alpha_0}$, $1_{\alpha_0}$ (*нуль и единицу в* $\mathcal{B}_{\alpha_0}$) *в* $0_\otimes$, $1_\otimes$ (*нуль и единицу в* $\mathcal{B}_\otimes$).

Доказательство. *Взаимная однозначность.* Из того, что $A_{\alpha_0} = B_{\alpha_0}$, следует, очевидно, что $\overline{A}_{\alpha_0} = \overline{B}_{\alpha_0}$. Предположим обратное, что $\overline{A}_{\alpha_0} = \overline{B}_{\alpha_0}$. Выбе-

рем некоторое $f_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$, $\|f_\alpha\| = 1$, для каждого $\alpha \in I$, $\alpha \neq \alpha_0$. Тогда для любого $f_{\alpha_0} \in \mathfrak{H}_{\alpha_0}$, $f_\alpha$, $\alpha \in I$, есть $C_0$-последовательность, и

$$0 = \| \overline{A}_{\alpha_0} (\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha) - \overline{B}_{\alpha_0} (\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha) \| = \| (A_{\alpha_0} f_{\alpha_0}) \otimes \Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha -$$
$$- (B_{\alpha_0} f_{\alpha_0}) \otimes \Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha \| = \| (A_{\alpha_0} f_{\alpha_0} - B_{\alpha_0} f_{\alpha_0}) \otimes \Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha \| = \| A_{\alpha_0} f_{\alpha_0} -$$
$$- B_{\alpha_0} f_{\alpha_0} \| \prod_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} \| f_\alpha \| = \| A_{\alpha_0} f_{\alpha_0} - B_{\alpha_0} f_{\alpha_0} \|.$$

Следовательно, $A_{\alpha_0} f_{\alpha_0} = B_{\alpha_0} f_{\alpha_0}$, и так как $f_{\alpha_0} \in \mathfrak{H}_{\alpha_0}$ был произвольный элемент, то $A_{\alpha_0} = B_{\alpha_0}$.

Изоморфизм относительно $uA$, $A + B$, $AB$, 0, 1 очевиден.

Докажем изоморфизм относительно $A^*$. Для любых двух $C$-последовательностей $f_\alpha$, $\alpha \in I$, и $g_\alpha$, $\alpha \in I$, имеем:

$$((\overline{A_{\alpha_0}})^* \Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha) = ((A_{\alpha_0})^* f_{\alpha_0} \otimes \Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha, \quad g_{\alpha_0} \otimes \Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} g_\alpha) =$$
$$= ((A_{\alpha_0})^* f_{\alpha_0}, g_{\alpha_0}) \prod_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} (f_\alpha, g_\alpha) = (f_{\alpha_0}, A_{\alpha_0} g_{\alpha_0}) \prod_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} (f_\alpha, g_\alpha),$$

$$((\overline{A}_{\alpha_0})^* \Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha) = (\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \overline{A}_{\alpha_0} \Pi\otimes_{\alpha\in I} g_\alpha) =$$
$$= (f_{\alpha_0} \otimes \Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} f_\alpha, A_{\alpha_0} g_{\alpha_0} \otimes \Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} g_\alpha) = (f_{\alpha_0}, A_{\alpha_0} g_{\alpha_0}) \prod_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0} (f_\alpha, g_\alpha).$$

Таким образом, если оба $\Phi, \Psi$ имеют вид $\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$, то $((\overline{A_{\alpha_0}})^* \Phi, \Psi) = ((\overline{A}_{\alpha_0})^* \Phi, \Psi)$. По непрерывности это равенство продолжается на все $\Phi$, $\Psi \in \Pi\otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Следовательно, всегда $(\overline{A_{\alpha_0}})^* \Phi = (\overline{A}_{\alpha_0})^* \Phi$ и $\overline{(A_{\alpha_0})^*} = (\overline{A}_{\alpha_0})^*$.

5.2. Наша следующая задача состоит в изучении изоморфизма $A_{\alpha_0} \leftrightarrow \overline{A}_{\alpha_0}$ колец операторов. Ввиду этого нам будет необходимо использовать некоторые понятия и утверждения, введенные и обоснованные в работах [9, 11]. В этих статьях рассматривались сепарабельные пространства, но в большинстве случаев сепарабельность не использовалась. Поэтому необходимо обсудить, как применять эти понятия и утверждения для произвольных гильбертовых пространств.

Мы будем использовать различные операторные топологии: «слабую», «сильную» (см. [9, с. 378—388]) и «сильнейшую» (см. [11, с. 111—112]); см. обсуждение в п. 1.1, (д). Понятие кольца будет использоваться в том же смысле, что и в работе [9, с. 388, определение 1): кольцо есть подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ (т. е. множество ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$), содержащее $uA$, $A^*$, $A + B$, $AB$ вместе с $A$, $B$ и являющееся «слабо» замкнутым. Последнее условие может быть эквивалентным образом заменено на «сильную» и даже на «сильнейшую» замкнутость (в предположении предыдущих алгебраических условий): доказательство, данное в [9, с. 393—396; 11, с. 112—113], дословно проходит для любого гильбертова пространства.

Для любого подмножества $\mathcal{C}$ в $\mathcal{B}$ мы опять определим $\mathcal{C}'$ как множество тех $A \in \mathcal{B}$, которые коммутируют с $B, B^*$ для $B \in \mathcal{C}$. Рассмотрения работы [9] на с. 388—398 применимы дословно, в то время как рассуждения на с. 398—404 (об абелевых кольцах) используют сепарабельность и поэтому неприменимы [32].

[32] Это, по-видимому, единственная часть общей теории, где сепарабельность $\mathfrak{H}$ существенна.

Таким образом, $\mathscr{C}'$ всегда есть кольцо, содержащее 1, и $\mathscr{C}''=\mathscr{C}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{C}$ есть кольцо, содержащее 1.

Пусть $I$ опять есть произвольное множество индексов, каждое $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha \in I$, — гильбертово пространство, $\alpha_0$ — фиксированный элемент в $I$.

Лемма 5.2.1. *$\overline{\mathscr{B}}_{\alpha_0}$ есть кольцо, содержащее* 1.

Доказательство[33]. Будем действовать так же, как и в доказательстве леммы 5.1.1: применим теорему VII, полагая $\mathrm{L}=\mathfrak{S}(1, 2)$, $I_1=\mathfrak{S}(\alpha_0)$, $I_2=I-\mathfrak{S}(\alpha_0)$. В силу этой теоремы мы имеем изоморфизм пространств $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha=\mathfrak{H}_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0}\mathfrak{H}_\alpha$ и $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathfrak{S}(1,2)}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)=\mathfrak{H}_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I-\mathfrak{S}(\alpha_0)}\mathfrak{H}_\alpha$, устанавливающий соответствие между $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha=f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0}f_\alpha$ и $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathfrak{S}(1,2)}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}f_\alpha)=f_{\alpha_0}\otimes\Pi\otimes_{\alpha\in I-\mathfrak{S}(\alpha_0)}f_\alpha$ для всех $C_0$-последовательностей $f_\alpha$, $\alpha\in I$ (см. примеч. 31). Таким образом, если наша лемма справедлива для $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathfrak{S}(1,2)}\mathfrak{G}_\gamma$, где $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{H}_{\alpha_0}$, $\mathfrak{G}_2=\Pi\otimes_{\alpha\in I,\alpha\neq\alpha_0}\mathfrak{H}_\alpha$ ($\alpha_0$ заменяется на 1), то она справедлива и для $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Другими словами, мы можем предполагать, что $I=\mathfrak{S}(1, 2)$, $\alpha_0=1$.

Если $A_1\in\mathscr{B}_1$, $A_2\in\mathscr{B}_2$, то $\overline{A}_1\overline{A}_2\Phi=\overline{A}_2\overline{A}_1\Phi$ для $\Phi=f_1\otimes f_2$ (оба равны $A_1f_1\otimes A_2f_2$) и, следовательно, для каждого $\Phi\in\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$. Таким образом, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ коммутируют, т. е. $\overline{\mathscr{B}}_1\subset(\overline{\mathscr{B}}_2)'$.

Предположим теперь обратное: $A\in(\overline{\mathscr{B}}_2)'$. Рассмотрим произвольный вектор $f_2\in\mathfrak{H}_2$, $\|f_2\|=1$, и оператор $P_{[f_2]}\in\mathscr{B}_2$[34]. Тогда оператор $E=\overline{P_{[f_2]}}\in\overline{\mathscr{B}}_2$ и для каждого вектора $\Phi=g_1\otimes g_2$

$$E\Phi=\overline{P}_{[f_2]}g_1\otimes g_2=g_1\otimes P_{[f_2]}g_2=g_1\otimes(g_2, f_2)f_2=(g_2, f_2)g_1\otimes f_2,$$

следовательно, вектор $E\Phi$ имеет вид $h_1\otimes f_2$. Таким образом, это свойство имеет место для каждого $\Phi\in\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$. Обратно, если $\Phi=h_1\otimes f_2$, то приведенная выше формула дает $E\Phi=h_1\otimes f_2=\Phi$. Отсюда $E$ есть проекция на замкнутое линейное множество элементов $h_1\otimes f_2$, $h_1\in\mathfrak{H}_1$. Теперь $A$ коммутирует с введенным оператором $E\in\overline{\mathscr{B}}_2$ по предположению, следовательно, $A(h_1\otimes f_2)$ имеет вновь такой же вид, скажем $h_1'\otimes f_2$; $h_1'$ может зависеть от $h_1$ и $f_2$.

Рассмотрим далее любой другой вектор $\hat{f}_2\in\mathfrak{H}_\alpha$, $\|\hat{f}_2\|=1$; тогда $A(h_1\otimes\hat{f}_2)=\hat{h}_1'\otimes\hat{f}_2$. Выберем какой-то оператор $U_2\in\mathscr{B}_2$ с $U_2f_2=\hat{f}_2$. Тогда $\overline{U}_2\in\overline{\mathscr{B}}_2$ следовательно, $A$ коммутирует с $\overline{U}_2$ по предположению. Но $\overline{U}_2(h_1\otimes f_2)=h_1\otimes U_2f_2=h_1\otimes\hat{f}_2$, $\overline{U}_2(h_1'\otimes f_2)=h_1'\otimes U_2f_2=h_1'\otimes\hat{f}_2$ поэтому $h_1'\otimes\hat{f}_2=\hat{h}_1'\otimes\hat{f}_2$, $(h_1'-\hat{h}_1')\otimes\hat{f}_2=0$, и, таким образом, (переходя к норме $\|\ldots\|$) $h_1'-\hat{h}_1'=0$. Следовательно, $h_1'$ не зависит от $f_2$. Поэтому можно определить оператор $A_1$, по-

---

[33] $\overline{\mathscr{B}}_{\alpha_0}$ содержит 1 и $uA$, $A^*$, $A+B$, $AB$ вместе с $A$, $B$ по лемме 5.1.2. Основной момент состоит в доказательстве того, что оно замкнуто.

[34] Проектор на замкнутое линейное множество $[f_2]$:

$$P_{[f_2]}g_2=(g_2, f_2)\cdot f_2.$$

ложив $A_1h_1 = h_1'$. Итак,

$$A(h_1 \otimes f_2) = (A_1h_1) \otimes f_2 \qquad (*)$$

для $\|f_2\| = 1$. Но $(*)$ продолжается немедленно на все $f_2 \in \mathfrak{H}_2$

Оператор $A_1$, очевидно, линеен. Так как $A \in \mathcal{B}_{\otimes}$, то существует $C > 0$, такое, что $\|A\Phi\| \leqslant C\|\Phi\|$. Возьмем вновь произвольный вектор $f_2$, $\|f_2\| = 1$, тогда

$$\|A_1h_1\| = \|A_1h_1\|\|f_2\| = \|(A_1h_1) \otimes f_2\| = \|A(h_1 \otimes f_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant C\|h_1 \otimes f_2\| = C\|h_1\|\|f_2\| = C\|h_1\|.$$

Таким образом, $A_1 \in \mathcal{B}_1$. Теперь из $(*)$ ясно, что $A = \overline{A}_1 \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Поэтому $(\overline{\mathcal{B}}_2)' \subset \overline{\mathcal{B}}_1$.

Следовательно, $\overline{\mathcal{B}}_1 = (\overline{\mathcal{B}}_2)'$, а $(\overline{\mathcal{B}}_2)'$ есть, очевидно, кольцо, содержащее 1.

Лемма 5.2.2. *Каждое $\Phi \in \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ может быть записано как конечная или счетная (сильно сходящаяся) сумма*

$$\Phi = f_1 \otimes \omega_1 + f_2 \otimes \omega_2 + \ldots,$$

*где $f_1, f_2, \ldots \in \mathfrak{H}_1$; $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \mathfrak{H}_2$ и последние образуют ортонормированное множество.*

Доказательство. Пусть $\varphi$, $\rho \in K_1$, есть полное ортонормированное множество в $\mathfrak{H}_1$ и $\psi_\sigma$, $\sigma \in K_2$, — в $\mathfrak{H}_2$. Тогда векторы $\varphi_\rho \otimes \psi_\sigma$, $\rho \in K_1$, $\sigma \in K_2$, образуют полное ортонормированное множество в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ (по лемме 4.1.6 с учетом второго замечания в конце п.3.6). Таким образом,

$$\Phi = u_1\varphi_{\rho_1} \otimes \psi_{\sigma_1} + u_2\varphi_{\rho_2} \otimes \psi_{\sigma_2} + \ldots,$$

где $|u_1|^2 + |u_2|^2 + \ldots$ конечна и пары $(\rho_1, \sigma_1)$, $(\rho_2, \sigma_2)$, ... попарно различны. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — множество различных из $\rho_1, \rho_2, \ldots$ и $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — множество различных из $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, тогда

$$\Phi = \sum_{i=1,2,\ldots} \sum_{j=1,2,\ldots} v_{ij}\varphi_{\tau_i} \otimes \psi_{\nu_j}$$

с конечной суммой $\sum_{i=1,2,\ldots}\sum_{j=1,2,\ldots} |v_{ij}|^2$. (Мы полагаем

$$v_{ij} = \begin{cases} u_k, & \text{если } (\tau_i, \nu_j) = (\rho_k, \sigma_k), \\ 0, & \text{если } (\tau_i, \nu_j) \neq (\rho_k, \sigma_k), \quad k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Следовательно, $\sum_{i=1,2,\ldots} |v_{ij}|^2$ конечна для каждого $j = 1, 2, \ldots$, и мы можем образовать

$$f_j = \sum_{i=1,2,\ldots} v_{ij}\varphi_{\tau_i} \in \mathfrak{H}_1.$$

Тогда $\sum_{i=1,2,\ldots} v_{ij}\varphi_{\tau_i} \otimes \psi_{\nu_j} = \left(\sum_{i=1,2,\ldots} v_{ij}\varphi_{\tau_i}\right) \otimes \psi_{\nu_j} = f_j \otimes \psi_{\nu_j}$ (мы используем лемму 4.1.3), и, следовательно,

$$\Phi = f_1 \otimes \psi_{\nu_1} + f_2 \otimes \psi_{\nu_2} + \ldots$$

Таким образом, элементы $\omega_i = \psi_{\nu_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, обладают желаемыми свойствами.

Лемма 5.2.3. *Пусть $\mathcal{C}_{\alpha_0}$ есть множество $\subset \mathcal{B}_{\alpha_0}$ и $\overline{\mathcal{C}}_{\alpha_0}$ — его образ при изоморфизме $A_{\alpha_0} \leftrightarrow \overline{A}_{\alpha_0}$. Тогда $\mathcal{C}_{\alpha_0}$ является кольцом тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{C}}_{\alpha_0}$ — кольцо.*

Доказательство. Так же как в доказательстве леммы 5.2.1, мы можем предполагать $I = \mathfrak{S}(1, 2)$, $\alpha_0 = 1$.

Кольцо может быть определено следующим образом: оно содержит $uA$, $A^*$, $A + B$, $AB$ вместе с $A$, $B$ и является замкнутым в сильнейшей топологии (см. обсуждение в начале п. 5.2). Ввиду леммы 5.1.2 первые четыре свойства имеют место для $\mathcal{C}_1$ тогда и только тогда, когда они имеют место для $\overline{\mathcal{C}}_1$. А для последнего свойства — замкнутости в сильнейшей топологии — это следует из результатов работы [11, с. 114, § 4]. Действительно, сепарабельность $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ не использовалась там, символы $\langle f, 0, 0, \ldots\rangle$ (для данного $f \in \mathfrak{H}_1$), встречавшиеся там, могут быть заменены на $f \otimes \varphi$ (с любым $\varphi \in \mathfrak{H}_2$, $\|\varphi\| = 1$), символы $\Phi = \langle f_1, f_2, \ldots\rangle$ (для данного $\Phi \in \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$) — на $f_1 \otimes \omega_1 + f_2 \otimes \omega_2 + \ldots$ леммы 5.2.2.

Теорема VIII. *Соответствие $A_{\alpha_0} \leftrightarrow \overline{A}_{\alpha_0}$, введенное в лемме 5.1.1, есть взаимно однозначное отображение $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ на некоторое подмножество $\overline{\mathcal{B}}_{\alpha_0}$ в $\mathcal{B}_{\otimes}$, являющееся кольцом с 1. Это отображение представляет собой изоморфизм, сохраняющий операции $A$, $A^*$, $A + B$, $AB$ и 0, 1. Если оно отображает множество $\mathcal{C}_{\alpha_0} \subset \mathcal{B}_{\alpha_0}$ в множество $\overline{\mathcal{C}}_{\alpha_0} \subset \overline{\mathcal{B}}_{\alpha_0}$, то $\mathcal{C}_{\alpha_0}$ — кольцо тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{C}}_{\alpha_0}$ — кольцо.*

Доказательство. Это немедленно следует из лемм 5.1.2, 5.2.1 и 5.2.3.

## Глава 6

## КОЛЬЦО ВСЕХ ПРОДОЛЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

**6.1.** Мы видели в лемме 3.3.6, что интуитивно правдоподобное равенство $\Pi \otimes_{\alpha \in I} z_\alpha f_\alpha = \Pi_{\alpha \in I} z_\alpha \cdot \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ имеет место лишь тогда, когда $\Pi \otimes_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится (или $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha = 0$). В противном случае последовательности $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in I$, и $f_\alpha$, $\alpha \in I$, даже не эквивалентны, т. е. $\Pi \otimes_{\alpha \in I} z_\alpha f_\alpha$ и $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ принадлежат к двум различным неполным тензорным произведениям $\Pi \otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$. Эта ситуация мотивирует следующее определение.

Определение 6.1.1. *Две $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, и $g_\alpha$, $\alpha \in I$, слабо эквивалентны, обозначение $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (g_\alpha;\ \alpha \in I)$, если можно найти комплексные числа $z_\alpha$, $\alpha \in I$, такие, что $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in I$, есть $C_0$-последовательность, эквивалентная $g_\alpha$, $\alpha \in I$.*

Лемма 6.1.1. *Не изменяя смысла определения 6.1.1, мы можем потребовать, чтобы все $|z_\alpha| = 1$.*

Доказательство. Другими словами, если $f_\alpha$, $\alpha \in I$, и $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in I$, явля-

ются $C_0$-последовательностями, то мы можем найти такие $z_\alpha$ с $|z'_\alpha| = 1$, что $(z_\alpha f_\alpha;\ \alpha \ \ I) \approx (z'_\alpha f_\alpha;\ \alpha \in I)$.

Так как ряд $\sum_{\alpha\in I} |\,\|z_\alpha f_\alpha\| - 1\,|$ сходится, то равенство $z_\alpha f_\alpha = 0$ (это означает, что $|\,\|z_\alpha f_\alpha\| - 1\,| = 1$) может иметь место лишь для конечного числа элементов $\alpha$. Заменим эти $z_\alpha$ на 1 и $f_\alpha$ на некоторые $f^0_\alpha \neq 0$ (что возможно по лемме 3.3.5). Тогда мы можем предполагать, что всегда $z_\alpha f_\alpha \neq 0$.

Так как ряды $\sum_{\alpha\in I} |\,\|f_\alpha\| - 1\,|$, $\sum_{\alpha\in I} |\,\|z_\alpha f_\alpha\| - 1\,|$ сходятся и все $\|f_\alpha\|$, $\|z_\alpha f_\alpha\| \neq 0$, то лемма 2.4.1, (II) гарантирует сходимость произведений $\prod_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|$, $\prod_{\alpha\in I} \|z_\alpha f_\alpha\|$ и то, что их значения не равны нулю. Таким образом, $\prod_{\alpha\in I} |z_\alpha|^{-}$ сходится тоже и имеет значение, не равное нулю, так как $|z_\alpha|^{-1} = \|f_\alpha\| / \|z_\alpha f_\alpha\|$. Поэтому ряд $\sum_{\alpha\in I} |\,|z_\alpha|^{-1} - 1\,|$ сходится по лемме 2.4.1, (II). Теперь лемма 3.3.6, (II) и (IV) дает (при замене прежних $z_\alpha$ на $|z_\alpha|^{-1}$), что последовательности $z_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in I$, и $(z_\alpha / |z_\alpha|) f_\alpha$, $\alpha \in I$, эквивалентны. Таким образом, числовая последовательность $z'_\alpha = z_\alpha / |z_\alpha|$ обладает всеми желаемыми свойствами.

Лемма 6.1.2. *Слабая эквивалентность $\underset{w}{\approx}$ для $C_0$-последовательностей рефлексивна, симметрична и транзитивна:*

(I) $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (f_\alpha;\ \alpha \in I)$;

(II) $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (g_\alpha;\ \alpha \in I)$ *влечет за собой* $(g_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (f_\alpha;\ \alpha \in I)$;

(III) $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (g_\alpha;\ \alpha \in I)$, $(g_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (h_\alpha;\ \alpha \in I)$ *влечет за собой* $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (h_\alpha;\ \alpha \in I)$.

Доказательство. Очевидно, так как по лемме 6.1.1 мы можем ограничиться последовательностями $z_\alpha$, $|z_\alpha| = 1$.

Определение 6.1.2. *Слабая эквивалентность $\underset{w}{\approx}$ разбивает множество всех $C_0$-последовательностей на попарно непересекающиеся классы эквивалентности (см. лемму 6.1.2). Обозначим множество этих классов эквивалентности через $\Gamma_w$ и класс эквивалентности данной $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$, через $\mathfrak{C}_w(f_\alpha;\ \alpha \in I)$.*

Так как эквивалентность влечет слабую эквивалентность, то каждое $\mathfrak{C} \in \Gamma$ есть $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_w$ в точности для одного $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$ и каждое $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$ есть сумма всех $\mathfrak{C} \in \Gamma$ с $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_w$.

Определение 6.1.3. *Если $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$ есть класс слабой эквивалентности, то через $\Pi \underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ будет обозначаться замкнутое линейное множество, порожденное всеми $\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$, где $f_\alpha$, $\alpha \in I$, есть произвольная $C_0$-последовательность из $\mathfrak{C}_w$. Ясно, что $\Pi \underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha \subset \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$.*

Наши предыдущие замечания показывают, что $\Pi \underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ есть замкнутое линейное множество, порожденное всеми $\Pi \otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_w$.

Явный критерий слабой эквивалентности $\underset{w}{\approx}$.

Лемма 6.1.3. *$(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (g_\alpha;\ \alpha \in I)$ тогда и только тогда, когда $\sum_{\alpha\in I} ||(f_\alpha, g_\alpha)| - 1|$ сходится*[35].

Доказательство. По лемме 6.1.1 (и определению 3.3.2) $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx}$ $\underset{w}{\approx} (g_\alpha;\ \alpha \in I)$ означает, что мы можем найти такие числа $z_\alpha$ с $|z_\alpha| = 1$, что $\sum_{\alpha\in I} |(z_\alpha f_\alpha, g_\alpha) - 1|$ сходится. Теперь для каждого данного $\alpha \in I$ $|(z_\alpha f_\alpha, g_\alpha) - 1|$ зависит только от $z_\alpha$ и обладает некоторым минимумом: $(z_\alpha f_\alpha, g_\alpha) = z_\alpha (f_\alpha, g_\alpha)$ пробегает окружность с центром в нуле и радиусом $|(f_\alpha, g_\alpha)|$, когда $z_\alpha$ пробегает окружность $|z_\alpha| = 1$; ближайшая точка первой окружности к единице есть $|(f_\alpha, g_\alpha)|$. Таким образом, наше условие становится следующим: ряд $\sum_{\alpha\in I} ||(f_\alpha, g_\alpha)| - 1|$ сходится.

6.2. Лемма 6.2.1. *Предположим, что для каждого $\alpha \in I$ дано некоторое $z_\alpha$ с $|z_\alpha| = 1$. Тогда существует один и только один замкнутый линейный оператор $U$, такой, что*

$$U \Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha = \Pi \otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha$$

*для каждой $C_0$-последовательности $f_\alpha$, $\alpha \in I$. Этот оператор $U$ унитарен.*

Доказательство. *Существование и унитарность.* Применим теорему IV к $\mathfrak{H} = \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha = \Pi \otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha$ (используются только $C_0$-последовательности). Условия теоремы выполнены: (I) — очевидно, (III) — потому, что $\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ есть $\Pi \overset{*}{\otimes}_{\alpha\in I} g_\alpha$ (с $g_\alpha = \bar{z}_\alpha f_\alpha$) и II — ввиду того, что

$$(\Pi \overset{*}{\otimes}_{\alpha\in I} f_\alpha, \Pi \overset{*}{\otimes}_{\alpha\in I} g_\alpha) = (\Pi \otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha, \Pi \otimes_{\alpha\in I} z_\alpha g_\alpha) = \Pi_{\alpha\in I} (z_\alpha f_\alpha, z_\alpha g_\alpha) =$$
$$= \Pi_{\alpha\in I} (f_\alpha, g_\alpha) = (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \Pi \otimes_{\alpha\in I} g_\alpha).$$

Таким образом, существует изоморфизм $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ в себя, переводящий каждое $\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ в $\Pi \overset{*}{\otimes}_{\alpha\in I} f_\alpha = \Pi \otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha$. Этот изоморфизм можно рассматривать как унитарный (и поэтому замкнутый линейный) оператор $U$, и этот оператор обладает желаемыми свойствами.

*Единственность.* Если $U$ — определенный выше унитарный оператор и $U'$ — другой замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий нашим требованиям, то $U$, $U'$ совпадают для всех $\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ и, следовательно, и для их конечных линейных комбинаций. Таким образом, они совпадают на всюду плотном множестве, но $U$ непрерывен, а $U'$ замкнут, поэтому они совпадают всюду.

Определение 6.2.1. *Обозначим оператор $U$ леммы 6.2.1 через $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$. Обозначим оператор проектирования на $\Pi \otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$, через $P[\mathfrak{C}]$ и оператор проектирования на $\Pi \underset{w}{\otimes}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$, через $P_w[\mathfrak{C}_w]$.*

---

[35] Если $\|f_\alpha\| = \|g_\alpha\| = 1$, то $|(f_\alpha, g_\alpha)| \leqslant 1$, и поэтому можно писать $\sum_{\alpha\in I} (1 - |(f_\alpha, g_\alpha)|)$ вместо указанного.

Лемма 6.2.2. *Оператор* $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ *отображает* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_w}_{w\ \alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *на себя, т. е. он коммутирует с* $P_w[\mathfrak{C}_w]$.

Доказательство. Оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha$ в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}z_\alpha f_\alpha$; если $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\in\mathfrak{C}_w$, то и $(z_\alpha f_\alpha;\ \alpha\in I)\in\mathfrak{C}_w$, следовательно, $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_w}_{w\ \alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на свою часть. Так как то же самое справедливо для обратного оператора $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$, т. е. для $U(\bar z_\alpha;\ \alpha\in I)$, то он отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_w}_{w\ \alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ точно на себя.

Лемма 6.2.3. (I). *Оператор* $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ *отображает* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *на себя, т. е. он коммутирует с* $P[\mathfrak{C}]$ *тогда и только тогда, когда сходится*[36] $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha$. *В этом случае* $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=(\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha)\cdot 1$;

(II) *В противном случае* $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ *отображает* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *на* $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *с* $\mathfrak{C}\neq\mathfrak{D}$.

Доказательство. Мы несколько изменим порядок рассмотрения: докажем (II). Предположим, что $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha$ не сходится. Тогда ввиду леммы 3.3.6, (IV) из $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\in\mathfrak{C}$ следует, что $(z_\alpha f_\alpha;\ \alpha\in I)\in\mathfrak{D}\neq\mathfrak{C}$. Класс $\mathfrak{D}$ зависит только от $\mathfrak{C}$ (а не от выбора $f_\alpha$, $\alpha\in I$), потому что из $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(g_\alpha;\ \alpha\in I)$ следует, что $(z_\alpha f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(z_\alpha g_\alpha;\ \alpha\in I)$, так как $(z_\alpha f_\alpha;\ z_\alpha g_\alpha)=(f_\alpha,\ g_\alpha)$ (используется определение 3.3.2). Таким образом, $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на часть $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Аналогично его обращение $U(\bar z_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на часть $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Поэтому образ $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ есть в точности $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и при этом $\mathfrak{C}\neq\mathfrak{D}$.

Докажем (I). *Достаточность.* Если $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha$ сходится, то лемма 3.3.6, (III) гарантирует, что $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha\cdot 1$, а остальное следует немедленно.

*Необходимость* ясна из (II).

Лемма 6.2.4. *Для любого оператора* $A_{\alpha_0}\in\mathcal{B}_{\alpha_0}$, $\alpha_0\in I$, *продолженный оператор* $\bar A_{\alpha_0}$ *коммутирует с каждым из операторов* $P[\mathfrak{C}]$, $P_w[\mathfrak{C}_w]$ и $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$.

Доказательство. Для $P[\mathfrak{C}]$ и $P_w[\mathfrak{C}_w]$ имеем

$$\bar A_{\alpha_0}(\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha)=\Pi\otimes_{\alpha\in I}g_\alpha,\qquad \text{где } g_\alpha=\begin{cases} f_\alpha & \text{для } \alpha\neq\alpha_0,\\ A_{\alpha_0}f_{\alpha_0} & \text{для } \alpha=\alpha_0.\end{cases}$$

Следовательно, $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\approx(g_\alpha;\ \alpha\in I)$ (по лемме 3.3.5) и тем более $(f_\alpha;\ \alpha\in I)\underset{w}{\approx}(g_\alpha;\ \alpha\in I)$. Таким образом, оператор $\bar A_{\alpha_0}$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на его часть и $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_w}_{w\ \alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ — также на его часть. То же самое справедливо и для $(\bar A_{\alpha_0})^*=\overline{(A_{\alpha_0})^*}$. Поэтому оператор $\bar A_{\alpha_0}$ коммутирует и с $P[\mathfrak{C}]$, и с $P_w[\mathfrak{C}_w]$[37].

---

[36] Это эквивалентно сходимости ряда $\sum_{\alpha\in I}|\arg z_\alpha|$ или сходимости ряда $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha-1|$ (по леммам 2.4.1, (II) и 3.3.6, (IV), если учесть, что $|z_\alpha|=1$).

[37] Пусть $E$ есть проекция на $\mathfrak{M}$ и $A$, $A^*$ оба отображают $\mathfrak{M}$ на его часть. Это означает, что $EAE=AE$ и $EA^*E=A^*E$. Применим ко второму уравнению сопряжение, тогда получим, что $EAE=EA$ и, следовательно, $AE=EA$.

Оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)^{-1}\overline{A}_{\alpha_0}U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$, очевидно, обладает определяющими свойствами оператора $\overline{A}_{\alpha_0}$ в том виде, как они даны в лемме 5.1.1. Поэтому

$$U(z_\alpha;\ \alpha\in I)^{-1}\overline{A}_{\alpha_0}U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=\overline{A}_{\alpha_0},\quad \overline{A}_{\alpha_0}U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\,\overline{A}_{\alpha_0}.$$

6.3. Определение 6.3.1. *Обозначим кольцо, порожденное операторами $\overline{A}_{\alpha_0}$ с произвольными $A_{\alpha_0}\in\mathcal{B}_{\alpha_0}$ и всеми $\alpha_0\in I$, через $\mathcal{B}^{\#}$. Ясно, что $\mathcal{B}^{\#}\subset\mathcal{B}_{\otimes}$. Кольцо $\mathcal{B}^{\#}$, очевидно, можно было бы определить и как кольцо, порожденное всеми $\overline{\mathcal{B}}_{\alpha_0}$, $\alpha_0\in I$ (см. определение* 5.1.1 *и лемму* 5.2.1). *Другими словами,*

$$\mathcal{B}^{\#}=\mathcal{R}(\overline{\mathcal{B}_{\alpha_0}};\ \alpha_0\in I).$$

Если множество $I$ конечно, то $\mathcal{B}^{\#}=\mathcal{B}_{\otimes}$ (см. [7, с. 135]), и, как мы докажем ниже (теоремы IX или X), это имеет место лишь в том случае, когда $I$ конечно. Далее, $\mathcal{B}^{\#}$ в некотором смысле важнее, чем $\mathcal{B}_{\otimes}$: элементы $\mathcal{B}^{\#}$ получаются из элементов $\mathcal{B}_{\alpha_0}$, $\alpha_0\in I$, продолжением (см. определение 5.1.1), алгебраическим и топологическим замыканиями. Другими словами, они являются единственными операторами в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, основанными непосредственно на операторах в $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha\in I$. Важно поэтому определить структуру $\mathcal{B}^{\#}$, поскольку $\mathcal{B}^{\#}$ может не быть в общем случае идентично с $\mathcal{B}_{\otimes}$.

Лемма 6.3.1. *Каждое $A\in\mathcal{B}^{\#}$ коммутирует со всеми $P[\mathfrak{C}]$ $(\mathfrak{C}\in\Gamma)$, $P_{\mathfrak{w}}[\mathfrak{C}_{\mathfrak{w}}]$ $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{w}}\in\Gamma_{\mathfrak{w}})$* и $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ $(|z_\alpha|=1)$.

Доказательство. Положим $X=P[\mathfrak{C}]$, или $X=P_{\mathfrak{w}}[\mathfrak{C}_{\mathfrak{w}}]$, или $X=U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$. Если $A_{\alpha_0}\in\mathcal{B}_{\alpha_0}$, $\alpha_0\in I$, то $\overline{A}_{\alpha_0}$ коммутирует (по лемме 6.2.4) с $X$, т. е. $\overline{A}_{\alpha_0}\in(X)'$. Так как $(X)'$ есть кольцо, то это влечет за собой, что $\mathcal{B}^{\#}\subset(X)'$. Следовательно, каждое $A\in\mathcal{B}^{\#}$ коммутирует с $X$.

Определение 6.3.2. *Для данного вектора $\Phi\in\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ обозначим через $\mathfrak{M}[\Phi]$ замкнутое линейное множество, порожденное всеми векторами $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\Phi$ $(|z_\alpha|=1)$. Обозначим через $E[\Phi]$ проектор на $\mathfrak{M}[\Phi]$.*

Лемма 6.3.2. (I). *Если $\Phi\in\Pi\otimes_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}}\mathfrak{H}_\alpha$, то $E[\Phi]$ коммутирует с $P[\mathfrak{C}]$ и их произведение есть $P_{[\Phi]}$* [38];

(II) *если $\Phi\in\prod\limits_{\mathfrak{w}}\otimes_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}_{\mathfrak{w}}}\mathfrak{H}_\alpha$, то $E[\Phi]\leqslant P_{\mathfrak{w}}[\mathfrak{C}_{\mathfrak{w}}]$;*

(III) *$E[\Phi]$ коммутирует с каждым $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$.*

Доказательство. (I). Обозначим замкнутые линейные множества, порожденные элементами $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\Phi$ $(|z_\alpha|=1)$ со сходящимся (соответственно расходящимся) произведением $\prod_{\alpha\in I}z_\alpha$, через $\mathfrak{M}_1$ (соответственно $\mathfrak{M}_2$). Ясно, что $\mathfrak{M}[\Phi]=\mathfrak{S}[\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2]$.

[38] Проектор на замкнутое линейное множество $[\Phi]$:

$$P_{[\Phi]}\Psi=\begin{cases}\dfrac{(\Psi,\Phi)}{\|\Phi\|^2} & \text{для } \Phi\neq 0,\\ 0 & \text{для } \Phi=0.\end{cases}$$

Если $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ сходится, то $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\Phi = \left(\prod_{\alpha\in I} z_\alpha\right)\Phi$ по лемме 6. 2. 3 (I). Следовательно, $\mathfrak{M}_1 = [\Phi] \subset \Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Если $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ расходится, то $\Phi\in\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ дает $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\Phi\in\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ для некоторого $\mathfrak{D}\neq\mathfrak{C}$, следовательно, $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\Phi$ ортогонально $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Таким образом, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ортогональны и поэтому $E[\Phi] = P_{\mathfrak{M}[\Phi]} = P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2}$. Кроме того.

$$E[\Phi]P[\mathfrak{C}] = P_{\mathfrak{M}_1}P[\mathfrak{C}] + P_{\mathfrak{M}_2}P[\mathfrak{C}] =$$
$$= P_{[\Phi]}P_{\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha} + P_{\mathfrak{M}_2}P_{\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha} = P_{[\Phi]} + 0 = P_{[\Phi]}.$$

Оператор $P_{[\Phi]}$ — проектор, следовательно, $E[\Phi]$, $P[\mathfrak{C}]$ коммутируют (см. [8, с. 76]) и их произведение есть $P_{[\Phi]}$.

(II). Оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает пространство $\Pi\underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на себя по лемме 6. 2. 2. Следовательно, $\Phi\in\Pi\underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ влечет $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\Phi\in\Pi\underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ и $\mathfrak{M}[\Phi]\subset\Pi\underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Переход к проекторам дает $E[\Phi]\leqslant P_w[\mathfrak{C}_w]$.

(III). Ввиду того, что $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)U(z_\alpha;\ \alpha\in I) = U(z_\alpha z_\alpha;\ \alpha\in I)$, применение $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ просто переставляет элементы $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\Phi$, $|z_\alpha| = 1$. Поэтому оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\mathfrak{M}[\Phi]$ на себя, т. е. он коммутирует с $E[\Phi]$.

Лемма 6. 3. 3. *Для любой $C_0$-последовательности $f^0_\alpha$, $\alpha\in I$, с $\|f^0_\alpha\| = 1$ имеем* $E[\Pi\otimes_{\alpha\in I}f^0_\alpha]\in\mathcal{B}^\#$.

Доказательство. Проведем его в несколько этапов.

(I). Достаточно показать, что $E[\Pi\otimes_{\alpha\in I}f_\alpha]$ есть сильнейшая (и, таким образом, сильная; см. п. 1.1, (д) и особенно [11, с. 111—112]) точка накопления множества $\mathcal{B}^\#$. Это будет, конечно, так, если мы сможем найти для произвольной (счетной) последовательности $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ элементов $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ некоторое $F\in\mathcal{B}^\#$, такое, что $F\Phi_n = E[\Pi\otimes_{\alpha\in I}f^0_\alpha]\Phi_n$ для $n = 1, 2, \ldots$

Каждый элемент $\Phi_n$ есть предел последовательности (конечных) линейных комбинаций элементов $\Pi\otimes_{\alpha\in I}g_\alpha$ ($g_\alpha$, $\alpha\in I$, — некоторая $C_0$-последовательность, см. теорему VI, (III)). Все $\Pi\otimes_{\alpha\in I}g_\alpha$, возникающие в связи с данным $\Phi_n$, образуют новую последовательность $\Pi\otimes_{\alpha\in I}g^{n,i}_\alpha$, $i = 1, 2, \ldots$ $F(\Pi\otimes_{\alpha\in I}g^{n,i}_\alpha) = E[\Pi\otimes_{\alpha\in I}f^0_\alpha](\Pi\otimes_{\alpha\in I}g^{n,i}_\alpha)$ для $i = 1, 2, \ldots$ влечет, очевидно, равенство $F\Phi_n = E[\Pi\otimes_{\alpha\in I}f^0_\alpha]\Phi_n$. Теперь мы можем записать $\Pi\otimes_{\alpha\in I}g^{n,i}_\alpha$ ($n, i = 1, 2, \ldots$) как простую последовательность и заменить ими $\Phi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Другими словами, мы можем предполагать, что $\Phi_n = \Pi\otimes_{\alpha\in I}h^n_\alpha$ ($h^n_\alpha$, $\alpha\in I$, — некоторая $C_0$-последовательность) для каждого $n = 1, 2, \ldots$

Если какое-либо $h^n_\alpha = 0$, то его $\Phi_n = \Pi\otimes_{\alpha\in I}h^n_\alpha = 0$ и может быть опущено. Следовательно, мы можем предполагать, что все $h^n_\alpha\neq 0$.

Каждое $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ коммутирует с $E[\Pi\otimes_{\alpha\in I}f^0_\alpha]$ и $F$ по леммам 6. 3. 2, (III)

и 6. 3. 1. Таким образом, мы можем заменить наши $\Phi_n = \Pi \otimes_{\alpha \in I} h_\alpha^n$ на любые $U(z_\alpha^n; \alpha \in I)\Phi_n = \Pi \otimes_{\alpha \in I} z_\alpha^n h_\alpha^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Мы можем использовать эту свободу для того, чтобы получить для каждого $n = 1, 2, \ldots$, для которого $(h_\alpha^n; \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (f_\alpha^0; \alpha \in I)$, более сильное соотношение $(h_\alpha^n; \alpha \in I) \approx (f_\alpha^0; \alpha \in I)$. Поэтому мы можем предполагать, что если $\mathfrak{S}_1$ есть множество всех $n$ с $(h_\alpha^n; \alpha \in I) \approx (f_\alpha^0; \alpha \in I)$ и $\mathfrak{S}_2$ есть множество всех $n$ с $(h_\alpha^n; \alpha \in I) \underset{w}{\not\approx} (f_\alpha^0; \alpha \in I)$, то каждое $n = 1, 2, \ldots$ принадлежит либо к $\mathfrak{S}_1$, либо к $\mathfrak{S}_2$.

Если $n \in \mathfrak{S}_1$, то ряд $\sum_{\alpha \in I} |(h_\alpha^n, f_\alpha^0) - 1|$ сходится (по определению 3. 3. 2), и, следовательно, мы имеем, что $(h_\alpha^n, f_\alpha^0) = 1$, за исключением конечного или счетного множества $J_n$ индексов $\alpha$ (по лемме 2. 3. 2, (I)). Если $n \in \mathfrak{S}_2$, то $\sum_{\alpha \in I} \| (h_\alpha^n, f_\alpha^0)| - 1|$ расходится (по лемме 6. 1. 3), и поэтому существует такое счетное множество $K_n$ индексов $\alpha$, что $\sum_{\alpha \in K_n} ||(h_\alpha^n, f_\alpha^0)| - 1|$ расходится [39]. Наконец, $\sum_{\alpha \in I} | \| h_\alpha^n \| - 1 |$ сходится для каждого $n$ ($C_0$-последовательности), следовательно, мы имеем $\| h_\alpha^n \| = 1$, за исключением конечного или счетного множества $L_n$ индексов $\alpha$. Пусть теперь $I^0$ — объединение всех $J_n$ $(n \in \mathfrak{S}_1)$, $K_n$ $(n \in \mathfrak{S}_2)$, $L_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. $I^0$ конечно или счетно, и мы имеем:

для $n \in \mathfrak{S}_1$: $\alpha \notin I^0$ влечет $(h_\alpha^n, f_\alpha^0) = \| h_\alpha^n \| = \| f_\alpha^0 \| = 1$;

для $n \in \mathfrak{S}_2$: $\sum_{\alpha \in I^0} \| (h_\alpha^n, f_\alpha^0)| - 1|$ расходится. Но $\prod_{\alpha \in I} \| h_\alpha^n \|$, $\prod_{\alpha \in I} \| f_\alpha^0 \|$ сходятся, следовательно, $\prod_{\alpha \in I} \| h_\alpha^n \| \| f_\alpha^0 \|$ также сходится, а с ним и $\sum_{\alpha \in I} \max (\| h_\alpha^n \| \| f_\alpha^0 \| - 1, 0)$ (по лемме 2. 4. 1, (I)). Так как $|(h_\alpha^n, f_\alpha^0)| \leqslant \| h_\alpha^n \| \times \| f_\alpha^0 \|$, то

$$0 \leqslant \max (|(h_\alpha^n, f_\alpha^0)| - 1, 0) \leqslant \max (\| h_\alpha^n \| \| f_\alpha^0 \| - 1, 0),$$

откуда следует сходимость ряда $\sum_{\alpha \in I^0} \max (|(h_\alpha^n, f_\alpha^0)| - 1, 0)$ (по лемме 2. 3. 1).

Комбинируя эти факты, заключаем из леммы 2. 4. 1, что произведение $\prod_{\alpha \in I^0} |(h_\alpha^n, f_\alpha^0)|$ сходится и его значение есть 0.

(II). Вычислим $\| E [\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0] \Phi_n \|$.

Если $n \in \mathfrak{S}_1$, то $(h_\alpha^n; \alpha \in I) \approx (f_\alpha^0; \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$, $(h_\alpha^n; \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$, следовательно, $\Phi_n = \Pi \otimes_{\alpha \in I} h_\alpha^n \in \Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$ и таким образом, по лемме 6. 3. 2, (I)

---

[39] Если $\sum_{\alpha \in I} u_\alpha$ $(u_\alpha \geqslant 0)$ расходится, то $u_{\alpha_1} + \ldots + u_{\alpha_l}$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ попарно различны) не ограничены (используется лемма 2.3.1). Выберем $\alpha_1^N, \ldots, \alpha_{l_N}^N$, такие, что $u_{\alpha_1^N} + \ldots + u_{\alpha_{l_N}^N} \geqslant N$ для $N = 1, 2, \ldots$, и пусть $K$ — множество всех $\alpha_k^N$, $N = 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, l_N$; тогда $\sum_{\alpha \in K} u_\alpha$, очевидно, расходится.

$$\| E [\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0] \Phi_n \| = \| E [\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0] P [\mathfrak{C}] \Phi_n \| =$$

$$= \| P_{[\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0]} \Phi_n \| = \| P_{[\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0]} (\Pi \otimes_{\alpha\in I} h_\alpha^n) \| =$$

$$= | (\Pi \otimes_{\alpha\in I} h_\alpha^n, \ \Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0) | = | \Pi_{\alpha\in I} (h_\alpha^n, f_\alpha^0) |.$$

Но $\prod_{\alpha\in I} (h_\alpha^n, f_\alpha^0)$ является сходящимся (а не только квазисходящимся), так как $(h_\alpha^n;\ \alpha\in I) \approx (f_\alpha^0;\ \alpha\in I)$, поэтому это выражение есть $\prod_{\alpha\in I} |(h_\alpha^n, f_\alpha^0)| = \prod_{\alpha\in I^0} |(h_\alpha^n, f_\alpha^0)|$.

Если $n \in \mathfrak{S}_2$, то $(h_\alpha^n;\ \alpha\in I) \not\approx_w (f_\alpha^0;\ \alpha\in I)$, следовательно, если $(f_\alpha^0;\ \alpha\in I) \in \mathfrak{C}_w$, $(h_\alpha^n;\ \alpha\in I) \in \mathfrak{D}_w$, где $\mathfrak{C}_w, \mathfrak{D}_w \in \Gamma_w$, то $\mathfrak{C}_w \neq \mathfrak{D}_w$. Следовательно, пространства $\Pi \otimes_{w\ \alpha\in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$ и $\Pi \otimes_{w\ \alpha\in I}^{\mathfrak{D}_w} \mathfrak{H}_\alpha$ ортогональны. Так как $\mathfrak{M} [\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0] \subset \Pi \otimes_{w\ \alpha\in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$ (по лемме 6. 3. 2, (II)) и $\Phi_n = \Pi \otimes_{\alpha\in I} h_\alpha^n \in \Pi \otimes_{w\ \alpha\in I}^{\mathfrak{D}_w} \mathfrak{H}_\alpha$, то $\Phi_n$ ортогонально $\mathfrak{M}[\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0]$. Таким образом, $E [\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0] \Phi_n = 0$. В то же время $\prod_{\alpha\in I} |(h_\alpha^n, f_\alpha^0)| = 0$.

Отсюда следует, что равенство

$$\| E [\Pi \otimes_{\alpha\in I} f_\alpha^0] \Phi_n \| = \prod_{\alpha\in I^0} | (h_\alpha^n, f_\alpha^0) | \qquad (*)$$

имеет место для всех $n = 1, 2, \ldots$

(III). Запишем $I^0$ как (конечную или счетную) последовательность $I^0 = \mathfrak{S} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ попарно различны). Для каждого $\alpha_l$ образуем проектор на $[f_{\alpha_l}^0]$ в $\mathfrak{H}_{\alpha_l}$, $P_{[f_{\alpha_l}^0]} \in \mathcal{B}_{\alpha_l}$, $P_{[f_{\alpha_l}^0]} h_{\alpha_l} = (h_{\alpha_l}, f_{\alpha_l}^0) f_{\alpha_l}^0$. Тогда

$$\overline{P_{[f_{\alpha_l}^0]}} (\Pi \otimes_{\alpha\in I} h_\alpha) = (h_{\alpha_l}, f_{\alpha_l}^0)\, f_{\alpha_l}^0 \otimes \Pi \otimes_{\alpha\in I, \alpha\neq\alpha_l} h_\alpha.$$

Это равенство отражает два факта: во-первых, все операторы $\overline{P_{[f_{\alpha_l}^0]}}$, $l = 1, 2, \ldots$, коммутируют. Действительно, все операторы $P_{[f_{\alpha_l}^0]}$ являются проекторами, принадлежащими $\mathcal{B}_{\alpha_0}$, следовательно, и операторы $\overline{P_{[f_{\alpha_l}^0]}}$ являются проекторами, принадлежащими $\overline{\mathcal{B}_{\alpha_l}} \subset \mathcal{B}^{\#}$. Далее, так как они коммутируют, то все операторы

$$Q_l = \overline{P_{[f_{\alpha_1}^0]}} \cdot \ldots \cdot \overline{P_{[f_{\alpha_l}^0]}}$$

также являются проекторами, принадлежащими $\mathcal{B}^{\#}$. Ясно, что $Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \ldots$ Таким образом, $\lim Q_l$ существует [40] и является также проектором, принадлежащим $\mathcal{B}^{\#}$.

[40] Мы имеем в виду $\lim_{l\to\infty} Q_l$, если $I^0$ бесконечно, и $Q_{l_0}$, если $I^0 = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{l_0})$.

Во-вторых, оно показывает, что $\overline{P_{[f^0_{\alpha_l}]}}(\Pi \otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f^0_\alpha) = \Pi \otimes_{\alpha\in I} z_\alpha f^0_\alpha$, и, следовательно, $\overline{P_{[f^0_{\alpha_l}]}}\Psi = \Psi$ для всех векторов $\Psi \in \mathfrak{M}[\Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha]$. Отсюда $Q_l\Psi = \Psi$ и $\lim\limits_l Q_l\Psi = \Psi$. Следовательно, $\lim\limits_l Q_l \geqslant E[\Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha]$. Таким образом, из

$$\| (\lim_l Q_l)\Phi_n \| = \| E[\Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha]\Phi_n \| \qquad (**)$$

следует, что $(\lim\limits_l Q_l)\Phi_n = E[\Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha]\Phi_n$ [41], и поэтому достаточно доказать (**) для всех $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $F = \lim\limits_l Q_l$ удовлетворяет всем требованиям.

(IV). Мы имеем

$$\|Q_l\Phi_n\| = \|(\overline{P_{[f^0_{\alpha_1}]}}\cdot\ldots\cdot\overline{P_{[f^0_{\alpha_l}]}})(\Pi \otimes_{\alpha\in I} h^n_\alpha)\| =$$

$$= \|(h_{\alpha_1}, f^0_{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot(h_{\alpha_l}, f^0_{\alpha_l})\cdot f^0_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes f^0_{\alpha_l} \otimes \Pi \otimes_{\alpha\in I, \alpha\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_l} h^n_\alpha\| =$$

$$= |(h_{\alpha_1}, f^0_{\alpha_1})|\cdot\ldots\cdot|(h_{\alpha_l}, f^0_{\alpha_l})|\,\Pi_{\alpha\in I, \alpha\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_l}\|h^n_\alpha\| =$$

$$= |(h_{\alpha_1}, f^0_{\alpha_1})|\cdot\ldots\cdot|(h_{\alpha_l}, f^0_{\alpha_l})|\,\Pi_{\alpha\in I^0, \alpha\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_l}\|h^n_\alpha\|$$

(вспомним, что $\|h^n_\alpha\| = 1$ для $\alpha \notin I^0$). При взятии предела $\lim\limits_l$ второй множитель в правой части стремится к 1 ввиду того, что произведение $\Pi_{\alpha\in I^0}\|h^n_\alpha\|$ сходится. Поэтому

$$\|(\lim_l Q_l)\Phi_n\| = \lim_l \|Q_l\Phi_n\| = \Pi_{\alpha\in I^0}|(h_\alpha, f^0_\alpha)|.$$

Таким образом, (**) следует из (*).

Доказательство окончено.

Лемма 6.3.4. *Предположим, что* $(f^0_\alpha; \alpha\in I) \in \mathfrak{C}$, $\|f^0_\alpha\| = 1$, *и* $\Phi \in \Pi \otimes \otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. *Тогда существует оператор* $A \in \mathcal{B}^\#$, *такой, что* $A(\Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha) = \Phi$.

Доказательство. Мы вновь разобьем его на несколько последовательных этапов.

(I). Вместе с нашим $f^0_\alpha$ введем соответствующие $\aleph_\alpha$, $K_\alpha$, $\varphi_{\alpha,\beta}$, $\mathrm{F}$ $(f^0_\alpha = \varphi_{\alpha,0})$ (см. лемму 4.1.4 и теорему V). Применим теорему V к $\Phi$ и пусть $\beta_1(\alpha)$, $\beta_2(\alpha), \ldots$ — те $\beta(\alpha) \in \mathrm{F}$ (их количество конечно или счетно), для которых $a[\beta(\alpha); \alpha\in I] \neq 0$ (см. теорему V, (II)). Запишем $a_i = a[\beta_i(\alpha); \alpha\in I]$, тогда по теореме V $\Phi = \sum_i a_i \Pi \otimes_{\alpha\in I}\varphi_{\alpha,\beta_i(\alpha)}$, $\sum_i |a_i|^2$ сходится.

---

[41] Если $E$, $F$ — два проектора, $E \leqslant F$, то из $\|E\Phi\| = \|F\Phi\|$ следует, что $E\Phi = F\Phi$. Действительно, так как $E$, $F$ — проекторы, то $(E\Phi, \Phi) = \|E\Phi\|^2 = \|F\Phi\|^2 = (F\Phi, \Phi)$, и так как $F - E$ — проектор, то $\|(F-E)\Phi\|^2 = ((F-E)\Phi, \Phi) = (F\Phi, \Phi) - (E\Phi, \Phi) = 0$. Следовательно, $(F-E)\Phi = 0$, $F\Phi - E\Phi = 0$, $F\Phi = E\Phi$.

(II). Для каждых $\alpha \in I$, $\beta \in K_\alpha$ определим

$$P_\alpha^\beta f_\alpha = (f_\alpha, f_\alpha^0) \cdot \varphi_{\alpha,\beta}.$$

Ясно, что $P_\alpha^\beta \in \mathcal{B}_\alpha$ и $|||P_\alpha^\beta||| \leqslant 1$.

Каждое $\beta_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ отлично от нуля лишь для конечного числа $\alpha$, скажем для $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{h_i}^i$. Определим

$$R_i = \overline{P_{\alpha_1^i}^{\beta_i(\alpha_1^i)}} \cdot \ldots \cdot \overline{P_{\alpha_{h_i}^i}^{\beta_i(\alpha_{h_i}^i)}} \cdot E[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0].$$

Так как $P_\alpha^\beta \in \mathcal{B}_\alpha$, то $\overline{P_\alpha^\beta} \in \overline{\mathcal{B}}_\alpha \subset \mathcal{B}^\#$ и $E[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0] \in \mathcal{B}^\#$ (по лемме 6.3.3), следовательно, $R_i \in \mathcal{B}^\#$. Так как все $|||P_\alpha^\beta||| \leqslant 1$, $|||\overline{P_\alpha^\beta}||| \leqslant 1$ и $|||E[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0]||| \leqslant 1$ (это проектор), то $|||R_i||| \leqslant 1$.

(III). Предположим, что $i \neq j$. Мы хотим доказать, что векторы $R_i\Psi'$ и $R_j\Psi''$ ортогональны для всех $\Psi'$, $\Psi''$ $(\in \Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha)$. Достаточно, очевидно, рассмотреть $\Psi' \in \Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}'} \mathfrak{H}_\alpha$, $\Psi'' \in \Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}''} \mathfrak{H}_\alpha$ для всех $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}'' \in \Gamma$.

Образуем $\mathfrak{C}_w$ с $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$. Рассмотрим вначале некоторое $\Psi' \in \Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}'} \mathfrak{H}_\alpha$, где $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}_w' \in \Gamma_w$, но $\mathfrak{C}_w' \neq \mathfrak{C}_w$. Тогда пространства $\Pi \otimes_{w\ \alpha \in I}^{\mathfrak{C}_w'} \mathfrak{H}_\alpha$ и $\Pi \otimes_{w\ \alpha \in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$ ортогональны, но $\Psi' \in \Pi \otimes_{w\ \alpha \in I}^{\mathfrak{C}_w'} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{M}[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0] \subset \Pi \otimes_{w\ \alpha \in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$ (по лемме 6.3.2, (II)), следовательно, $\Psi'$ ортогонально $\mathfrak{M}[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0]$. Таким образом, $E[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0]\Psi' = 0$, $R_i\Psi' = 0$. Мы можем поэтому предполагать, что $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}_w$. Аналогично мы можем предполагать, что $\mathfrak{C}'' \subset \mathfrak{C}_w$.

Рассмотрим далее случай, когда $\mathfrak{C}' \neq \mathfrak{C}''$. Операторы $R_i$, $R_j \in \mathcal{B}^\#$, следовательно, они коммутируют с $P[\mathfrak{C}']$, $P[\mathfrak{C}'']$ (по лемме 6.3.1). Таким образом,

$$(R_i\Psi', R_j\Psi'') = (R_i P[\mathfrak{C}']\Psi', R_j P[\mathfrak{C}'']\Psi'') = (P[\mathfrak{C}'] R_i\Psi', P[\mathfrak{C}''] R_j\Psi'') =$$
$$= (R_i\Psi', P[\mathfrak{C}'] P[\mathfrak{C}''] R_j\Psi'') = 0,$$

доказывая в этом случае желаемый результат.

Мы можем поэтому предполагать,что $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'' \subset \mathfrak{C}_w$. Так как операторы $R_i$, $R_j \in \mathcal{B}^\#$, они коммутируют с $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$ (по лемме 6.3.1), следовательно, мы можем заменить $\Psi'$, $\Psi''$ на $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)\Psi'$, $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)\Psi''$. Теперь $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}_w$, поэтому мы можем выбрать оператор $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$ так, чтобы он отобразил $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}''$ на $\mathfrak{C}$. Другими словами, мы можем предполагать, что $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'' = \mathfrak{C}$.

Таким образом, мы должны доказать ортогональность $R_i\Psi'$ и $R_j\Psi''$ только для $\Psi'$, $\Psi'' \in \Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$. Ясно, что достаточно рассмотреть $\Psi' = \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha'$, $\Psi'' = \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha''$ с $(f_\alpha';\ \alpha \in I)$, $(f_\alpha'';\ \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$.

При этих условиях (используя лемму 6.3.2, (I))

$$E[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0](\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha') = E[\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha^0] P[\mathfrak{C}](\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha') =$$

$$= P_{[\Pi\otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha]} (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f'_\alpha) = (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f'_\alpha, \Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha) \Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha =$$

$$= \Pi_{\alpha\in I} (f'_\alpha, f^0_\alpha) \cdot \Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha = \Pi_{\alpha\in I} (f'_\alpha, f^0_\alpha) \cdot \Pi \otimes_{\alpha\in I} \varphi_{\alpha,0}$$

и, следовательно,

$$R_i (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f'_\alpha) = \Pi_{\alpha\in I} (f'_\alpha, f^0_\alpha) \cdot P^{\overline{\beta_i(\alpha^i_1)}}_{\alpha^i_1} \cdot \ldots \cdot P^{\overline{\beta_i(\alpha^i_{h_i})}}_{\alpha^i_{h_i}} (\Pi \otimes_{\alpha\in I} \varphi_{\alpha,0}) =$$

$$= \Pi_{\alpha\in I} (f'_\alpha, f^0_\alpha) \cdot \Pi \otimes_{\alpha\in I} \varphi_{\alpha,\beta_i(\alpha)}. \qquad (*)$$

Аналогично

$$R_j (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f''_\alpha) = \Pi_{\alpha\in I} (f''_\alpha, f^0_\alpha) \cdot \Pi \otimes_{\alpha\in I} \varphi_{\alpha,\beta_j(\alpha)}.$$

Комбинируя эти равенства, получаем, что

$$(R_i (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f'_\alpha), R_j (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f''_\alpha)) =$$

$$= \Pi_{\alpha\in I} (f_\alpha, f^0_\alpha) \cdot \Pi_{\alpha\in I} (f''_\alpha, f^0_\alpha) \cdot \Pi_{\alpha\in I} (\varphi_{\alpha,\beta_i(\alpha)}, \varphi_{\alpha,\beta_j(\alpha)}).$$

Так как $i \neq j$, то существует $\alpha \in I$ с $\beta_i(\alpha) \neq \beta_j(\alpha)$, $(\varphi_{\alpha,\beta_i(\alpha)}, \varphi_{\alpha,\beta_j(\alpha)}) = 0$, и, следовательно, третий множитель в правой части есть 0. Таким образом, левая часть также равна 0, и наше утверждение доказано.

(IV). Как показано выше, $R_1\Psi$, $R_2\Psi, \ldots$ попарно ортогональны для любого $\Psi$ $(\in \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha)$. Кроме того, $\sum_i \| a_i R_i \Psi \|^2 = \sum_i | a_i |^2 \| R_i \Psi \|^2 \leqslant \sum_i |a_i|^2 \|\Psi\|^2 = \left( \sum_i |a_i|^2 \right) \| \Psi \|^2$ сходится и, следовательно, сумма $\sum_i a_i R_i \Psi$ (сильно) сходится (в $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$). Поэтому мы можем определить оператор $A$ (в $\Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$) посредством равенства

$$A\Psi = \sum_i a_i R_i \Psi.$$

Так как

$$\| A\Psi \|^2 = \left\| \sum_i a_i R_i \Psi \right\|^2 = \sum_i \| a_i R_i \Psi \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left( \sum_i | a_i |^2 \right) \| \Psi \|^2, \quad \| A\Psi \| \leqslant \sqrt{\sum_i | a_i |^2} \, \| \Psi \|,$$

то $A \in \mathscr{B}_\otimes$.

$A$ есть сильный предел всех $a_1 R_1 + \ldots + a_j R_j$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $A$ принадлежит $\mathscr{B}^\#$ вместе с $R_1$, $R_2, \ldots$ Наконец, (*) дает

$$R_i (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha) = \Pi \otimes_{\alpha\in I} \varphi_{\alpha,\beta_i(\alpha)},$$

и поэтому

$$A (\Pi \otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha) = \sum_i a_i \Pi \otimes_{\alpha\in I} \varphi_{\alpha,\beta_i(\alpha)} = \Phi.$$

Таким образом, $A$ удовлетворяет всем нашим требованиям.

Лемма 6.3.5. *Для любого* $\Phi \in \Pi \otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ *имеем*[42] $E[\Phi] \in \mathscr{B}^\#$.

[42] Это есть обобщение леммы 6.3.3. Заметим, что условие $\Phi \in \Pi \otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ не может быть опущено. если $E[\Phi] \in \mathscr{B}^\#$ имело бы место для всех $\Phi$, то мы могли бы опустить в лемме 6.3.6

Доказательство. Выберем $(f^0_\alpha;\ \alpha \in I) \in \mathfrak{C}$, $\|f^0_\alpha\| = 1$, тогда $E[\Pi\otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha] \in \in \mathcal{B}^\#$ по лемме 6.3.3. Выберем $A \in \mathcal{B}^\#$ с $A(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha) = \Phi$, что возможно по лемме 6.3.4. Так как $A$ коммутирует с каждым $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$ (по лемме 6.3.1), то

$$AU(z_\alpha;\ \alpha \in I)(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha) = U(z_\alpha;\ \alpha \in I)\, A(\Pi\otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha) = U(z_\alpha;\ \alpha \in I)\,\Phi.$$

Таким образом, $A$ отображает $\mathfrak{M}[\Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha]$ на множество, порождающее замкнутое линейное множество $\mathfrak{M}[\Phi]$. Иными словами, область значений $AE[\Pi\otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha]$ порождает замкнутое линейное множество $\mathfrak{M}[\Phi]$.

Используем символ $\eta$ (см. [7, с. 141]): операторы $A$ и $E[\Pi\otimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha]$ оба принадлежат $\mathcal{B}^\#$, поэтому они $\eta\mathcal{B}^\#$, и, таким образом, характеристическим свойством определенного выше пространства $\mathfrak{M}[\Phi]$ является соотношение $\mathfrak{M}[\Phi]\,\eta\mathcal{B}^\#$. Следовательно, и проэктор на него $E[\Phi]\,\eta\mathcal{B}^\#$. Но это означает, что $E[\Phi] \in \mathcal{B}^\#$ (см. цитированную выше работу).

Лемма 6.3.6. *Если проектор $F$ коммутирует со всеми $P[\mathfrak{C}]$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$, и $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$ $(|z_\alpha| = 1)$, то $F \in \mathcal{B}^\#$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ есть замкнутое линейное множество, являющееся образом $F$, и пусть $\Phi \in \mathfrak{N}$. Тогда $\Phi$ есть предел последовательности (конечных) линейных комбинаций элементов вида $\Psi = \Pi\otimes_{\alpha\in I} f_\alpha$ и, следовательно, элементов $\Psi \in \Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$. Таким образом, вектор $\Phi = F\Phi$ есть предел последовательности (конечных) линейных комбинаций элементов $F\Psi$, $\Psi \in \Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$. Так как проекторы $F$ и $P[\mathfrak{C}]$ коммутируют, то векторы $F\Psi$ принадлежат пересечению образов $\mathfrak{N}$ и $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$ проекторов $F$ и $P[\mathfrak{C}]$. Отсюда ясно, что пространство $\mathfrak{N}$ есть замкнутое линейное множество, порожденное теми $\Psi \in \mathfrak{N}$, для которых одновременно $\Psi \in \Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$.

Так как $F$ коммутирует с операторами $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$, то эти операторы отображают пространство $\mathfrak{N}$ на себя. Поэтому если $\Psi \in \mathfrak{N}$, то $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)\,\Psi \in \mathfrak{N}$, т. е. $\mathfrak{M}[\Psi] \subset \mathfrak{N}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение: $\mathfrak{N}$ есть линейное замкнутое множество, порожденное пространствами $\mathfrak{M}[\Psi]$ тех элементов $\Psi \in \mathfrak{N}$, для которых одновременно $\Psi \in \Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$.

Далее, все эти пространства $\mathfrak{M}[\Psi]\,\eta\mathcal{B}^\#$ по лемме 6.3.5 ($\eta$ имеет тот же смысл, что и выше, см. [7, с 141]). Таким образом, $\mathfrak{N}\eta\mathcal{B}^\#$, и его проектор $F\eta\mathcal{B}^\#$, т. е. $F \in \mathcal{B}^\#$.

Сейчас мы в состоянии доказать следующее утверждение.

Теорема IX. *Оператор $A \in \mathcal{B}^\#$ тогда и только тогда, когда $A$ коммутирует со всеми операторами $P[\mathfrak{C}]$ $(\mathfrak{C} \in \Gamma)$ и $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$ $(|z_\alpha| = 1)$.*

---

и в теореме IX условие, что $F$, соответственно $A$, должен коммутировать со всеми $P[\mathfrak{C}]$. Тогда этот факт вместе с теоремой IX давал бы, что если $A$ коммутирует с каждым $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$, то он коммутирует и с каждым $P(\mathfrak{C})$. Однако (если $I$ бесконечно) $A = U(z^0_\alpha;\ \alpha \in I)$ с несходящимся $\Pi_{\alpha\in I} z^0_\alpha$ коммутирует со всеми $U(z_\alpha;\ \alpha \in I)$, но (используется лемма 6.2.3, (I)) не с $P[\mathfrak{C}]$.

Доказательство. Обозначим множество, порожденное этими операторами $P[\mathfrak{C}]$ и $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$, через $\mathscr{C}$. Тогда мы должны доказать, что

$$\mathscr{B}^\# = \mathscr{C}'$$

(см. [9, с. 388]). Так как с обеих сторон стоят кольца, достаточно доказать, что они оба содержат одни и те же проекторы (см. [9, с. 392]).

Каждый проектор кольца $\mathscr{B}^\#$ принадлежит $\mathscr{C}'$ по лемме 6.3.1, а каждый проектор кольца $\mathscr{C}'$ принадлежит $\mathscr{B}^\#$ по лемме 6.3.6. Таким образом, доказательство закончено.

**6.4.** Теорема IX полностью характеризует кольцо $\mathscr{B}^\#$, но было бы желательно иметь более конструктивное описание этого кольца, которое и содержится в следующей теореме.

Теорема X. (I) *Если* $A\in\mathscr{B}^\#$, *то из* $\Phi\in\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *следует, что* $A\Phi\in\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, *так что* $A$ *можно рассматривать как оператор в пространстве* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (*а не в* $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$) *для любого* $\mathfrak{C}\in\Gamma$. *Ограничение оператора* $A$ *на пространство* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ *мы будем обозначать через* $A^{\mathfrak{C}}$.

(II) *Выберем для каждого* $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$ *некоторое* $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{C}\in\Gamma$, *скажем* $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)$. *Если в каждом пространстве* $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$, *задан ограниченный оператор* $A_{\mathfrak{C}_w}$, *то оператор* $A\in\mathscr{B}^\#$, *такой, что* $A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}=A_{\mathfrak{C}_w}$ *для всех* $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$, *существует тогда и только тогда, когда множество* (*вещественных и неотрицательных чисел*) $\mathfrak{S}(|||A_{\mathfrak{C}_w}|||;\ \mathfrak{C}_w\in\Gamma_w)$ *ограничено. Такой оператор* $A\in\mathscr{B}^\#$ *в случае, если он существует, единствен.*

(III) $|||A|||=\sup\mathfrak{S}(|||A^{\mathfrak{C}}|||;\ \mathfrak{C}\in\Gamma)=\sup\mathfrak{S}(|||A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}|||;\ \mathfrak{C}_w\in\Gamma_w)$[43].

Доказательство. (I). Все утверждения немедленно вытекают из того факта, что оператор $A$ коммутирует с проекторами $P[\mathfrak{C}]$ на пространства $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

(II). *Необходимость.* Ясно, что $|||A^{\mathfrak{C}}|||\leqslant|||A|||$, следовательно, при сделанных предположениях $|||A_{\mathfrak{C}_w}|||=|||A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}|||\leqslant|||A|||$ и $|||A|||$ есть верхняя грань указанного выше множества.

*Достаточность.* Рассмотрим произвольное $\mathfrak{C}\in\Gamma$. Существует единственное $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$, такое, что $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$. Далее, и $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)\subset\mathfrak{C}_w$, поэтому существует оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ ($|z_\alpha|=1$), переводящий $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Таким образом, $A_{\mathfrak{C}}=U(z_\alpha;\ \alpha\in I)A_{\mathfrak{C}_w}(U(z_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}$ есть оператор в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$.

Оператор $A_{\mathfrak{C}}$ при фиксированном $\mathfrak{C}$ не зависит от частного выбора чисел $z_\alpha$: если операторы $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ и $U(z'_\alpha;\ \alpha\in I)$ оба отображают $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, то $(U(z'_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=U(z_\alpha\overline{z'_\alpha};\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ на себя и, следовательно, $\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha\overline{z'_\alpha}$ является сходящимся (по лемме 6.2.3, (I)). Таким образом, $(U(z'_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=U(z_\alpha\overline{z'_\alpha};\ \alpha\in I)=\Pi_{\alpha\in I}z_\alpha\overline{z'_\alpha}\cdot 1=c\cdot 1$

[43] sup — точная верхняя грань.

(см. замечание, сделанное выше), $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=cU(z'_\alpha;\ \alpha\in I)$. Поэтому

$$U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\,A_{\mathfrak{C}_w}(U(z_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}=U(z'_\alpha;\ \alpha\in I)\,A_{\mathfrak{C}_w}(U(z'_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1},$$

что доказывает наше утверждение.

Если $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)$, то мы можем выбрать $z_\alpha=1$, $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)=1$, так что оператор $A_{\mathfrak{C}}$ совпадает с нашим исходным оператором $A_{\mathfrak{C}_w}$.

Наконец, если $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ в $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, то из вложения $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$ следует вложение $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{C}_w$, и если $U(z'_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ в $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, то $U(z_\alpha z'_\alpha;\ \alpha\in I)=U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\,U(z'_\alpha;\ \alpha\in I)$ отображает $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ в $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$. Поэтому

$$A_{\mathfrak{D}}=U(z_\alpha z'_\alpha;\ \alpha\in I)\,A_{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}(U(z_\alpha z'_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}=$$
$$=U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\,U(z'_\alpha;\alpha\in I)A_{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}(U(z'_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}(U(z_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}=$$
$$=U(z_\alpha;\ \alpha\in I)\,A_{\mathfrak{C}}(U(z_\alpha;\ \alpha\in I))^{-1}.\qquad(*)$$

Определим теперь оператор $A^0$ следующим образом: $A^0\Phi$ определен в том и только том случае, когда $\Phi=\Psi_1+\ldots+\Psi_l$, где $\Psi_1\in\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_1}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha,\ \ldots,\ \Psi_l\in\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_l}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{C}_l\in\Gamma$ попарно различны, и тогда

$$A^0\Phi=A^0(\Psi_1+\ldots+\Psi_l)=A_{\mathfrak{C}_1}\Psi_1+\ldots+A_{\mathfrak{C}_l}\Psi_l.$$

Оператор $A^0$, очевидно, линеен и коммутирует с каждым оператором $P[\mathfrak{C}]$. Благодаря соотношению (*) он коммутирует также с каждым оператором $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$. Область определения оператора $A^0$ есть всюду плотное множество.

Пусть $C=\sup\mathfrak{S}(|||A_{\mathfrak{C}_w}|||;\ \ \mathfrak{C}_w\in\Gamma_w)$. Тогда каждая норма

$$|||A_{\mathfrak{C}}|||=|||A_{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}|||\leqslant C$$

и, следовательно,

$$\|A^0\Phi\|^2=\|A_{\mathfrak{C}_1}\Psi_1+\ldots+A_{\mathfrak{C}_l}\Psi_l\|^2=\|A_{\mathfrak{C}_1}\Psi_1\|^2+\ldots+\|A_{\mathfrak{C}_l}\Psi_l\|^2\leqslant$$
$$\leqslant C^2\|\Psi_1\|^2+\ldots+C^2\|\Psi_l\|^2=C^2(\|\Psi_1\|^2+\ldots+\|\Psi_l\|^2)=$$
$$=C^2\|\Psi_1+\ldots+\Psi_l\|^2=C^2\|\Phi\|^2,$$
$$\|A^0\Phi\|\leqslant C\|\Phi\|.\qquad(**)$$

Таким образом, оператор $A^0$ продолжается по непрерывности до всюду определенного оператора $A$ (в $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$). Наряду с $A^0$ оператор $A$ линеен, (**) дает по непрерывности, что $\|A\Phi\|\leqslant C\|\Phi\|$, так что $A\in\mathcal{B}_{\otimes}$, $|||A|||\leqslant C$, и, наконец, оператор $A$ коммутирует со всеми операторами $P[\mathfrak{C}]$ и $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ (поскольку этим свойством обладает $A^0$). Поэтому из теоремы IX следует, что $A\in\mathcal{B}^{\#}$.

Наконец, если $\Phi\in\Pi\otimes^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$, то $A\Phi=A^0\Phi=A_{\mathfrak{C}_w}\Phi$, т. е. $A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}=A_{\mathfrak{C}_w}$. Таким образом, оператор $A$ удовлетворяет всем нашим требованиям.

*Единственность*. Предположим, что $A',\ A''\in\mathcal{B}^{\#}$ и $A'^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}=A''^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}$ для всех $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$. Если $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$, то существует оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$, отображающий

пространство $\Pi \otimes_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)} \mathfrak{H}_\alpha$ в $\Pi \otimes_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$. Так как этот оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$ коммутирует с операторами $A'$, $A''$, то из предположения, что $A'^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)} = A''^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}$, следует $A'^{\mathfrak{C}} = A''^{\mathfrak{C}}$. Поскольку $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$ было произвольно, последнее справедливо для всех $\mathfrak{C} \in \Gamma$.

Таким образом, $A'\Phi = A''\Phi$, если $\Phi \in \Pi \otimes_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}\in\Gamma$. Поэтому это равенство имеет место для всех $\Phi\ (\in \Pi \otimes_{\alpha\in I} \mathfrak{H}_\alpha)$, т. е. $A' = A''$.

(III). Соотношение $|||A^{\mathfrak{C}}||| \leqslant |||A|||$ очевидно, и поэтому

$$\sup \mathfrak{S}\,(|||A^{\mathfrak{C}}|||;\quad \mathfrak{C}\in\Gamma) \leqslant |||A|||.$$

Как мы видели при доказательстве достаточности в п. (II), если положить $A_{\mathfrak{C}_w} = A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}$, то

$$|||A||| \leqslant C = \sup \mathfrak{S}\,(|||A_{\mathfrak{C}_w}|||;\quad \mathfrak{C}_w\in\Gamma_w) = \sup \mathfrak{S}\,(|||A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}|||;\quad \mathfrak{C}_w\in\Gamma_w).$$

Наконец, ясно, что $\sup \mathfrak{S}\,(|||A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}|||;\ \mathfrak{C}_w\in\Gamma_w) \leqslant \sup \mathfrak{S}\,(|||A^{\mathfrak{C}}|||;\ \mathfrak{C}\in\Gamma)$. Эти три неравенства дают вместе, что

$$|||A||| = \sup \mathfrak{S}\,(|||A^{\mathfrak{C}}|||;\ \mathfrak{C}\in\Gamma) = \sup \mathfrak{S}\,(|||A^{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_w)}|||;\quad \mathfrak{C}_w\in\Gamma_w),$$

что и требовалось.

Благодаря теоремам IX, X становится ясным, что элементы $\mathcal{B}^{\#}$ характеризуются двумя свойствами:

(I) Оператор $A\in\mathcal{B}^{\#}$ редуцируется к совокупности операторов, отвечающих пространствам $\Pi \underset{w}{\otimes}{}_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$ (см. лемму 6.3.1; термин «редукция» объясняется в работе [8, с. 78—80]).

(II) Внутри каждого $\Pi \underset{w}{\otimes}{}_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$, оператор $A\in\mathcal{B}^{\#}$ редуцируется к операторам, отвечающим пространствам $\Pi \otimes_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{C}\in\Gamma$, и его поведение в любом из этих пространств определяет поведение во всех оставшихся (для данного $\mathfrak{C}_w$ и $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{C}\in\Gamma$).

Далее, свойство (II), связанное с различием разбиений пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ в сумму пространств $\Pi \otimes_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$ и соответственно $\Pi \underset{w}{\otimes}{}_{\alpha\in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$, возникает исключительно из-за нашего способа обращения с несходящимися, но квазисходящимися произведениями в п. 2.5. (Оператор $U(z_\alpha;\ \alpha\in I)$, отображающий пространство класса эквивалентности $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{C}\in\Gamma$, в пространство другого класса эквивалентности $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{D}\in\Gamma$, имеет несходящееся, но, однако, квазисходящееся $\Pi_{\alpha\in I} z_\alpha$, см. лемму 6.2.3.) Другая, более сложная процедура обращения с такими бесконечными произведениями, использующая обобщенные пределы Банаха, позволила бы нам избежать этого. Впрочем, в сравнении с нашим настоящим методом эта процедура кажется более искусственной и произвольной и может привести к серьезным трудностям при формулировке ассоциативного закона.

Чтобы прояснить роль конкретных классов $\mathfrak{C}\in\Gamma$ и $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$, мы перейдем к вычислению мощностей множеств $\Gamma$ и $\Gamma_w$.

Лемма 6.4.1. (I) *Если множество $I$ конечно, то $\Gamma$ и $\Gamma_w$ содержат ровно*

*один элемент, одинаковый для них обоих: множество* $\mathfrak{C}_0$ *всех последовательностей*[44] $(f_\alpha;\ \alpha \in I)$.

(II) *Если множество* $I$ *бесконечно и его мощность равна* $\aleph^*$, *то для каждого* $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$ *число классов* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$, *имеет мощность* $2^{\aleph^*}$.

(III) *Если число элементов* $\alpha \in I$, *таких, что* $\dim \mathfrak{H}_\alpha \geqslant 2$, *конечно, то* $\Gamma_w$ *состоит ровно из одного элемента; если это число бесконечно, то мощность*[45] $\Gamma_w \geqslant \aleph$.

Доказательство. (I). Очевидно ввиду леммы 3.3.5.

(II). Для данного $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$ мощность множества всех $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{C} \in \Gamma$, очевидно, не больше мощности всех комбинаций $z_\alpha$, $\alpha \in I$ $(|z_\alpha| = 1)$, которая равна $\aleph^{\aleph^*} = 2^{\aleph_0 \aleph^*} = 2^{\aleph^*}$.

Поскольку $\aleph_0 \aleph^* = \aleph^*$, разобьем множество $I$ на попарно непересекающиеся множества $J_\gamma$, $\gamma \in \mathrm{L}$, так, что каждое $J_\gamma$ имеет мощность $\aleph_0$ и $\mathrm{L}$ имеет мощность $\aleph^*$. Для каждого множества $\mathrm{L}' \subset \mathrm{L}$ положим

$$z_\alpha^{\mathrm{L}'} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in J_\gamma, \quad \gamma \in \mathrm{L}', \\ -1, & \text{если } \alpha \in J_\gamma, \quad \gamma \notin \mathrm{L}'. \end{cases}$$

Выберем произвольную последовательность $(f_\alpha^0;\ \alpha \in I) \in \mathfrak{C}_w$, $\| f_\alpha^0 \| = 1$. Тогда все $(z_\alpha^{\mathrm{L}'} f_\alpha^0;\ \alpha \in I) \in \mathfrak{C}_w$. Если $\mathrm{L}' \neq \mathrm{L}''$, то существует $\gamma$, такое, что $\gamma \in \mathrm{L}'$, но $\gamma \notin \mathrm{L}''$ или наоборот. В любом случае из $\alpha \in J_\gamma$ следует, что $z_\alpha^{\mathrm{L}'} z_\alpha^{\mathrm{L}''} = -1$, так что равенство $z_\alpha^{\mathrm{L}'} z_\alpha^{\mathrm{L}''} = -1$ имеет место для бесконечного множества индексов $\alpha$. Таким образом, ряд $\Sigma_{\alpha \in I} |(z_\alpha^{\mathrm{L}'} f_\alpha^0, z_\alpha^{\mathrm{L}''} f_\alpha^0) - 1| = \Sigma_{\alpha \in I} |z_\alpha^{\mathrm{L}'} z_\alpha^{\mathrm{L}''} - 1|$ содержит бесконечно много членов $|-1-1| = 2$ и поэтому расходится. По определению 3.3.2 это означает, что $(z_\alpha^{\mathrm{L}'} f_\alpha^0;\ \alpha \in I) \not\approx (z_\alpha^{\mathrm{L}''} f_\alpha^0;\ \alpha \in I)$.

Суммируя сказанное, имеем, что все $\mathfrak{C}(z_\alpha^{\mathrm{L}'} f_\alpha^0;\ \alpha \in I)$ с $\mathrm{L}' \subset \mathrm{L}$ принадлежат $\mathfrak{C}_w$ и попарно различны. Мощность их равна $2^{\aleph^*}$, следовательно, мощность классов $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_w$, $\mathfrak{C} \in \Gamma \geqslant 2^{\aleph^*}$. Таким образом, эта мощность равна $2^{\aleph^*}$.

Докажем (III). Рассмотрим сначала случай, когда существует лишь конечное число элементов $\alpha \in I$, таких, что $\dim \mathfrak{H}_\alpha \geqslant 2$. Мы хотим доказать, что $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (g_\alpha;\ \alpha \in I)$ для всех $C_0$-последовательностей. По лемме 3.3.7 мы можем предполагать, что $\| f_\alpha \| = \| g_\alpha \| = 1$.

Если $\mathfrak{H}_\alpha$ одномерно, то $f_\alpha = c_\alpha g_\alpha$, $|c_\alpha| = 1$, следовательно, $|(f_\alpha, g_\alpha)| = 1$, $||(f_\alpha, g_\alpha)| - 1| = 0$. Таким образом, ряд $\sum_{\alpha \in I} ||(f_\alpha, g_\alpha)| - 1|$ сходится и по лемме 6.1.3 $(f_\alpha;\ \alpha \in I) \underset{w}{\approx} (g_\alpha;\ \alpha \in I)$.

---

[44] Следовательно, $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}_0} \mathfrak{H}_\alpha = \Pi \underset{w}{\otimes}{}_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}_0} \mathfrak{H}_\alpha = \Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$, $P[\mathfrak{C}_0] = P_w[\mathfrak{C}_0] = 1$. Каждое $\Pi_{\alpha \in I} z_\alpha$ сходится; следовательно, $U(z_\alpha;\ \alpha \in I) = (\Pi_{\alpha \in I} z_\alpha) \cdot 1$. Таким образом, теорема IX дает $\mathscr{B}^{\#} = \mathscr{B}_{\otimes}$ в соответствии с работой [7, с. 135].

[45] $\aleph$ — мощность континуума, $\aleph_0$ — мощность счетного множества.

Допустим теперь, что существует бесконечное количество элементов $\alpha \in I$, таких, что $\dim \mathfrak{H}_\alpha \geqslant 2$. Пусть $\alpha_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, — счетная двойная последовательность таких $\alpha$ и $\varphi_{\alpha_{i,j}}$, $\psi_{\alpha_{ij}}$ — два нормированных ортогональных вектора пространства $\mathfrak{H}_{\alpha_{i,j}}$. Для каждого $\alpha \neq \alpha_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, выберем некоторый вектор $f_\alpha^0 \in \mathfrak{H}_\alpha$ с $\| f_\alpha^0 \| = 1$. Для любого множества $N \subset \mathfrak{S}\,(1, 2, \ldots)$ положим

$$g_\alpha^N = \begin{cases} \varphi_{\alpha_{i,j}}, & \text{если } \alpha = \alpha_{i,j}, \quad i \in N, \\ \psi_{\alpha_{i,j}}, & \text{если } \alpha = \alpha_{i,j}, \quad i \notin N, \\ f_\alpha^0, & \text{если } \alpha \neq \alpha_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ясно, что каждая $(g_\alpha^N;\ \alpha \in I)$ есть $C_0$-последовательность. Если $N' \neq N''$, то существует $i$, такое, что $i \in N'$, но $i \notin N''$ или наоборот. В обоих случаях векторы $g_{\alpha_{i,j}}^{N'}$ и $g_{\alpha_{i,j}}^{N''}$ совпадают с $\varphi_{\alpha_{i,j}}$, $\psi_{\alpha_{i,j}}$ в некотором порядке, откуда $(g_{\alpha_{i,j}}^{N'}, g_{\alpha_{i,j}}^{N''}) = 0$, так что равенство $(g_\alpha^{N'}, g_\alpha^{N''}) = 0$ встречается бесконечно много раз. Таким образом, ряд $\sum_{\alpha \in I} \| (g_\alpha^{N'}, g_\alpha^{N''}) | - 1 |$ содержит бесконечно много членов, равных $|0 - 1| = 1$, и, следовательно, расходится. По лемме 6.1.3 это означает, что $(g_\alpha^{N'};\ \alpha \in I) \underset{w}{\not\approx} (g_\alpha^{N''};\ \alpha \in I)$.

Суммируя сказанное, имеем: все $\mathfrak{C}_w (g_\alpha^N;\ \alpha \in I)$ с $N \subset \mathfrak{S}\,(1, 2, \ldots)$ принадлежат $\Gamma_w$ и попарно различны. Их число есть $2^{\aleph_0} = \aleph$, так что число всех $\mathfrak{C}_w \in \Gamma_w$ не меньше $\aleph$.

Мы опускаем точное вычисление мощности $\Gamma_w$, что не представляет трудности. Ясно, что мощность $(\Gamma) = 2^{\aleph^*} \times$ мощность $(\Gamma_w)$.

# Часть IV

# ОБСУЖДЕНИЕ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО СЛУЧАЯ

## Глава 7

## ОБСУЖДЕНИЕ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО СЛУЧАЯ

**7.1.** По теореме V гильбертовы пространства $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$ изоморфны друг другу и каждое пространство $\Pi \underset{w}{\otimes}{}_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$ содержит по лемме 6.4.1, (II) одинаковое число подпространств $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$. Поэтому дальнейшее исследование структуры пространства $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ (и его подпространств $\Pi \otimes_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{H}_\alpha$, $\Pi \underset{w}{\otimes}{}_{\alpha \in I}^{\mathfrak{C}_w} \mathfrak{H}_\alpha$) возможно только путем изучения других объектов в пространстве $\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ — операторов и колец операторов. Это было проделано в гл. 6 для кольца $\mathscr{B}^\#$, и следующий объект, который естественно было бы обсудить, есть подкольца

кольца $\mathscr{B}^{\#}$. Рассматривая ту ограниченную форму, в которой был сформулирован в теореме VI ассоциативный закон для пространств $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ (см. также замечания после этой теоремы), можно предположить, что в связи с ассоциативным законом должны возникать некоторые интересные структурные свойства.

Из теорем IX, X мы знаем, что в каждом пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ внутри данного $\Pi\underset{w}{\otimes}{}^{\mathfrak{C}_w}_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ оператор $A\in\mathscr{B}^{\#}$ ведет себя одинаковым образом. Поэтому интересных явлений мы можем ожидать только в том случае, когда существует более чем одно $\mathfrak{C}_w\in\Gamma_w$. По лемме 6.4.1, (III) это означает, что существует бесконечно много элементов $\alpha\in I$, таких, что $\dim\mathfrak{H}_\alpha\geqslant 2$. Далее, из теоремы VII мы знаем, что все сложности в ассоциативном законе возникают только тогда, когда множество L (т. е. множество кусков $I_\gamma$, $\gamma\in$ L, множества $I$) бесконечно. Так как $I_\gamma$ с одним элементом неинтересны, то каждое $I_\gamma$ должно содержать не менее двух элементов.

Таким образом, простейшим примером, в котором проявляются существенные свойства бесконечного тензорного произведения, является случай, когда множество $I$ счетно и каждое пространство $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha\in I$, двумерно, а каждое множество $I_\gamma$, $\gamma\in$ L, состоит ровно из двух элементов.

Итак, пусть $I$ есть множество пар $(n, \tau)$, $n = 1, 2, \ldots, \tau = 1, 2$, L — множество всех $n = 1, 2, \ldots$, $I_n$ — множество, состоящее из $(n, 1)$ и $(n, 2)$, и пространства $\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ двумерны.

$\mathscr{B}^{\#}$ есть кольцо, порожденное всеми кольцами $\overline{\mathscr{B}_{(n,\tau)}}$. Подкольцо кольца $\mathscr{B}^{\#}$, которое возникает при применении ассоциативного закона (в смысле теоремы VI) к указанным выше $I$, L и $I_n$, есть кольцо, порожденное кольцами $\overline{\mathscr{B}_{(n,1)}}$, и его мы будем обозначать через $\mathscr{C}^{\#}$. Итак, имеем:

$$\mathscr{B}^{\#} = \mathscr{R}(\overline{\mathscr{B}_{(n,\tau)}};\qquad n = 1, 2, \ldots,\quad \tau = 1, 2),$$

$$\mathscr{C}^{\#} = \mathscr{R}(\overline{\mathscr{B}_{(n,1)}};\qquad n = 1, 2, \ldots).$$

**7.2.** Теперь мы хотим посмотреть, какое действие производит на кольца $\mathscr{B}^{\#}$ и $\mathscr{C}^{\#}$ «ассоциативное отображение» нашего пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha$ в пространство $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)$. Иными словами, помимо пространства $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha = \Pi\otimes_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$, мы хотим образовать пространство $\Pi\otimes_{\gamma\in L}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha) = \Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$ и посмотреть, что при этом происходит с кольцами $\mathscr{B}^{\#}$ и $\mathscr{C}^{\#}$.

Вначале рассмотрим ситуацию в пространстве $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha = \Pi\otimes_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$. Каждое пространство $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ имеет размерность $\aleph_0$, поскольку множество $F$ в теореме V счетно. Поэтому каждое $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ есть сепарабельное гильбертово пространство, и так как по теореме X $\mathscr{B}^{\#}$ совпадает в нем с кольцом всех ограниченных операторов, то мы можем сказать, используя тер-

минологию работы [7, с. 172], что $\mathcal{B}^{\#}$ есть фактор класса $(\mathrm{I}_\infty)$[46] в каждом пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$.

Что же касается $\mathcal{C}^{\#}$, то заметим вначале, что мы можем применить ассоциативный закон к пространству $\Pi\otimes_{\alpha\in I}\mathfrak{H}_\alpha=\Pi\otimes_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ с $\mathrm{L}'=(1,2)$, $I'_\tau=$ $=\mathfrak{S}\ ((n,\tau);\ n=1,2,\ldots)$, установив тем самым его изоморфизм с пространством $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}'}(\Pi\otimes_{\alpha\in I'_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)=(\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)})\otimes(\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,2)})$ (см. теорему VII). В частности, мы можем по теореме VI, (I) каждому классу $\mathfrak{C}$ пространства $\Pi\otimes_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ сопоставить классы $\mathfrak{C}_1$ пространства $\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)}$ и $\mathfrak{C}_2$ пространства $\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,2)}$; при этом пространства $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ и $(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_1}_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)})\otimes(\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_2}_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,2)})$ будут соответствовать друг другу при введенном выше изоморфизме (по теоремам VI, (III) и VII).

Очевидно, мы могли вместо того, чтобы образовать $\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}}$ непосредственно в пространстве $\Pi\otimes_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$, построить его вначале в пространстве $\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)}$ и затем продолжить в пространство $(\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)})\otimes$ $\otimes(\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,2)})$. Таким образом, кольцо $\mathcal{C}^{\#}=\mathcal{R}\ (\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}};\ n=1,2,\ldots)$ (в смысле $\Pi\otimes_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$) получается из кольца $\mathcal{B}^{\#}$ пространства $\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)}$ продолжением его на пространство $(\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)})\otimes(\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,2)})$. Таким образом, оно изоморфно этому $\mathcal{B}^{\#}$, а в пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ оно изоморфно кольцу $\mathcal{B}^{\#}$ пространства $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_1}_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)}$. Но $\mathcal{B}^{\#}$ пространства $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}_1}_{n=1,2,\ldots}\mathfrak{H}_{(n,1)}$ есть опять фактор класса $(\mathrm{I}_\infty)$ (по тем же самым причинам, что и выше), поэтому то же самое верно и для нашего кольца $\mathcal{C}^{\#}$ в пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$.

7.3. Исследуем теперь ситуацию в пространстве $\Pi\otimes_{\gamma\in\mathrm{L}}(\Pi\otimes_{\alpha\in I_\gamma}\mathfrak{H}_\alpha)=$ $=\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$. Для $\mathcal{B}^{\#'}$ (мы пишем $\mathcal{B}^{\#'}$ вместо $\mathcal{B}^{\#}$, чтобы подчеркнуть различие) аргументы п. 7.2 также применимы (с использованием теперь четырехмерных пространств $\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)}$ вместо двумерных $\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$), и поэтому $\mathcal{B}^{\#'}$ есть фактор класса $(\mathrm{I}_\infty)$ в каждом $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$, которые все являются гильбертовыми пространствами.

Что касается кольца $\mathcal{C}^{\#'}$ (аналога кольца $\mathcal{C}^{\#}$), то мы должны несколько модифицировать определение $\mathcal{C}^{\#'}$: для каждого $\mathcal{B}_{(n,1)}$ (в $\mathfrak{H}_{(n,2)}$) мы вначале продолжаем его на пространство $\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)}$ до кольца $\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}}$, а затем продолжаем это кольцо на пространство $\Pi\otimes_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$ до кольца $\overline{\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}}}$. В ре-

---

[46] То есть прямой фактор (см. [7, с. 139, 173]).

зультате получаем (так же, как и в конце п. 7.1), что

$$\mathcal{C}^{\#'} = \mathcal{R}\,(\overline{\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}}};\quad n = 1, 2, \ldots).$$

В то время как до сих пор кольца $\mathcal{B}^{\#}$, $\mathcal{C}^{\#}$, $\mathcal{B}^{\#'}$ вели себя изоморфным образом во всех неполных тензорных произведениях, кольцо $\mathcal{C}^{\#'}$ может вести себя (и, как мы скоро увидим, ведет себя) по-разному в разных пространствах $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$. Обсудим теперь это явление подробнее.

Пусть $\varphi_{(n,\tau),\varkappa}$, $\varkappa = 1, 2$, — полное ортонормированное множество в $\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$. Тогда $\varphi_{(n,1),\varkappa}\otimes\varphi_{(n,2),\lambda}$, $\varkappa$, $\lambda = 1, 2$, есть такое же множество в $\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)}$.

Таким образом, общий элемент пространства $\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ есть

$$f_{(n,\tau)} = \sum_{k=1}^{2} x_{(n,\tau),\varkappa}\varphi_{(n,\tau),\varkappa},$$

а общий элемент пространства $\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)}$ есть

$$g_{(n)} = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{2} y_{(n),\varkappa\lambda}\varphi_{(n,1),\varkappa}\otimes\varphi_{(n,2),\lambda}. \qquad (*)$$

Мы будем обращаться с $x_{(n,\tau),\varkappa}$ как с векторами:

$$\xi_{(n,\tau)} = ((x_{(n,\tau),1},\ x_{(n,\tau),2})),$$

а с $y_{(n),\varkappa\lambda}$ — как с матрицами:

$$H_{(n)} = \begin{Vmatrix} y_{(n),11} & y_{(n),12} \\ y_{(n),21} & y_{(n),22} \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь неполное тензорное произведение $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$. Оно характеризуется некоторой $C_0$-последовательностью $(g^0_{(n)};\ n = 1, 2, \ldots)\in\mathfrak{D}$, $g^0_{(n)}\in\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)}$. Используя разложение $(*)$ для каждого $g^0_{(n)}$, получаем матрицы

$$H^0_{(n)} = \begin{Vmatrix} y^0_{(n),11} & y^0_{(n),12} \\ y^0_{(n),21} & y^0_{(n),22} \end{Vmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Пространство $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$ характеризуется, следовательно, последовательностью матриц $H^0_{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$

Заметим теперь следующее:

(a) Мы можем выбрать элементы $g^0_{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, с $\|g^0_{(n)}\| = 1$ (по лемме 3.3.7), т. е. мы можем предполагать, что

$$\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{2} |y^0_{(n),\varkappa\lambda}|^2 = 1.$$

(b) С точки зрения изоморфизма между разными частями $\mathcal{C}^{\#'}$, отвечающими разным пространствам $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$, перестановка сомножителей $\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)}$, $n=1,2,\ldots$, не имеет значения — все построения совершенно не зависят от порядка сомножителей[47]. Поэтому любая перестановка матриц $H^0_{(n)}$, $n=1,2,\ldots$, несущественна для рассматриваемой проблемы изоморфизма $\mathcal{C}^{\#'}$ в пространствах $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$.

(c) С этой же точки зрения любая перестановка полного ортонормированного множества в произвольном пространстве $\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$ также несущественна. Этот факт довольно очевиден и легко может быть доказан с помощью теоремы IV.

Заменим в связи с этим элементы $\varphi_{(n,\tau),\varkappa}$, $\varkappa=1,2$, на элементы $\varphi'_{(n,\tau),\varkappa}$, $\varkappa=1,2$, так, что

$$\varphi_{(n,\tau),\varkappa}=\sum_{\lambda=1}^{2}u_{(n,\tau),\varkappa\lambda}\varphi'_{(n,\tau),\lambda},\qquad \varkappa=1,2,$$

и матрицы

$$U_{(n,\tau)}=\begin{Vmatrix} u_{(n,\tau),11} & u_{(n,\tau),12}\\ u_{(n,\tau),21} & u_{(n,\tau),22}\end{Vmatrix}$$

являются произвольными унитарными матрицами. Ясно, что при этом каждая матрица $H^0_{(n)}$ заменяется матрицей

$$H^{0'}_{(n)}=V_{(n)}H^0_{(n)}W_{(n)},\tag{**}$$

где $V_{(n)}$ — транспонированная матрица $U_{(n,1)}$; $W_{(n)}=U_{(n,2)}$. Таким образом, $V_{(n)}$, $W_{(n)}$ — вновь произвольные унитарные матрицы.

Хорошо известно, что преобразованием (**) каждая матрица может быть приведена к диагональному виду с диагональными неотрицательными элементами[48]. Поэтому мы можем предполагать, что матрицы $H^0_{(n)}$ диагональны:

$$H^0_{(n)}=\begin{Vmatrix} y^0_{(n)} & 0\\ 0 & z^0_{(n)}\end{Vmatrix},$$

$y^0_{(n)}$, $z^0_{(n)}\geqslant 0$. Другое применение (**) состоит в том, что мы можем переставить $y^0_{(n)}$, $z^0_{(n)}$ с помощью матрицы

$$V_{(n)}=W_{(n)}=\begin{Vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix},$$

так что мы можем предполагать, что $y^0_{(n)}\geqslant z^0_{(n)}\geqslant 0$.

---

[47] Но зависят от разбиения и рекомбинации множителей. Мы имеем неограниченный закон коммутативности, но весьма ограниченный закон ассоциативности (см. теорему VI).

[48] Для данной матрицы $H$ матрица $H^*H$ является эрмитовой; следовательно, существует унитарная матрица $W$, такая, что матрица $W^*H^*HW$ диагональна, скажем, с диагональными элементами $d_1$, $d_2$. Поскольку эта матрица неотрицательна, то $d_1$, $d_2\geqslant 0$. Пусть $K$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\sqrt{d_1}$, $\sqrt{d_2}$; тогда $K^*K=K^2=W^*H^*HW$, так что всегда $\|Kf\|=\|HWf\|$. Поэтому существует унитарная матрица $V$, такая, что $K=VHW$.

Ввиду (a) мы можем предполагать, что $(y^0_{(n)})^2 + (z^0_{(n)})^2 = 1$. Поэтому мы имеем, что $y^0_{(n)} = \sqrt{(1+\alpha_n)/2}$, $z^0_{(n)} = \sqrt{(1-\alpha_n)/2}$, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$. По (b) перестановки $\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, несущественны.

(d). Мы имеем нормальную форму

$$g^0_{(n)} = \sqrt{(1+\alpha_n)/2}\,\varphi_{(n,1),1} \otimes \varphi_{(n,2),1} + \sqrt{(1-\alpha_n)/2}\,\varphi_{(n,1)2,} \otimes \varphi_{(n,2),2}. \qquad \text{(i)}$$

Для двух таких $g^0_{(n)}$, $\overline{g^0_{(n)}}$ с $\alpha_n$, $\overline{\alpha_n}$ соответственно $(0 \leqslant \alpha_n, \overline{\alpha_n} \leqslant 1)$ видим, что $(g^0_{(n)}, \overline{g^0_{(n)}}) = 1/2(\sqrt{(1+\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} + \sqrt{(1-\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)})$. Поэтому они определяют один и тот же класс эквивалентности $\mathfrak{D}$ и одно и то же пространство $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$ в том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1,2,\ldots} \left| {}^1\!/_2 (\sqrt{(1+\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} + \sqrt{(1-\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)}) - 1 \right|$$

(по определению (2.3.2). Этот ряд мажорируется рядом[49]

$$\sum_{n=1,2,\ldots} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha_n}{1+\alpha_n}} - \sqrt{\frac{1-\overline{\alpha}_n}{1+\overline{\alpha}_n}}\right)^2, \qquad \text{(ii)}$$

поэтому достаточно сходимости последнего.

Резюмируем сказанное.

Лемма 7.3.1. *С точки зрения изучения изоморфизма частей кольца $C^{\#'}$, отвечающих различным пространствам* $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$, *достаточно рассмотреть классы эквивалентности $\mathfrak{D}$ последовательностей* $(g^0_{(n)};\ n = 1, 2, \ldots)$ *вида* (i) *с* $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$ *Любые перестановки этих* $\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *и замены их другими* $\overline{\alpha}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *для которых ряд* (ii) *сходится, несущественны.*

7.4. Теперь обсудим два крайних случая. Вначале рассмотрим случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$.

Лемма. 7.4.1. (I) *Последовательность* $\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *характеризующая данное пространство* $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$, *может быть выбрана как* $\alpha_1 =$

---

[49] Ясно, что

$$({}^1\!/_2(\sqrt{(1+\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} + \sqrt{(1-\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)})^2 + ({}^1\!/_2(\sqrt{(1-\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} - \sqrt{(1+\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)}))^2 = 1,$$ поэтому $${}^1\!/_2(\sqrt{(1+\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} + \sqrt{(1-\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)}) \leqslant 1,$$ и, следовательно,

$$0 \leqslant 1 - {}^1\!/_2(\sqrt{(1+\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} + \sqrt{(1-\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)}) \leqslant 1 - ({}^1\!/_2(\sqrt{(1+\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} + \sqrt{(1-\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)}))^2 = ({}^1\!/_2(\sqrt{(1-\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)} - \sqrt{(1+\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n)}))^2 = {}^1\!/_4(1+\alpha_n)(1+\overline{\alpha}_n)(\sqrt{(1-\alpha_n)/(1+\alpha_n)} - \sqrt{(1-\overline{\alpha}_n)/(1+\overline{\alpha}_n)})^2 \leqslant (\sqrt{(1-\alpha_n)/(1+\alpha_n)} - \sqrt{(1-\overline{\alpha}_n)/(1+\overline{\alpha}_n)})^2.$$

$=\alpha_2 \ldots = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{D}$ *есть класс эквивалентности последовательности* $(g^0_{(n)};\ n=1, 2, \ldots)$ *с* $g^0_{(n)} = f^0_{(n,1)} \otimes f^0_{(n,2)}$ $(f_{(n,\tau)} \in \mathfrak{H}_{(n,\tau)})$.

(II) *В любом таком пространстве* $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$ *кольцо* $\mathcal{C}^{\#'}$ *есть фактор типа* $(I_\infty)$ (*см.* п. 7.2).

Доказательство. (I). *Необходимость.* Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$, то соотношение (i) п. 7.3 дает, что $g^0_{(n)} = \varphi_{(n,1)} \otimes \varphi_{(n,2)}$.

*Достаточность.* Имеем $g^0_{(n)} = f^0_{(n,1)} \otimes f^0_{(n,2)}$. Так как ряд $\sum_{n=1,2,\ldots} |\,\|g^0_{(n)}\| - 1|$ сходится, равенство $g^0_{(n)} = 0$, $|\,\|g^0_{(n)}\| - 1\,| = 1$, может иметь место лишь для конечного множества чисел $n = 1, 2, \ldots$ Для всех остальных $n$ векторы $g^0_{(n)} \neq 0$, $f^0_{(n,1)}$, $f^0_{(n,2)} \neq 0$. Для исключительных значений $n$ мы можем изменить векторы $f^0_{(n,1)}$, $f^{(0)}_{(n,2)}$ (по лемме 3.3.5) так, чтобы всегда иметь $f^0_{(n,1)}$, $f^0_{(n,2)} \neq 0$. Далее, лемма 3.3.7 дает возможность нам заменить эти векторы $g^0_{(n)} = f^0_{(n,1)} \otimes f^0_{(n,2)}$ на

$$\frac{1}{\|g^0_{(n)}\|}\, g^0_{(n)} = \frac{1}{\|f^0_{(n,1)}\|\,\|f^0_{(n,2)}\|}\,(f^0_{(n,1)} \otimes f^0_{(n,2)}) = \frac{1}{\|f^0_{(n,1)}\|}\, f^0_{(n,1)} \otimes \frac{1}{\|f^0_{(n,2)}\|}\, f^0_{(n,2)}.$$

Другими словами, мы можем предполагать, что $\|f^0_{(n,1)}\| = \|f^0_{(n,2)}\| = 1$.

Теперь мы можем выбрать элементы $\varphi_{(n,\tau),\varkappa}$: $\varphi_{(n,1),1} = f^0_{(n,1)}$, $\varphi_{(n,2),1} = f^0_{(n,2)}$. Тогда, очевидно, $\alpha_n = 1$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$.

Тип кольца $\mathcal{C}^{\#'}$: предположим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$, т. е. $g^0_{(n)} = f^0_{(n,1)} \otimes f^0_{(n,2)}$, $\|f^0_{(n,1)}\| = \|f^0_{(n,2)}\| = 1$ (см. выше). Применим ассоциативный закон, сформулированный в теореме VI (так, как это было описано в п. 7.1).

Последовательность $(f^0_{n,\tau};\ n = 1, 2, \ldots;\ \tau = 1, 2)$ есть, очевидно, $C_0$-последовательность для пространства $\Pi\otimes_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$; пусть $\mathfrak{C}$ — ее класс эквивалентности. Тогда (классы $\mathfrak{C}_n$ несущественны, поскольку все множества $I_n = \mathfrak{S}((n, 1), (n, 2))$ конечны) $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{D}$. Следовательно, пространство $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n-1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$ изоморфно пространству $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$. Кольцо $\mathcal{C}^{\#'}$ порождено кольцами $\overline{\overline{\mathcal{B}}}_{(n,1)}$, $n = 1, 2, \ldots$, действующими в пространствах $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$, и этот изоморфизм переводит его в кольцо, порожденное кольцами $\overline{\mathcal{B}}_{(n,1)}$, $n = 1, 2, \ldots$, действующими в пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{C}}_{\substack{n=1,2,\ldots\\ \tau=1,2}}\mathfrak{H}_{(n,\tau)}$, т. е. в кольцо $\mathcal{C}^{\#}$ п. 7.2.

Следовательно, наше кольцо $\mathcal{C}^{\#'}$ изоморфно кольцу $\mathcal{C}^{\#}$ п. 7.2 и поэтому это есть фактор типа $(I_\infty)$.

7.5. Рассмотрим далее случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$.

Лемма 7.5.1. *В любом пространстве* $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$ *с* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$, *кольцо* $\mathcal{C}^{\#'}$ *есть фактор типа* $(\mathrm{II}_1)$ (*см. работу* [7, *с.* 172]).

Доказательство. Мы будем действовать в обратном направлении: проанализируем один из примеров фактора типа $(\mathrm{II}_1)$, рассмотренных в работе [7, с. 192—209], и докажем его изоморфность кольцу $\mathcal{C}^{\#'}$ в указанном пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$.

(I). Пусть $S$ есть множество счетных последовательностей $x = (\alpha_m,\ m =$

$= 1, 2, \dots)$, где каждое $\alpha_m = 0, 1$. Пусть $\mathfrak{G}$ есть множество тех $x = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \dots)$, $x \in S$, для которых $\alpha_m \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $m$.

Введем в $S$ следующую операцию: если $x = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \dots)$ и $y = (\beta_m;\ m = 1, 2, \dots)$, то $x \oplus y = (\gamma_m;\ m = 1, 2, \dots)$, где

$$\gamma_m = \alpha_m + \beta_m \pmod 2 \qquad (\gamma_m = 0, 1).$$

Относительно операции $x \oplus y$ множество $S$ является, очевидно, коммутативной группой с «единицей» $0 = (0;\ m = 1, 2, \dots)$ и множество $\mathfrak{G}$ есть ее (счетная) подгруппа.

Для множества $S$ (но не для $\mathfrak{G}$!) мы используем отображение

$$\Xi\colon\ x = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \dots) \to \xi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m/2^m$$

этого множества на числовой интервал $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. За исключением $\Xi$-образа множества $\mathfrak{G}$, т. е. множества всех двоично-рациональных чисел, мера которых равна нулю, это отображение взаимно однозначно. Поэтому обратное отображение к $\Xi$ переводит лебегову меру на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ в лебегову меру на множестве $S$ в смысле работы [7, определение 12.1.2 на с. 192]. Последнюю будем обозначать через $\mu^*$ (и через $\mu$ для «измеримых» множеств, см. указанную выше ссылку).

Теперь мы хотим рассмотреть множество $\mathfrak{G}$ (с операцией $a \oplus b$ для $a, b \in \mathfrak{G}$) как группу, а множество $S$ (с «отображениями» $x \to a \oplus x$ для $a \in \mathfrak{G}$, $x \in S$) как «пространство», описанное в работе [7, с. 192—195]. В смысле определения 12.1.5, с. 195 этой работы (мы заменяем обозначения $ab$, $ax$, использованные там, на $a \oplus b$, $a \oplus x$) множество $\mathfrak{G}$ есть $m$-группа, эргодическая в $S$. Проверим свойства $m$-группы. Пункт (I) цитированной статьи: если $a = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \dots)$ и $\alpha_m = 0$ для всех $m \geqslant m_0$, то отображение $x \to a \oplus x$ множества $S$ переходит при соответствии $\Xi$ в такое отображение отрезка $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, при котором каждый интервал $k/2^{m_0} < \xi < (k+1)/2^{m_0}$ $(k = 0, 1, \dots, 2^{m_0} - 1)$ сдвигается как целое. Следовательно, лебегова мера левоинвариантна на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ и соответствует мере $\mu^*$ на $S$. Пункт (II) очевиден.

(III). Если $a \neq 0$, то $a \oplus x \neq x$. Свойство эргодичности будет установлено ниже в п. (IV).

(II). Образуем для этих множеств $S$, $\mathfrak{G}$ пространства $\mathfrak{H}_S$ и $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}S}$ всех (комплекснозначных) функций $f(x)$, соответственно $F(x, a)$ $(x \in S,\ a \in \mathfrak{G})$, которые являются $\mu$-измеримыми по $x$ при каждом фиксированном $a \in \mathfrak{G}$ и имеют конечную норму $\left(\int\limits_S |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, соответственно $\left(\sum\limits_{a \in \mathfrak{G}} \int\limits_S |F(x, a)|^2 dx\right)^{1/2}$ $\left(\int\limits_S \dots dx \text{ — в } \mu\text{-смысле}\right)$, так что

$$(f, g) = \int\limits_S f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad (F, G) = \sum_{a \in \mathfrak{G}} \int\limits_S F(x, a)\overline{G(x, a)}\,dx$$

(см. [7, с. 194]). Образуем ограниченные операторы

$$\overline{U_{a_0}}F(x, a) = F(x \oplus a_0,\ a \oplus a_0) \qquad (a_0 \in \mathfrak{G}),$$

$$\overline{\mathrm{L}_{\varphi(x)}}F(x, a) = \varphi(x)\,F(x, a)$$

($\varphi(x)$ ограничено и $\mu$-измеримо [7, с. 198—199]) и кольцо $\mathcal{M}$, которое они порождают [7, с. 200].

При построении кольца $\mathcal{M}$ нам не нужно применять все функции $\varphi(x)$ и $a \in \mathfrak{G}$. Мы, очевидно, можем использовать только (ограниченные) бэровские функции $\varphi(x)$, затем по непрерывности перейти к непрерывным функциям $\xi(x)$ и затем вновь по непрерывности — к функциям $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) = c_k \qquad \text{для } k/2^{m_0} \leqslant \xi(x) < (k+1)/2^{m_0} \quad (k = 0, 1, \dots, 2^{m_0} - 1)$$

для любого $m_0 = 1, 2, \dots$ Но $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^{m_0}-1} c_k \varphi_k^{m_0}(x)$, где

$$\varphi_k^{m_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } k/2^{m_0} \leqslant \xi < (k+1)/2^{m_0}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

следовательно, мы можем ограничиться даже функциями $\varphi_k^{m_0}(x)$.

Если $k/2^{m_0} = \sum_{m=1}^{m_0} \gamma_m/2^m$, то $\varphi_k^{m_0}(x) = 1$ только в том случае, когда в $x = (\beta_m;$ $m = 1, 2, \dots)$ $\beta_m = \gamma_m$ для всех $m \leqslant m_0$, в противном случае это значение равно 0. Положим

$$\psi_l(x) = (-1)^{\beta_l}, \qquad \text{где } x = (\beta_m; \quad m = 1, 2, \dots),$$

тогда имеем $\varphi_k^{m_0}(x) = \prod_{l=1}^{m_0} (1/2)(1 + (-1)^{\gamma_l} \psi_l(x))$. Таким образом, возможны дальнейшие ограничения.

Положим

$$a_l = (\delta_{lm};\ m = 1, 2, \dots) \qquad \left(\delta_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{для } l = m, \\ 0 & \text{для } l \neq m \end{cases}\right);$$

очевидно, $a_l \in \mathfrak{G}$, и если $a = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \dots) \in \mathfrak{G}$, то $a = a_{l_1} \oplus \dots \oplus a_{l_\nu}$, где $l_1, \dots, l_\nu$ — те $m$, для которых $\alpha_m \neq 0$. Поэтому достаточно использовать только такие $\overline{U_{a_l}}$, $l = 1, 2, \dots$, а не все $\overline{U_{a_0}}$, $a_0 \in \mathfrak{G}$.

Итак, мы доказали, что

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}(\overline{U_{a_l}}, \overline{\mathrm{L}}_{\psi_l(x)}; \qquad l = 1, 2, \dots).$$

(III). Для каждого $a_0 = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \dots) \in \mathfrak{G}$ образуем

$$\omega_{a_0}(x) = \psi_{l_1}(x) \dots \psi_{l_\nu}(x),$$

где $l_1, \dots, l_\nu$ — те $m$, для которых $\alpha_m \neq 0$. Для $b_0 \in \mathfrak{G}$ определим также

$$F_{a_0 b_0}(a, x) = \begin{cases} \omega_{a_0}(x), & a = b_0, \\ 0, & a \neq b_0. \end{cases}$$

Немедленно проверяется, что функции $F_{a_0b_0}(a, x)$, $a_0$, $b_0 \in \mathfrak{G}$, взаимно ортогональны, и поскольку $\| F_{a_0b_0}(a, x) \| = \| \omega_{a_0}(x) \| = 1$, то они также и нормированы.

Если некоторая функция $G(a, x) \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}S}$ ортогональна ко всем функциям $F_{a_0b_0}(a, x)$, $a_0$, $b_0 \in \mathfrak{G}$, то $\int\limits_S G(b_0, x) \overline{f(x)}\, dx = 0$ для всех $f(x) = \omega_{a_0}(x)$. С помощью рассмотрений п. (II) это свойство продолжается на все ограниченные $\mu$-измеримые функции $f(x)$. Положим

$$f(x) = \operatorname{sgn} G(b_0, x) = \begin{cases} \dfrac{G(b_0, x)}{|G(b_0, x)|}, & \text{если } G(b_0, x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } G(b_0, x) = 0. \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_S |G(b_0, x)|\, dx = 0$. Следовательно, для каждого $b_0 \in \mathfrak{G}$ значение $G(b_0, x) = 0$ для всех $x$, кроме, быть может, множества $\mu$-меры 0. Поэтому ортонормированное множество $F_{a_0b_0}(a, x)$, $a_0, b_0 \in \mathfrak{G}$, является также и полным.

Если $a_0 = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \ldots)$, то легко проверяется, что

$$\overline{U_{a_l}} F_{a_0b_0}(a, x) = F_{a_0b_0}(a \oplus a_l,\ x \oplus a_l) = (-1)^{\alpha_l} F_{a_0(b_0 \oplus a_l)}(a, x),$$

$$\overline{\mathrm{L}}_{\psi_l(x)} F_{a_0b_0}(a, x) = \psi_l(x) F_{a_0b_0}(a, x) = F_{(a_0 \oplus a_l)b_0}(a, x).$$

(IV). Буквально те же самые аргументы показывают, что функции $\omega_{a_0}(x)$, $a_0 \in \mathfrak{G}$, образуют полное ортонормированное множество в пространстве $\mathfrak{H}_S$ и что для оператора $U_{c_0} f(x) = f(x \oplus c_0)$ мы имеем $(a_0 = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \ldots))$

$$U_{a_l} \omega_{a_0}(x) = \omega_{a_0}(x \oplus a_l) = (-1)^{\alpha_l} \omega_{a_0}(x).$$

Если $\mu$-измеримое множество $T \subset S$ отличается для каждого $c_0 \in \mathfrak{G}$ от своего образа при отображении $x \to x \oplus c_0$ только на множество $\mu$-меры 0 (зависящее от $c_0$), то положим

$$f_T(x) = \begin{cases} 1, & x \in T, \\ 0, & x \notin T. \end{cases}$$

Тогда $f_T \in \mathfrak{H}_S$ и $U_{c_0} f_T = f_T$ в $\mathfrak{H}_S$. Теперь запишем (в $\mathfrak{H}_S$):

$$f_T = \sum_{a_0 \in \mathfrak{G}} u_{a_0} \omega_{a_0} \quad (u_{a_0} \text{ — комплексные числа}),$$

следовательно,

$$U_{a_l} f_T = \sum_{a_0 \in \mathfrak{G}} u_{a_0} (-1)^{\alpha_l} \omega_{a_0}.$$

Итак, $(-1)^{\alpha_l} u_{a_0} = u_{a_0}$, и поэтому $u_{a_0} = 0$, если только при некотором $l$ величина $\alpha_l \neq 0$, т. е. если $a_0 \neq 0$. Следовательно, $f_T = u_0 \omega_0$, $f_T(x) = u_0 \omega_0(x) = u_0$ и, таким образом, $u_0 = 0$ или $1$, $\mu(T) = 0$ или $\mu(S - T) = 0$. Поэтому $\mathfrak{G}$ эргодично в $S$.

(V). Вернемся теперь к (III). Так как $a_0 = (\alpha_m;\ m = 1, 2, \dots)$ и $b_0 = (\beta_m;\ m = 1, 2, \dots)$, мы предпочтем обозначить $F_{a_0 b_0}$ через $F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots}$. Тогда имеем, что функции $F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots}$ ($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots = 0, 1$, но лишь конечное их число $\neq 0$) образуют полное ортонормированное множество в пространстве $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}}$. Кроме того,

$$U_{\alpha_l} F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_l\beta_l\dots} = (-1)^{\alpha_l} F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_l(1-\beta_l)\dots},$$

$$\mathrm{L}_{\psi_l(x)} F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_l\beta_l\dots} = F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots(1-\alpha_l)\beta_l\dots}$$

(мы пишем $1-\alpha$ всюду, где должно быть написано $\alpha+1$, поскольку эти числа приводятся по mod 2).

(VI). Рассмотрим далее пространство $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\dots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$, где $\mathfrak{D}$ есть класс эквивалентности $g^0_{(1)}, g^0_{(2)}, \dots$:

$$g^0_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{(n,1),1} \otimes \varphi_{(n,2),1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{(n,1),2} \otimes \varphi_{(n,2),2}.$$

Применим теперь лемму 4.1.4 и теорему V. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ пространство $\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)}$ имеет четыре измерения, поэтому пусть каждое $K_n$ есть четырехэлементное множество пар $(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, и пусть пара $(0, 0)$ играет роль нуля. Положим

$$\varphi_{n,(0,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{(n,1),1} \otimes \varphi_{(n,2),1} + \varphi_{(n,1),2} \otimes \varphi_{(n,2),2}),$$

$$\varphi_{n,(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{(n,1),1} \otimes \varphi_{(n,2),1} - \varphi_{(n,1),2} \otimes \varphi_{(n,2),2}),$$

$$\varphi_{n,(1,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{(n,1),2} \otimes \varphi_{(n,2),1} + \varphi_{(n,1),1} \otimes \varphi_{(n,2),2}),$$

$$\varphi_{n,(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{(n,1),2} \otimes \varphi_{(n,2),1} - \varphi_{(n,1),1} \otimes \varphi_{(n,2),2}).$$

Легко проверяется, что это есть полное ортонормированное множество в пространстве $\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)}$ и, как и требовалось, $\varphi_{n,(0,0)} = g^0_{(n)}$. Следовательно, элементы $\Pi\otimes_{n=1,2,\dots}\varphi_{n,\beta(n)}$ ($\beta(n) = (\alpha_n, \beta_n)$, $\alpha_n$, $\beta_n = 0, 1$ для каждого $n = 1, 2, \dots$ и $\beta(n) = (0, 0)$, т. е. $\alpha_n = \beta_n = 0$ всегда, кроме конечного числа элементов $n$) образуют полное ортонормированное множество в пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\dots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$. Запишем

$$\Phi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots} = \Pi\otimes_{n=1,2,\dots} \varphi_{n,\beta(n)} = \Pi\otimes_{n=1,2,\dots}\varphi_{n,(\alpha_n,\beta_n)}.$$

Рассмотрим теперь два оператора в $\mathfrak{H}_{n,1}$ — $U^n$, $\mathrm{L}^n$, определенные формулами:

$$U^n\varphi_{(n,1),1} = \varphi_{(n,1),1}, \qquad \mathrm{L}^n\varphi_{(n,1),1} = \varphi_{(n,1),2},$$

$$U^n\varphi_{(n,1),2} = -\varphi_{(n,1),2}, \qquad \mathrm{L}^{(n)}\varphi_{(n,1),2} = \varphi_{(n,1),1}.$$

Легко проверить, что операторы $\overline{U^n}$, $\overline{L^n}$ в пространстве $\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)}$ переводят элементы $\varphi_{n,(0,0)}$, $\varphi_{n,(0,1)}$, $\varphi_{n,(1,0)}$, $\varphi_{n,(1,1)}$ в элементы $\varphi_{n,(0,1)}$, $\varphi_{n,(0,0)}$, $-\varphi_{n,(1,1)}$, $-\varphi_{n,(1,0)}$ и $\varphi_{n,(1,0)}$, $\varphi_{n,(1,1)}$, $\varphi_{n,(0,0)}$, $\varphi_{n,(0,1)}$ соответственно, т. е. элемент $\varphi_{n,(\alpha,\beta)}$ в $(-1)^{\alpha}\varphi_{n,(\alpha,1-\beta)}$, соответственно $\varphi_{n,(1-\alpha,\beta)}$. Поэтому для операторов $\overline{\overline{U^n}}$, $\overline{\overline{L^n}}$ в пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$ имеем, что

$$\overline{\overline{U^n}}\Phi_{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n\ldots} = (-1)^{\alpha_n}\Phi_{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n(1-\beta_n)\ldots},$$

$$\overline{\overline{L^n}}\Phi_{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n\ldots} = \Phi_{\alpha_1\beta_1\ldots(1-\alpha_n)\beta_n\ldots}.$$

Заметим, наконец, что в пространстве $\mathfrak{H}_{(n,1)}$ четыре оператора—1, $U^n$, $L^n$, $U^n L^n$— линейно независимы, и, поскольку пространство $\mathfrak{H}_{(n,1)}$ двумерно, это есть наибольшее число линейно независимых операторов в $\mathfrak{H}_{(n,1)}$. Следовательно, все остальные операторы являются линейными комбинациями этих, поэтому $\mathcal{B}_{(n,1)} = \mathcal{R}(U^n, L^n)$. Отсюда следует, что

$$\overline{\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}}} = \mathcal{R}(\overline{\overline{U^n}}, \overline{\overline{L^n}}) \text{ в } \Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)}).$$

Далее, в пространстве $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$ имеем, что

$$\mathcal{C}^{\#'} = \mathcal{R}(\overline{\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}}};\ n = 1, 2, \ldots) = \mathcal{R}(\overline{\overline{U^n}}, \overline{\overline{L^n}};\ n = 1, 2, \ldots).$$

(VII). Сравним пространства $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}S}$ и $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$. Векторы $F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots}$ и соответственно $\Phi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots}$ (с теми же самыми ограничениями на $\alpha_1$, $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$) образуют полные ортонормированные множества в этих пространствах. Поэтому существует изоморфизм пространств $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}S}$ и $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$, переводящий каждый вектор $F_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots}$ в соответствующий вектор $\Phi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots}$. Из пунктов (V) и (VII) теперь следует, что этот изоморфизм переводит оператор $\overline{U_{a_l}}$ в $\overline{\overline{U^l}}$, а оператор $\overline{L_{\psi_l(x)}}$ в $\overline{\overline{L^l}}$. Поэтому он переводит кольцо $\mathcal{M} = \mathcal{R}(\overline{U}_{a_l}, \overline{L_{\psi_l(x)}};\ l = 1, 2, \ldots)$ (см. конец п. (II)) в кольцо

$$\mathcal{C}^{\#'} = \mathcal{R}(\overline{\overline{U^l}}, \overline{\overline{L^l}};\qquad l = 1, 2, \ldots).$$

Теперь кольцо $\mathcal{M}$ есть фактор типа ($\mathrm{II}_1$) согласно работе [7, с. 206] (это есть лемма 13.1.2 цитированной статьи: каждое одноточечное множество имеет лебегову меру 0). Так как кольцо $\mathcal{C}^{\#'}$ (пространственно) изоморфно кольцу $\mathcal{M}$, то же самое справедливо и для $\mathcal{C}^{\#'}$. Это завершает доказательство.

7.6 Леммы 7.4.1 и 7.5.1 показывают, сколь различным может быть кольцо операторов

$$\mathcal{C}^{\#'} = \mathcal{R}(\overline{\overline{\mathcal{B}_{(n,1)}}};\ n = 1, 2, \ldots)$$

в разных неполных тензорных произведениях $\Pi\otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$.

Рассмотренные случаи — $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$ — есть только два крайних случая, и в лемме 7.3.1 было описано, какие еще последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (все $1 \geqslant \alpha_1, \alpha_2 \ldots \geqslant 0$) могут быть использованы. Отметим здесь только, что выбор

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{для } n \text{ четного} \\ 0 & \text{для } n \text{ нечетного} \end{cases}$$

приводит к фактору типа $(\mathrm{II}_\infty)$ (см. [7, с. 172]). Этот результат может быть установлен без особого труда.

Мы предполагаем, что кольцо $\mathcal{C}^{\#'}$ есть фактор в каждом пространстве $\Pi \otimes^{\mathfrak{D}}_{n=1,2,\ldots} \mathfrak{H}_{(n,1)}$ (т. е. при любом выборе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$). Его тип не может быть $(\mathrm{I}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, поскольку $\mathcal{C}^{\#'}$, очевидно, не имеет конечного линейного базиса. Мы знаем, что этот тип может быть $(\mathrm{I}_\infty)$, $(\mathrm{II}_1)$ и, как замечено выше, $(\mathrm{II}_\infty)$. Таким образом, единственным вопросом остается вопрос: возникает ли при каком-либо выборе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ фактор типа $(\mathrm{III}_\infty)$?

Вопрос, существуют ли вообще факторы типа $(\mathrm{III}_\infty)$, до сих пор не решен (см. [7, с. 208]), и поэтому нам бы не хотелось формулировать какие-либо гипотезы, с ним связанные. Но мы скорее склоняемся к гипотезе, что описанное выше кольцо $\mathcal{C}^{\#'}$ не будет фактором типа $(\mathrm{III}_\infty)$ ни при каком выборе элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Birkhoff G.* Moore—Smith convergence in general topology.— Ann. Math., 1937, vol. 38, N 2, p. 39—56.
2. *Hopf E.* On causality, statistics and probability.— J. Math. Phys., 1934, vol. 13, p. 51—102.
3. *Kolmogoroff A.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. B.: Springer, 1933.
4. *Löwig H.* Komplexe euclidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl.— Acta Szeged, 1934, k. 7, old. 1—33.
5. *Łomnicki Z., Ulam S.* Sur la théorie de la mesure dans les espaces ombinatoires et son application au calcul des probabilités. I.— Fund. math., 1934, t. 23, s. 237—278.
6. *Moore E. H., Smith H. L.* A general theory of limits.— Amer. J. Math., 1922, vol. 44, p. 116—229.
7. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, N 2, p. 116—229. (Рус. пер. см. наст. изд., т. 2).
8. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 49—131.
9. *Neumann J. von.* Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 370—427.
10. *Neumann J. von.* Über adjungierte Funktionaloperatoren.— Ann. Math., 1932, vol. 33, N 2, p. 294—310.
11. *Neumann J. von.* On a certain topology for rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, N 2, p. 111—115.
12. *Neumann J. von.* Lectures on operator theory. Princeton, 1934.
13. *Rellich F.* Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen.— Math. Ann., 1935, Bd. 110, S. 342—356.
14. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space.— Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932, vol. 15.
15. *Tseng Y. Y.* Thesis. Chicago, 1932.

# АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ ВЫСОКОГО КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА*

## ВВЕДЕНИЕ

**0.** Предмет этой работы составляют некоторые элементарные теоремы о матрицах конечного порядка, а ее чтение требует знаний лишь об обычном матричном исчислении. Тем не менее мы решили предварить работу введением, написанным с «высоких позиций», т. е. с точки зрения общей теории унитарных пространств (необязательно конечномерных), операторного исчисления и абстрактной алгебры. Мы надеемся, что это поможет читателю увидеть более ясно, каковы наши мотивы в выборе именно данных проблем и какова более глубокая связь между ними. С этой точки зрения пункты 4 и 5 особенно важны. Но работа может рассматриваться с элементарных позиций Читатель, заинтересованный в этом, может опустить введение, за исключением пунктов 1 и 3.

Пункты этой работы нумеруются числами от 0 до 31. Наиболее важные формулы пронумерованы отдельно внутри каждого пункта. То же относится к леммам и теоремам каждого пункта и отдельно — к определениям.

Пункты 0—11 образуют введение, пункты 12—23 — ядро работы, пункты 24—31 — три приложения.

**1.** Мы рассматриваем матрицы $n$-го порядка

$$A = (a_{\varkappa\lambda}),\ \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n$$

с комплексными коэффициентами $a_{\varkappa\lambda}$. Удобно смотреть на эти матрицы как на линейные операторы в $n$-мерном евклидовом пространстве, элементы которого суть векторы $\xi = (x_\varkappa)$, $\varkappa = 1, \ldots, n$, с комплексными компонентами $x_\varkappa$. Определяющие формулы

$$A = (a_{\varkappa\lambda}), \qquad \xi = (x_\varkappa), \qquad \eta = (y_\varkappa),$$
$$\eta = A\xi \text{ означает } y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} x_\lambda. \tag{1.1}$$

Пространство всех таких матриц $A$ обозначим через $\mathbf{M}_n$, пространство всех $\xi = (x_\varkappa)$ — через $\mathfrak{E}_n$. $\mathfrak{E}_n$ есть не только *векторное пространство* с операциями

$$z(x_\varkappa) = (zx_\varkappa), \qquad (x_\varkappa) + (y_\varkappa) = (x_\varkappa + y_\varkappa) \tag{1.2}$$

($z$ — некоторое комплексное число), но также *унитарное пространство с внутренним произведением*

$$(\xi, \eta) = \sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \bar{y}_\varkappa \qquad (\xi = (x_\varkappa), \quad \eta = (y_\varkappa)) \tag{1.3}$$

---

* Portugaliae Math., 1942, vol. 3, p. 1—62.

и *метрикой*

$$|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)} = \sqrt{\sum_{\varkappa=1}^{n} |x_\varkappa|^2} \qquad (\xi = (x_\varkappa)). \tag{1.4}$$

В $\mathbf{M}_n$ определены *элементарные матричные операции*

$$\begin{gathered} z(a_{\varkappa\lambda}) = (za_{\varkappa\lambda}), \\ (a_{\varkappa\lambda}) + (b_{\varkappa\lambda}) = (a_{\varkappa\lambda} + b_{\varkappa\lambda}), \\ (a_{\varkappa\lambda})(b_{\varkappa\lambda}) = \left(\sum_{\iota=1}^{n} a_{\varkappa\iota} b_{\iota\lambda}\right) \end{gathered} \tag{1.5}$$

и *сопряжение*

$$(a_{\varkappa\lambda})^* = (\bar{a}_{\varkappa\lambda}), \tag{1.6}$$

определяемое с помощью равенства

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A^*\eta). \tag{1.7}$$

Мы будем использовать два способа метризации $\mathbf{M}_n$. Первый способ приводит к *метрике*

$$\|A\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\varkappa, \lambda=1}^{n} |a_{\varkappa\lambda}|^2} \qquad (A = (a_{\varkappa\lambda}))^1. \tag{1.8}$$

Второй — к *псевдометрике* в $\mathbf{M}_n$

$$|||A||| = \operatorname*{Max}_{\xi \neq 0} \frac{|A\xi|}{|\xi|}. \tag{1.9}$$

В $\mathbf{M}_n$ имеется также *след*, который удобно нормировать (в отличие от обычного определения), именно:

$$t(A) = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa} \qquad (A = (a_{\varkappa\lambda}))^2. \tag{1.10}$$

2. Элементарные свойства понятий, определенных в п. 1, настолько хорошо известны, что нет необходимости останавливаться на них подробно. Во всяком случае, читателю рекомендуется рассматривать их в том же духе, в каком обычно ведется унитарно-геометрическое обсуждение общих (необязательно конечномерных) унитарных, в первую очередь гильбертовых пространств. Используемая терминология согласована с употребляемой в упомянутой выше тематике. Это от-

---

[1] Причина, по которой берется множитель $1/n$ перед суммой, в том, что формула (5.8) (и, следовательно, теорема 5.3) не верна без него, и поэтому важное отождествление в определении 5.3 стало бы невозможным. Удобство этого множителя также и в том, что $\|1\| = 1$ для единичной матрицы 1 (см. примеч. 9). Заметим, что $|||1||| = 1$ (см. (1.9)).

[2] Основание для введения множителя $1/n$ то же, что и в примеч. 1: формула (5.8), теорема 5.3 и определение 5.3. Помимо соотношений $t(1) = 1$ для единичной матрицы, эта нормировка уже предопределена нормировкой для $\|\cdot\|$, она диктуется последней формулой в (3.11).

носится, в частности, к следующим понятиям: *линейные подпространства* (в $\mathfrak{E}_n$, которые благодаря конечной размерности $\mathfrak{E}_n$ автоматически замкнуты), *эрмитовы* матрицы (матрицы $A$ с условием $A^* = A$), *проекционные* матрицы (матрицы $E$ с условием $E^* = E = E^2$), *унитарные* матрицы (матрицы $U$ с условием $U^* = U^{-1}$), *нормальные* матрицы (матрицы $A$ с условием $A^*A = AA^*$), понятие *ортогональности* (для векторов $\xi$, $\eta$ $(\xi, \eta) = \mathbf{0}$ и для проекторов $E, F$, означающее, что $EF = \mathbf{0}$, или, эквивалентно, $FE = \mathbf{0}$, или что линейные множества $E$ и $F$ ортогональны друг другу), *упорядочение* (для проекторов $EF: E \leqslant F$ или $F \geqslant E$ означает, что $EF = E$, или, эквивалентно, $FE = E$, или что линейное множество $E$ содержится в линейном множестве $F$), *коммутативность* (для матриц $A$, $B$: $AB = BA$) и т. д.

В целом все это есть наиболее элементарный специальный случай общей ситуации, обсуждаемой в стандартных учебниках по геометрической теории гильбертовых пространств, к которым мы отсылаем читателя [3].

3. Мы сформулируем некоторые основные свойства понятий п. 1, которые либо содержатся в работах, цитированных в примеч 3, либо легко проверяются.

Метрики в $\mathfrak{E}_n$ и $\mathbf{M}_n$ и псевдометрика в $\mathbf{M}_n$ обладают основными свойствами метрики в линейных пространствах:

$$|z\xi| = |z||\xi|, \qquad |\eta + \xi| \leqslant |\xi| + |\eta|, \tag{3.1}$$

$$\|zA\| = |z|\|A\|, \qquad \|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \tag{3.2}$$

$$|||zA||| = |z|\,|||A|||, \qquad |||A + B||| \leqslant |||A||| + |||B|||. \tag{3.3}$$

В $\mathfrak{E}_n$ выполняется неравенство Шварца

$$|(\xi, \eta)| \leqslant |\xi||\eta|. \tag{3.4}$$

В $\mathbf{M}_n$, очевидно,

$$\|A^*\| = \|A\|, \tag{3.5}$$

в то же время

$$|||A^*||| = |||A||| \tag{3.6}$$

следует из (1.7) и из

$$|||A||| = \sup_{\xi, \eta \neq 0} \frac{|(A\xi, \eta)|}{|\xi||\eta|}. \tag{3.7}$$

Связь с умножением дается очевидным неравенством

$$|||AB||| \leqslant |||A|||\,|||B||| \tag{3.8}$$

и легко устанавливается[5]

$$\|AB\| \leqslant \begin{cases} |||A|||\,\|B\|, \\ |||B|||\,\|A\|. \end{cases} \tag{3.9}$$

[3] Мы имеем в виду [1, с. 1—96; 2, с. 63—78; 3, с. 384—385].

[4] Это хорошо известный факт (см. [2, с. 73, теорема 12]).

[5] Определим для всякой матрицы $C = (c_{\varkappa\lambda})$ вектор $\vec{C}^\lambda$, $\lambda = 1, \ldots, n$, где $\vec{C}^\lambda = (c_{\varkappa\lambda})$ ($\varkappa$ — индекс). Тогда из (1.1), (1.4) и (1.8)

$$(\overrightarrow{AB})^\lambda = A(\vec{B}^\lambda), \quad \|C\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{\lambda=1}^{n} |\vec{C}^\lambda|^2.$$

Наконец,

$$\| A \| \leqslant ||| A |||^6. \tag{3.10}$$

Отметим простые соотношения, связанные со следом:

$$t(A^*) = \overline{t(A)}, \qquad t(AB) = t(BA), \qquad \| A \| = \sqrt{t(A^*A)} = \sqrt{t(AA^*)} \tag{3.11}$$

и

$$| t(AB) | \leqslant \| A \| \, \| B \|, \tag{3.12}$$

последнее следует из неравенства Шварца (3.4), если мы будем рассматривать $\mathbf{M}_n$ как $\mathfrak{E}_{n^2}$.

Ранг проектора, т. е. размерность линейного множества, которое ему соответствует, равен, как известно, следу с естественной нормировкой, поэтому в силу (1.10) имеем

$$\frac{1}{n} \operatorname{Rank} E = t(E) \qquad (E \text{ — проектор}). \tag{3.13}$$

Другое свойство проектора $E$: так как $E^*E = E$, то последнее соотношение в (3.11) дает

$$\| E \| = \sqrt{t(E)}. \tag{3.14}$$

Поскольку по понятным причинам $|E\xi| \leqslant |\xi|$ для всех векторов $\xi$, то

$$||| E ||| \leqslant 1. \tag{3.15}$$

4. Предметом нашего внимания будут свойства $\mathfrak{E}_n$ и $\mathbf{M}_n$, особенно $\mathbf{M}_n$, когда $n$ конечно, но очень велико. Это приближение к изучению бесконечной размерности, которая существенно отличается от конечной. Обычный подход состоит в изучении актуально бесконечномерного унитарного пространства, т. е. гильбертова пространства $\mathfrak{E}_\infty$, о чем упомянуто выше (в примеч. 3). Мы хотим исследовать вместо этого асимптотическое поведение $\mathfrak{E}_n$ и $\mathbf{M}_n$ для конечного $n$, когда $n \to \infty$.

Мы думаем, что последним подходом неоправданно пренебрегают в сравнении с первым. Он, разумеется, не покрывается первым, так как допускает использование понятий $\|A\|$ и $t(A)$, которые благодаря множителю $1/n$, появившемуся в (1.8) и (1.10), не имеют аналога в $\mathfrak{E}_\infty$ и соответственно $\mathbf{M}_\infty$[7].

---

Отсюда и из (1.9) получаем

$$\| AB \|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^{n} |(\vec{AB})^\lambda|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^{n} | A (\vec{B}^\lambda)|^2 \leqslant ||| A |||^2 \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^{n} |\vec{B}^\lambda|^2 = ||| A |||^2 \, \| B \|^2,$$

т. е. первое из неравенств (3.9). Второе неравенство (3.9) следует из первого после замены $B$, $A$ на $A^*$, $B^*$ с учетом того, что $(AB)^* = B^*A^*$ и используя (3.5), (3.6).

[6] Используем первое неравенство (3.9) с $B = 1$, помня, что $\|1\| = 1$ (см. примеч. 1).

[7] Если опустить множитель $1/n$, то ограниченный аналог этих понятий существует в $\mathbf{M}_\infty$ (точнее, в гильбертовом пространстве $\mathfrak{E}_\infty$). Эти «следы» (напомним (1.10) и последнюю формулу (3.11)) играют важную роль в исследованиях Е. Шмидта класса операторов, названных впоследствии его именем, а также в математической интерпретации квантовой механики. Помимо работы [1, с. 65—70] упомянем [4, с. 93—101].

Имеются, однако, некоторые подкольца в $\mathbf{M}_\infty$, в которых точный аналог (1.8) и (1.10) существует (см. примеч. 8).

Поскольку гильбертово пространство $\mathfrak{E}_\infty$ мыслится как предельный случай $\mathfrak{E}_n$ при $n \to \infty$, мы полагаем, что такое изучение необходимо, чтобы внести ясность в то, до какой степени $\mathfrak{E}_\infty$ является или не является единственно возможным предельным случаем. Мы думаем, что ответ отрицателен, и исследования по кольцам операторов Ф. Мюррея и автора показывают, что другие предельные случаи существуют и во многих отношениях являются более естественными [8].

Наши настоящие исследования появились в значительной степени из желания решить некоторые вопросы, возникшие в цитированных в примеч. 8 статьях. Подробнее об этом см. в п. 10. Мы надеемся, однако, что читатель найдет эти результаты имеющими самостоятельный интерес главным образом для изучения асимптотического поведения $\mathfrak{E}_n$ и $\mathbf{M}_n$ при конечном $n$, когда $n \to \infty$.

**5.** С точки зрения, изложенной в п. 4, естественным выглядит такой вопрос: как сильно меняется характер пространств $\mathfrak{E}_n$ и $\mathbf{M}_n$, когда $n$ возрастает и в особенности когда $n$ уже весьма велико?

Так как $\mathfrak{E}_n$ есть линейное пространство, имеющее весьма прозрачную структуру, ясно, что действительно глубокое проникновение в проблему, включая и геометрию $\mathfrak{E}_n$, связано с изучением $\mathbf{M}_n$ и главным образом структуры $\mathbf{M}_n$ как алгебры.

Чтобы сравнивать поведение $\mathbf{M}_n$ для различных значений $n$, необходимо установить соответствие или отождествление между их элементами (или по крайней мере частью из них). Таким образом, становится необходимым погружение одного $\mathbf{M}_n$ в другое. Подходящим определением такого понятия может служить следующее.

Определение 5.1. *Погружение $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$ есть отображение*

$$A \to A' \tag{5.1}$$

*всех $A = (a_{\mu\nu})$ из $\mathbf{M}_m$, $\mu, \nu = 1, \ldots, m$, в некоторые $A' = (a'_{\varkappa\lambda})$ из $\mathbf{M}_n$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n$, которое есть изоморфизм для единичной матрицы [9], операций умножения на комплексное число, сложения, умножения матриц и взятия сопряженной матрицы, т. е.*

$$\mathbf{1}'_m = \mathbf{1}_n, \qquad (zA)' = zA', \qquad (A+B)' = A' + B', \qquad (AB)' = A'B',$$
$$(A^*)' = (A')^*. \tag{5.2}$$

Описание всех таких погружений не представляет труда, действительно, оно есть простое следствие известных общих теорем алгебры. Хотя это описание необязательно для дальнейшего, мы полагаем, что для прояснения картины полезно сформулировать его. Мы разобьем все утверждения на две части и докажем их для полноты в приложении 1.

---

[8] См. [5 — 7]. «Предельные случаи», которые упоминались выше, описаны как «класс $\mathrm{II}_1$» в [5, с. 172]. Примеры таких колец сконструированы в [5, с. 212—229; 7, с. 66—77], их свойства изучены в [5, с. 212—229; 6]. Аналоги $t(A)$, как в (1.10), определены в [5, с. 212—220; 6, с. 216—219], а $\|A\|$, как в (1.8), — в [6, с. 239—245, особенно на с. 241 лемма 4.3.2].

См. также коммент. к наст. ст. (примеч. перев.).

[9] Единичная матрица $\mathbf{1} = (\delta_{\varkappa\lambda})$, $\delta_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{для } \varkappa = \lambda, \\ 0 & \text{для } \varkappa \neq \lambda, \end{cases}$ будет обозначаться $\mathbf{1}_n$, если нужно подчеркнуть ее порядок.

Первое утверждение таково.

Теорема 5.1. *Погружение $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$ существует тогда и только тогда, когда $m$ делит $n$, т. е. $n = mp$ ($m$, $n$, $p = 1, 2 \ldots$).*

Если это условие выполнено, то можно определить специальное погружение.

Определение 5.2. *Пусть $n = mp$ ($m, p, n = 1, 2, \ldots$).*

*Определим отображение*

$$A \to A^{+} \tag{5.3}$$

*всех $A = (a_{\mu\nu})$ из $\mathbf{M}_m$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, m$) в некоторые $A^{+} = (a^{+}_{\varkappa\lambda})$ из $\mathbf{M}_n$ ($\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n$) по следующему правилу:*

$$a^{+}_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} a_{\mu\nu} & \text{для } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{для } \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{5.4}$$

*где $\varkappa = m(\alpha - 1) + \mu$; $\lambda = m(\beta - 1) + \nu$; $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n$; $\mu, \nu = 1, \ldots, m$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$. Это отображение есть погружение $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$, мы назовем его стандартным погружением $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$.*

Следующие факты немедленно следуют из определения:

Отображение (5.3) взаимно однозначно. (5.5)

Если $m = n$, то (5.3) есть тождественное отображение. (5.6)

Если $n = mp$ и $o = nq$, то отображение (5.3) для $o$, $m$ есть результат композиции отображений для $n$, $m$ и $o$, $n$. (5.7)

Кроме того,

Отображение (5.3) оставляет $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ и $t(\cdot)$ инвариантными, т. е. $\|A\| = \|A^{+}\|$ и т. д.[10] (5.8)

Основываясь на (5.5) и (5.7), а также на (5.2) и (5.8), мы получаем следующее отождествление (одновременно для всех пар $n$, $m$, где $m$ делит $n$):

Определение 5.3. *Пусть $m$ делит $n$. В этом случае мы отождествляем элементы $\mathbf{M}_m$ и $\mathbf{M}_n$, соответствующие друг другу в стандартном погружении, т. е. $A$ (из $\mathbf{M}_m$) и $A^{+}$ (из $\mathbf{M}_n$) (см. определение 5. 2.) Таким образом, при $m$, делящем $n$, имеем*

$$\mathbf{M}_m \subseteq \mathbf{M}_n. \tag{5.9}$$

Теперь мы можем привести второе предложение и завершить тем самым описание погружений $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$.

Теорема 5.2. *Пусть $m$ делит $n$. Тогда произвольное погружение $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$ может быть получено из стандартного (см. определения 5.2 и 5.3) с последующим преобразованием (в $\mathbf{M}_n$):*

$$A \to UAU^{-1}, \tag{5.10}$$

*где $U$ — фиксированная унитарная матрица в $\mathbf{M}_n$.*

[10] Это оправдывает множитель $1/n$ в (1.8) и (1.10) (см. примеч. 1, 2).

Доказательства теорем 5.1 и 5.2 будут даны, как уже упоминалось, в приложении 1.

Упомянем, наконец, такой факт:

Теорема 5.3. *Каждое погружение есть взаимно однозначное отображение, оставляющее* $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ *и* $t(\cdot)$ *инвариантными.*

Доказательство. Поскольку утверждение верно для стандартного погружения (см. (5.5) и (5.8)), то из теоремы 5.2 и простой проверки для отображения (5.10) следует его справедливость для произвольного отображения [11].

6. Предыдущие рассмотрения позволяют определить множество всех элементов погружений $\mathbf{M}_m$ и $\mathbf{M}_n$, обозначаемое $\mathbf{M}_m^n$. Из теорем 5.1 и 5.2 следует

Теорема 6.1. a) $\mathbf{M}_m^n$ *не пусто тогда и только тогда, когда* $m$ *делит* $n$; b) *если* $m$ *делит* $n$, *то* $\mathbf{M}_m^n$ *есть множество всех* $UAU^{-1}$, *где* $A$ — *элемент* $\mathbf{M}_m$ ($\subseteq \mathbf{M}_n$, *см. определение* 5.2), *а* $U$ — *унитарный элемент* $\mathbf{M}_n$.

Следующая теорема дает непосредственно характеризацию $\mathbf{M}_m^n$ и потому очень удобна для общей ориентации в этих вопросах, впрочем, и она не является необходимой для дальнейшего. Мы докажем ее в приложении 1.

Определение 6.1. *Под системой матричных единиц p-го порядка в* $\mathbf{M}_n$ *мы понимаем* $p^2$ *элементов* $C^{\alpha\beta}$ *из* $\mathbf{M}_n$, $\alpha$, $\beta = 1, \dots p$, *которые обладают следующими свойствами:*

$$C^{\alpha\beta}C^{\gamma\delta} = \begin{cases} C^{\alpha\delta} & \text{для } \beta = \gamma, \\ 0 & \text{для } \beta \neq \gamma, \end{cases}$$
$$(C^{\alpha\beta})^* = C^{\beta\alpha}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} C^{\alpha\alpha} = 1. \tag{6.1}$$

Теорема 6.2. a) *Система матричных единиц p-го порядка существует в* $\mathbf{M}_n$ *тогда и только тогда, когда* $p$ *делит* $n$; b) $A$ *принадлежит* $\mathbf{M}_m^n$ *тогда и только тогда, когда* $m$ *делит* $n$ ($n = mp$) *и* $A$ *коммутирует со всеми элементами по крайней мере одной системы матричных единиц p-го порядка в* $\mathbf{M}_n$.

7. Прежде всего поставим следующий вопрос: какие элементы $\mathbf{M}_n$ принадлежат, или асимптотически принадлежат, некоторому погружению $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$, особенно для $n$, бóльших по сравнению с $m$ (и разумеется делящихся на $m$)?

Другими словами, какие матрицы $n$-го порядка ведут себя, или ведут себя асимптотически, как если бы они были матрицами $m$-го порядка. Важность этой проблемы для алгебры очевидна.

Вопрос особенно интересен в «аппроксимативной» постановке. Точный смысл слов «асимптотически принадлежать некоторому погружению $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$», очевидно, таков: иметь расстояние $\leqslant \varepsilon$ от $\mathbf{M}_m^n$ (см. п. 6) для некоторого $\varepsilon > 0$ либо в метрике, либо в псевдометрике $\mathbf{M}_n$ (см. (1.8), (1.9)). Простое соображение[12] показывает, что выражение «расстояние $\leqslant \varepsilon$ до $\mathbf{M}_m^n$» имеет значение лишь,

[11] $|||UAU^{-1}||| = |||A|||$—очевидно, так как $\xi \to U_\xi$ сохраняет метрику в $\mathfrak{S}_n$, $t(UAU^{-1}) = t(A)$ следует из второй формулы (3.11). Это влечет $\|UAU^{-1}\| = \|A\|$, как показывает последняя формула в (3.11).

[12] А именно, рассмотрение отображения $A \to zA$, где $z$ — фиксированное число, большее нуля.

если мы ограничимся матрицами заданного «размера», например не больше единицы, либо в метрике, либо в псевдометрике в $\mathbf{M}_n$. В частности, возникает вопрос: всякий ли элемент $\mathbf{M}_n$ (подчиненный упомянутому ограничению) обладает этим свойством? Ответ оказывается в конечном счете отрицательным (см. (9.1), (9.3) и теорему 20.2), и мы хотим получить наиболее сильный результат и в этом направлении — именно эти две постановки повлияли на наш выбор метрики и псевдометрики в $\mathbf{M}_n$. Благодаря (3.10) можно выбрать метрику для ответа на первый вопрос (см. выше) и псевдометрику для ответа на второй.

Точная постановка может быть сформулирована следующим образом.

Определение 7.1. *Обозначим через* $\mathfrak{A}_m^n(\varepsilon)$ (*$m$ делит $n$, $\varepsilon > 0$*) *следующее утверждение.*

*Для любого $A$ из $\mathbf{M}_n$, $|||A||| \leqslant 1$, существует такое $B$ из $\mathbf{M}_m^n$, что $\|A - B\| \leqslant \varepsilon$.*

*Другими словами, для любого $A$ из $\mathbf{M}_n$, $|||A||| \leqslant 1$, существует $C$ из $\mathbf{M}_m$ ($\subseteq \mathbf{M}_n$, см. определение 5.3) и унитарный оператор $U$ в $\mathbf{M}_n$, причем $\|A - UCU^{-1}\| \leqslant \varepsilon$.*

Более слабая форма такого утверждения получается, если рассмотреть более абстрактную ситуацию, в которой допускаются погружения $\mathbf{M}_n$ в $\mathbf{M}_o$ ($n$ делит $o$).

Определение 7.2. *Обозначим* $\mathfrak{B}_m^n(\varepsilon)$ (*$m$ делит $n$, $\varepsilon > 0$*) *следующее утверждение: для любого $A$ в $\mathbf{M}_n$ с $|||A||| \leqslant 1$ существует $o$ (делящееся на $n$) и такое $B$ в $\mathbf{M}_m^o$, что $\|A - B\| < \varepsilon$ ($\mathbf{M}_n \subseteq \mathbf{M}_o$ по определению (5.3) и $M_m^o \subseteq M_o$). Другими словами, для всякого $A$ из $\mathbf{M}_n$ ($\subseteq \mathbf{M}_o$ см. выше), $|||A||| \leqslant 1$, существует такое $C$ из $\mathbf{M}_m$ ($\subseteq \mathbf{M}_n \subseteq \mathbf{M}_o$, см. выше) и унитарная матрица $U$ из $\mathbf{M}_o$, что $\|A - UCU^{-1}\| \leqslant \varepsilon$.*

Мы ставим следующие вопросы.

Вопрос 7.1. *Можно ли для всякого $\varepsilon > 0$ найти такое $m = m_1(\varepsilon)$, что $\mathfrak{A}_m^n(\varepsilon)$ верно для всякого $n$, делящегося на $m$?*

Вопрос 7.2. *Можно ли для всякого $\varepsilon > 0$ найти такое $m = m_2(\varepsilon)$, что $\mathfrak{B}_m^n(\varepsilon)$ верно для всякого $n$, делящегося на $m$?*

Так как $\mathfrak{B}_m^n(\varepsilon)$ слабее $\mathfrak{A}_m^n(\varepsilon)$, то ответ «да» на вопрос 7.1 влечет ответ «да» на вопрос 7.2. Мы увидим, что ответом на вопрос 7.1 является «нет» (см. (9.1), (9.3) и теорему 20.2), в то же время мы не в состоянии полностью ответить на вопрос 7.2. Можно высказать догадку, что ответом на вопрос 7.2 будет также «нет», мы надеемся исследовать это в последующих публикациях.

Оставшаяся часть этой работы посвящена вопросу 7.1 и различным его уточнениям

8. Ответ на вопрос 7.1 положителен для некоторых специальных классов матриц: если $A$, $B$, $C$ в определении 7.1 ограничить эрмитовыми, унитарными или — охватывающими оба эти случая — нормальными матрицами. Это будет показано в приложении 2. Но это в точности те матрицы, которые имеют спектральную форму [13]. Поэтому отрицательный ответ на вопрос 7.1 (см. п. 7 выше) будет получен с использованием матриц, не имеющих спектральной формы.

9. Сформулируем точно отрицательный ответ на вопрос 7.1.

[13] Они допускают представление (12.1), (12.12); см. лемму 12.2.

Существует такое $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$, что для всякого $m$ можно выбрать $n = n(m)$, которое делится на $m$ и для которого выполнено отрицание $\mathfrak{A}_m^n(\varepsilon)$ (см. определение 7.1). (9.1)

Поскольку $\mathfrak{A}_m^m(\varepsilon)$ тривиальным образом справедливо, то $n$ должно быть больше $m$, т. е.

$$n = mp, \ p = 2, 3, \ldots \qquad (n = n(m), \ p = p(m)). \qquad (9.2)$$

Более сильная форма утверждения (9.1) получится, если потребовать его выполнение для каждого $p = 2, 3, \ldots$

Существует $\varepsilon = \varepsilon_2 > 0$, такое, что для каждого $m$ и каждого $p (= 2, 3, \ldots)$ выполнено отрицание $\mathfrak{A}_m^{mp}(\varepsilon)$ (см. определение 7.1). (9.3)

Мы докажем справедливость (9.3) (см. теорему 20.2).

Прямой смысл утверждения (9.3) согласно определению 7.1 показывает, что означает «общий элемент $B$ множества $\mathbf{M}_m^{mp}$». Эквивалентное описание таких элементов дается в теореме 7.2. Сопоставляя эти факты, мы приходим к следующей формулировке (9.3):

Для $\varepsilon = \varepsilon_2 > 0$ (см. выше) и любых $m$ и $p$ $(= 2, 3, \ldots)$ существует такое $A$ из $\mathbf{M}_{mp}$, $|||A||| \leqslant 1$, что если $B$ из $\mathbf{M}_{mp}$ коммутирует со всеми элементами системы матричных единиц $p$-го порядка, то $\| A - B \| > \varepsilon$. (9.4)

Элемент $B$ из (9.4) должен коммутировать со всеми элементами $C^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$, системы матричных единиц порядка $p$ из $\mathbf{M}_{mp}$ — отсюда, в частности, и со всеми суммами $\sum_{\alpha=1}^{q} C^{\alpha\alpha}$, $q = 0, 1, \ldots, p$. Далее, $C^{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, p$, есть взаимно ортогональные проекции, каждая ранга $m$ (см. теорему 25.1); последнее позволяет, используя (25.15), выразить ранг для $D^{\alpha\beta}$, следовательно, и для $C^{\alpha\beta}$. Отсюда $t(C^{\alpha\alpha}) = 1/p$ (из 3.12). Так как $E_q = \sum_{\alpha=1}^{q} C^{\alpha\alpha}$ есть также проекция, то $t(E_q) = q/p$. Мы можем выбрать $q = 0, 1, \ldots, p$ таким образом, чтобы $1/4 < q/p < 3/4$ (так как $p = 2, \ldots$, если $p$ четное, то можно взять даже $q/p = 1/2$). Поэтому усиленная форма (9.3) и (9.4):

Для всякого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon_3(\delta) > 0$, для которого при каждом $n (= 1, 2, \ldots)$ найдется $A$ из $\mathbf{M}_n$, $|||A||| \leqslant 1$, причем, если $B$ из $\mathbf{M}_n$ коммутирует с проектором $E$ из $\mathbf{M}_n$ и $\delta < t(E) < 1 - \delta$, то $\| A - B \| > \varepsilon$. (9.5)

Мы докажем, что даже и это утверждение справедливо (см. теорему 20.1). Заменим $mp$ на $n$. Для применения к указанному выше случаю положим $\delta = 1/4$; если $p$ четное, то можно взять всякое $\delta < 1/2$ (см. выше).

Легко показать, что (9.5) эквивалентно следующему:

Для всякого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon_4(\delta)$, для которого при каждом $n (= 1, 2, \ldots)$ можно найти такое $A$ из $\mathbf{M}_n$, $|||A||| < 1$, что для всякого проектора $E$ из $\mathbf{M}_n$, удовлетворяющего условию $\delta < t(E) < 1 - \delta$, выполнено $\|AE - EA\| > \varepsilon$ [14]. (9.6)

Заметим, что ограничение $\delta < t(E) < 1 - \delta$ необходимо (так как $t(E) \leqslant \delta$ или $t(E) \geqslant 1 - \delta$) влечет $\|AE - EA\| \leqslant \varepsilon_5(\delta) = 2\sqrt{\delta}$ [15].

Простое усиление (9.6) (см. примеч. 18) таково:

Для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon_6(\delta) > 0$, для которого при каждом $n (= 1, 2, \ldots)$ имеется такое $A$ из $\mathbf{M}_n$, $|||A||| < 1$, что для всякой эрмитовой матрицы $B$ из $\mathbf{M}_n$, $|||B||| < 1$, соотношение $\|B - t(B)\cdot \mathbf{1}\| \geqslant \delta$ [16] влечет $\|AB - BA\| > \varepsilon$. (9.7)

Отметим, что ограничение $\|B - t(B)\cdot\mathbf{1}\| > \delta$ необходимо, так как $\|B - z \times \times \mathbf{1}\| \leqslant \delta$ для всякого комплексного $z$ влечет $\|AB - BA\| < \varepsilon_7(\delta) = 2\delta$ [17].

Эквивалентность (9.6) и (9.7) устанавливается теоремой 22.1 [18].

---

[14] Эквивалентность (9.5) и (9.6) устанавливается так. Пусть сначала $\|A - B\| \leqslant \varepsilon$, $B$ и $E$ коммутируют, тогда $BE - EB = 0$, отсюда из (3.9) и (3.15) получаем:

$$\|AE - EA\| = \|(A - B)E - E(A - B)\| \leqslant 2\,|||E|||\,\|A - B\| \leqslant 2\cdot 1\cdot\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Предположим теперь, что $\|AE - EA\| \leqslant \varepsilon$. положим $B = EAE + (\mathbf{1} - E)A(\mathbf{1} - E)$. Ясно, что $BE = EB = EAE$, т. е. $B$ и $E$ коммутируют. Применяя опять (3.9) и (3.15), имеем

$$\|A - B\| = \|A - EAE - (\mathbf{1} - E)A(\mathbf{1} - E)\| = \|EA(\mathbf{1} - E) + (\mathbf{1} - E)AE\| =$$
$$= \|(AE - EA)E - E(AE - EA)\| \leqslant 2\,|||E|||\,\|AE - EA\| \leqslant 2\cdot 1\cdot\varepsilon = 2\varepsilon.$$

[15] Применяя к проекции $E$, $t(E) \leqslant \delta$, (3.14), получим $\|AE - EA\| \leqslant 2\,|||A|||\,\|E\| \leqslant 2\cdot 1\cdot\sqrt{\delta} = 2\sqrt{\delta}$. Для $t(E) \geqslant 1 - \delta$ имеем $t(\mathbf{1} - E) \leqslant \delta$ и, используя (3.14) для $\mathbf{1} - E$, получим

$$\|AE - EA\| = \|-A(\mathbf{1} - E) + (\mathbf{1} - E)A\| \leqslant 2\,|||A|||\,\|\mathbf{1} - E\| \leqslant 2\cdot 1\cdot\sqrt{\delta} = 2\sqrt{\delta}$$

Таким образом, в обоих случаях $\|AE - EA\| \leqslant 2\sqrt{\delta}$.

[16] Заметим, что $\|B - t(B)\cdot\mathbf{1}\| > \delta$ означает. что $\|B - z\cdot\mathbf{1}\| > \delta$ для всех комплексных $z$, так как $\|B - z\cdot\mathbf{1}\|$ имеет минимум (для всех комплексных $z$) при $z = t(B)$ — это верно для всех матриц $B$ (см. лемму 21.3).

[17] Имеем $\|AB - BA\| = \|A(B - z\cdot\mathbf{1}) - (B - z\cdot\mathbf{1})A\| \leqslant 2\,|||A|||\,\|B - z\cdot\mathbf{1}\| \leqslant 2\cdot 1\cdot\delta = 2\delta$.

[18] Нетривиален вывод (9.7) из (9.6) — это сделано в цитированной выше теореме. Получить (9.6) из (9.7) легче, это можно сделать так. Ввиду (3.15) (заменяя эрмитову матрицу $B$ на проектор $E$) мы должны доказать лишь следующее: для всякого $\delta > 0$ существует такое $\delta' > 0$, что для проектора $E$, удовлетворяющего условию $\delta < t(E) < 1 - \delta$, выполнено $\|E - t(E)\cdot\mathbf{1}\| > \delta'$. Имеем ($t(E)$ вещественно, так как $E$ эрмитова):

$$\|E - t(E)\cdot\mathbf{1}\|^2 = t(E - t(E)\cdot\mathbf{1})^2 = t(E^2 - 2t(E)E + t(E)^2\cdot\mathbf{1}) = t((1 - 2t(E))E +$$
$$+ t(E)^2\cdot\mathbf{1}) = (1 - 2t(E))\,t(E) + t(E)^2 = (1 - t(E))\,t(E)$$

(см. также вычисления в доказательстве леммы 21.3). Если $\delta < t(E) < 1 - \delta$, то $\delta < 1/2$, и последнее выражение больше $\delta^2$. Отсюда $\|E - t(E)\cdot\mathbf{1}\| > \sqrt{\delta(1 - \delta)}$, и $\delta' = \sqrt{\delta(1 - \delta)} > 0$ удовлетворяет нашим требованиям.

Наконец, обратим внимание на то, что (9.7) может быть легко распространено с эрмитовых $B$ на все нормальные матрицы $B$ (с $\varepsilon = \varepsilon_8(\delta) > 0$ вместо $\varepsilon = \varepsilon_6(\delta) > 0$, но с тем же $A$). Это следует из того, что для нормальных матриц всегда выполнено

$$\| AB - BA \| = \| AB^* - B^*A \|, \tag{9.8}$$

и поэтому, если образовать эрмитовы матрицы $C$, $D$

$$C = (1/2)(B + B^*), \qquad D = (1/2i)(B - B^*), \qquad B = C + iD, \tag{9.9}$$

то из (9.8) получаем

$$\| AC - CA \| \text{ и } \| AD - DA \| \leqslant \| AB - BA \|. \tag{9.10}$$

Но (9.8) есть специальный случай тождества

$$\| AB - BA \|^2 - \| AB^* - B^*A \|^2 = -t\,((A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*)), \tag{9.11}$$

выполненного для всех матриц $A$, $B$ и доказанного в приложении 3.

Тождество (9.11) позволит нам получить даже более общее, чем сформулированное ранее, обобщение (9.7). Это составляет предмет теоремы 23.1.

Доказательства (9.1), (9.3), (9.5)—(9.7) будут даны в основном содержании этой работы без использования теорем п. 5, 6 (т. е. приложения 1). Но, мы надеемся, настоящий пункт дает читателю ясную картину связей между этими утверждениями.

**10.** Настоящие исследования предприняты для достижения целей, обрисованных в конце п. 4. Результаты Ф. Мюррея и автора о кольцах операторов [19] ставят различные проблемы, среди которых одна кажется особенно важной: все ли кольца операторов в гильбертовом пространстве, которые (по терминологии работ, упомянутых в примеч. 8, 19) принадлежат к «конечному, непрерывномерному классу», т. е. к «классу $\mathrm{II}_1$», изоморфны друг другу или нет [20]?

Мы предполагаем, что они не все изоморфны, и результаты этой работы, возможно, помогут установить этот факт. Этот и другие аспекты предмета будут обсуждаться в выходящих публикациях Ф. Мюррея и автора *.

**11.** Метод, с помощью которого будут получены перечисленные в п.9 результаты, состоит главным образом в вычислении и сравнении объемов. Пространство $\mathbf{M}_n$ всех матриц порядка $n$ можно рассматривать как $2n^2$-мерное вещественное евклидово пространство: матрица $A = (a_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa$, $\lambda = 1, \ldots, n$, отождествляется с точкой, у которой $2n^2$ (вещественных) координат — $\Re a_{\varkappa\lambda}$ и $\Im a_{\varkappa\lambda}$ [21], $\varkappa$, $\lambda = 1, \ldots, n$. Тогда объем множества тех $A$ из $\mathbf{M}_n$, которые не обладают желаемым свойством (см. п. 9), меньше, чем объем *псевдосферы* $|||A||| < 1$, что и означает доказательство существования элементов $A$ из $\mathbf{M}_n$, $|||A||| \leqslant 1$, желаемого вида.

Однако мы не можем сделать больше, нежели определить эти объемы. Мы в состоянии только показать, что множество, описанное условием (9.5), имеет объем,

[19] См. ссылки в примеч. 8 относительно колец «класса $\mathrm{II}_1$».

[20] См. примеч. 8 [5, с. 172, проблема 6 для «класса $\mathrm{II}_1$»]. См. также [6, с. 244, теорема XI].

* Примеч. при печати. На вопрос об изоморфизме получен отрицательный ответ в недавнее время Ф. Мюрреем и автором. Доказательство вскоре появится в «Ann. Math.».— См. коммент. к статье.

[21] Для комплексного числа $z = x + iy$, $x$, $y$— вещественные, $\Re$ и $\Im$ означают вещественную и мнимую части: $\Re z = x$, $\Im z = y$.

меньший, чем сфера $\|A\| \leqslant 1$. (Это есть утверждение леммы 17.2.) Это дает (9.5) с условием $\|A\| \leqslant 1$ вместо $|||A||| \leqslant 1$. Отсюда мы можем перейти к (9.6) с условием $\|A\| \leqslant 1$ вместо $|||A||| \leqslant 1$ (см. примеч. 14, а также доказательство леммы 18.1 и теоремы 20.1). Затем мы покажем, используя алгебраические соображения, что в (9.6) можно условие $\|A\| \leqslant 1$ заменить на $|||A||| \leqslant 1$. Эти соображения включают в себя, в частности, технику «вырезания тонкой части спектра» и необходимые изменения $A$ и $\varepsilon_4$ ($\delta$) в (9.6) (см. п. 19, особенно примеч. 29). Из (9.6) более сильное утверждение (9.7) может быть выведено опять-таки упомянутым приемом «разреза вдоль тонкой части спектра» (см. конец п. 9, особенно примеч. 18 и п. 22, особенно примеч. 33). Утверждения (9.5)—(9.7) влекут все результаты, объявленные в п. 9, что и было там отмечено.

Можно избежать специальной процедуры перехода от (множества) $\|A\| \leqslant 1$ к $|||A||| \leqslant 1$ в (9.6), если вычислить объем псевдосферы $|||A||| \leqslant 1$. Действительно, достаточно показать, что он не меньше объема сферы $\|A\| \leqslant \eta$ для некоторого фиксированного $\eta > 0$ (не зависящего от $n$) [22].

Мы не преуспели, однако, в установлении такого результата и хотели лишь повторить некоторые предположения об этом.

В противоположность этой алгебраической части наших рассмотрений их основа — в сравнении описанных выше объемов. Теперь подчеркнем, что этот *«объемометрический»* метод дает доказательства существования, но *не является конструктивным*, т. е. не позволяет указать, *какие же* $A$ из $\mathbf{M}_n$ обладают свойствами, перечисленными в п. 9. Это не может удовлетворять нас, так как одна из наших целей — найти, какими алгебраическими свойствами может обладать $A$ из $\mathbf{M}_n$, хотя бы аппроксимативно, подобно свойствам, фигурирующим в п. 9. Поэтому мы считаем, что, хотя объемометрический метод кажется весьма мощным для проверки существования, он должен быть дополнен более прямым алгебраическим методом, который называет нужный элемент $A$ из $\mathbf{M}_n$ точно.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

0. Общий характер работы.
1. Матричное исчисление.
2. Общие основы унитарной геометрии.
3. Дальнейшие факты матричного исчисления.
4. Асимптотическое поведение $M_n$ при $n \to \infty$ и теории гильбертова пространства.
5. Способы погружения $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$.

---

[22] Если рассматривать $|||A||| \leqslant 1$ вместо $\|A\| \leqslant 1$, нужно соответственно изменить лемму 17.2 Это повлечет замену 1 в правой части неравенства (17.11) на

$$\frac{\text{Объем псевдосферы } |||A||| \leqslant 1}{\text{Объем сферы } \|A\| \leqslant 1}$$

Если предположение в тексте верно, то мы можем (используя (17.10)) положить

$$\frac{\text{Объем сферы } \|A\| \leqslant \eta}{\text{Объем сферы } \|A\| \leqslant 1} = \eta^{2n}$$

Такую же замену нужно сделать в правой части (17.11). Это приведет к умножению правой части (17.14) на $1/\eta^2$, что не меняет оставшейся части доказательства.

6. Определение $M_m^n$. Матричные единицы.
7. Формулировка двух главных вопросов.
8. Специальный случай матриц со спектральной формой.
9. Обсуждение первого вопроса п. 7 и различные алгебраические уточнения этого вопроса.
10. Связь с теорией конечных непрерывномерных колец операторов.
11. Должен использоваться смешанный метод: объемометрическая часть и алгебраическая часть.
Глава I. Вспомогательные результаты о матрицах.
12. Унитарные нормальные формы матриц.
13. Представление унитарных матриц эрмитовыми матрицами и некоторые неравенства, опирающиеся на него.
Глава II. Вычисление объемов в пространстве матриц.
14. Сферическое покрытие различных множеств матриц.
15. Продолжение.
16. Заключение.
17. Объемометрическое доказательство существования некоторого класса матриц.
Глава III. Алгебраическое развитие тезиса (9.5).
18. Исключение зависимости от $n$ в предыдущих результатах.
19. Замена в предыдущих результатах неравенства $\| A \| \leqslant 1$ на $\||A\|| \leqslant 1$ с помощью алгебраического метода.
20. Применение к утверждениям п. 9.
Глава IV. Алгебраический вывод утверждения (9.7).
21. Предварительные леммы.
22. Вывод (9.7).
23. Обобщение (9.7).
Приложение 1.
24. Постановка вопроса.
25. Определение всех систем матричных единиц.
26. Определение всех погружений.
27. Определение множества $M_m^n$.
Приложение 2.
28. Постановка задачи.
29. Аппроксимация нормальных матриц
Приложение 3.
30. Постановка задачи.
31. Доказательство тождества.
Литература.

## Глава I

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О МАТРИЦАХ

**12.** Мы докажем сначала две известные общие леммы о некоторых унитарных нормальных формах матриц. Обе леммы понадобятся далее, кроме того, первая из них есть база для второй; впрочем, вторая лемма может быть также доказана несколькими прямыми способами.

Лемма 12.1. *Всякая матрица $A$ в $\mathbf{M}_n$ может быть представлена в следующей форме*:

$$A = UGU^{-1}, \tag{12.1}$$

$U$ — унитарная, $G$ — полудиагональная, т. е. $G = (g_{\varkappa\lambda})$, $g_{\varkappa\lambda} = 0$ для $\varkappa < \lambda$.

Доказательство. Проведем индукцию. Для $n = 1$ предложение очевидно: положим $U = \mathbf{1}$, $G = A$. Пусть $n = 2, 3, \dots$ и предложение доказано для $n - 1$. Рассмотрим матрицу $A = (a_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \dots, n$. Рассмотрим характеристическое уравнение для $A$:

$$\operatorname{Det}(A - z\cdot\mathbf{1}) \equiv \operatorname{Det}(a_{\varkappa\lambda} - z\delta_{\varkappa\lambda}) = 0. \tag{12.2}$$

Пусть $z = z_1$ — корень (12.2). Тогда существует такой вектор $\xi = (x_\varkappa)$, $\xi \neq \mathbf{0}$, что $(A - z_1\cdot\mathbf{1})\,\xi = \mathbf{0}$, т. е.

$$A\xi = z_1\xi. \tag{12.3}$$

Поскольку $\xi \neq \mathbf{0}$, $\sum_{\varkappa=1}^{n} |x_\varkappa|^2 = |\xi|^2 > 0$, можно заменить $\xi$ на $\frac{1}{|\xi|}\xi$, поэтому получаем

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |x_\varkappa|^2 = 1 \tag{12.4}$$

при сохранении (12.3).

Благодаря (12.4) можно найти унитарную матрицу $V = (v_{\varkappa\lambda})$, $v_{\varkappa n} = x_\varkappa$ [23].

Отсюда, если положить

$$V^{-1}AV = H = (h_{\varkappa\lambda}), \tag{12.5}$$

получим $H = V^{-1}AV = V^*AV$, $h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\iota,\pi=1}^{n} \bar{v}_{\iota\varkappa} a_{\iota\pi} v_{\pi\lambda}$, и поэтому для $\varkappa < \lambda = n$ из (12.3) (поскольку $v_{\varkappa n} = x_\varkappa$)

$$h_{\varkappa n} = \sum_{\iota,\pi=1}^{n} \bar{v}_{\iota\varkappa} a_{\iota\pi} v_{\pi n} = z_1 \sum_{\iota=1}^{n} \bar{v}_{\iota\varkappa} v_{\iota n} = 0, \quad \text{т. е.}$$

$$h_{\varkappa n} = 0 \text{ для } \varkappa < n. \tag{12.6}$$

Рассмотрим теперь матрицу $(n - 1)$-го порядка $H' = (h_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \dots, n - 1$. В силу индукционного предложения (12.1) для $n - 1$ существует такая унитарная матрица $(n - 1)$-го порядка $W = (w_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \dots, n - 1$, что

---

[23] $\xi = (x_\varkappa)$, $\varkappa = 1, \dots, n$, есть нормированный вектор в $\mathfrak{E}_n$. Мы можем дополнить его до полной ортонормированной системы векторов в $\mathfrak{E}_n$: $\xi_\lambda = (x_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa = 1, \dots, n$. Она имеет в точности $n$ элементов, т. е. $\lambda = 1, \dots, n$. Можно расположить ее так, что $\xi_n = \xi$, т. е. $x_{\varkappa n} = x_\varkappa$. Поскольку векторы $\xi_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, n$, образуют полную нормированную ортогональную систему, матрица $V = (v_{\varkappa\lambda})$, $v_{\varkappa\lambda} = x_{\varkappa\lambda}$, — унитарна, а $v_{\varkappa n} = x_{\varkappa n} = x_\varkappa$.

$$W'^{-1}H'W' = G' = (g'_{\varkappa\lambda}), \qquad \varkappa,\ \lambda = 1, \dots n-1,$$
$$g'_{\varkappa\lambda} = 0 \qquad \text{для } \varkappa < \lambda. \tag{12.7}$$

Определим теперь

$$W = (w_{\varkappa\lambda}), \qquad \varkappa,\ \lambda = 1, \dots, n,$$

$$w_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{для } \varkappa = \lambda = n, \\ 0 & \text{для } \varkappa < \lambda = n \quad \text{или } \lambda < \varkappa = n, \\ w'_{\varkappa\lambda} & \text{для } \varkappa,\ \lambda < n. \end{cases} \tag{12.8}$$

Тогда $W$ есть унитарная матрица $n$-го порядка, и если положить

$$W^{-1}HW = G = (g_{\varkappa\lambda}), \tag{12.9}$$

то $G = W^{-1}HW = W^*HW$, $g_{\varkappa\lambda} = \sum\limits_{\iota,\pi=1}^{n} \bar{w}_{\iota\varkappa} h_{\iota\pi} w_{\pi\lambda}$, отсюда и из (12.6) — (12.9) получаем

$$g_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{для} \quad \varkappa < \lambda = n, \qquad g_{\varkappa\lambda} = g'_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{для} \quad \varkappa < \lambda < n,$$

т. е.

$$g_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{для} \quad \varkappa < \lambda, \tag{12.10}$$

(12.5) и (12.9) дают вместе

$$A = VWG\,(V,W)^{-1}. \tag{12.11}$$

Поэтому если положить $U = VW$, то $U$ унитарна, и (12.10), (12.11) дают вместе (12.1).

Лемма 12.2. *Пусть матрица $A$ из $\mathrm{M}_n$ задана в форме* (12.1). *Тогда $A$ нормальна, т. е. $AA^* = A^*A$, в том и только том случае, если*

$$G \text{ диагональна: } G = (g_{\varkappa\lambda}), \qquad g_{\varkappa\lambda} = 0 \text{ для } \varkappa \neq \lambda. \tag{12.12}$$

Доказательство. *Достаточность.* Если $A$ имеет форму (12.1) и выполнено (12.12), то $A$ нормальна, так как диагональная матрица $G$ нормальна и преобразование $G \to UGU^{-1}$ ($U$ унитарна) сохраняет нормальность.

*Необходимость.* Пусть $A$ нормальна и задана в форме (12.1). Так как преобразование $A \to U^{-1}AU$ ($U$ унитарна) сохраняет нормальность, то полудиагональная матрица $G$ также нормальна. Положим $G^*G = GG^* = B = (b_{\varkappa\lambda})$ и вычислим $b_{\varkappa\varkappa}$. Два предыдущих представления $B$ дают

$$\sum_{\lambda=1}^{n} |g_{\lambda\varkappa}|^2 = \sum_{\lambda=1}^{n} |g_{\varkappa\lambda}|^2 = b_{\varkappa\varkappa}.$$

Так как $g_{\iota\pi} = 0$ для $\iota < \pi$ и член $|g_{\varkappa\varkappa}|^2$ встречается в обеих частях равенства, получаем

$$\sum_{\lambda>\varkappa} |g_{\lambda\varkappa}|^2 = \sum_{\lambda<\varkappa} |g_{\varkappa\lambda}|^2. \tag{12.13}$$

Пусть $\varkappa = n$, тогда (12.13) дает $g_{n\lambda} = 0$ для всех $\lambda < n$. Положим $\varkappa = n - 1$, тогда (12.13) дает $g_{n-1,\lambda} = 0$ для всех $\lambda < n - 1$. Положим $\varkappa = n - 2$, тогда (12.13) дает $g_{n-2,\lambda} = 0$ для всех $\lambda < n - 2$ и т. д. и т. д. Поэтому $g_{\varkappa\lambda} = 0$ для $\varkappa \neq \lambda$, что есть в точности (12.12).

13. Установим некоторые связи между унитарными матрицами $U$ и эрмитовыми матрицами $A$ с условием $|||\, A \,||| \leqslant 1$.

Лемма 13.1. *Если $A$ — эрмитова матрица, то:*

a) *матрица* $1 + iA$ [24] *имеет обратную;*

b) $|||\,(1 + iA)^{-1}\,||| \leqslant 1$;

c) $(1 - iA)/(1 + iA)$ *унитарна.*

Доказательство. Поскольку $A$ эрмитова и, следовательно, нормальна, можно предположить, что она имеет нормальную форму (12.1), (12.12). Эрмитовость, как и свойства a)—c), не изменяется при преобразовании $A \to U^{-1}AU$ ($U$ унитарна), поэтому мы можем рассматривать диагональную матрицу $G$ вместо $A$; $G$ есть эрмитова диагональная матрица, следовательно, ее диагональные элементы $g_{11}, \ldots, g_{nn}$ вещественны.

Докажем: a) $1 + iG$ — диагональная матрица с диагональными элементами $1 + ig_{11}, \ldots, 1 + ig_{nn}$, все они отличны от нуля, поэтому $1 + iG$ обратима. b) $(1 + iG)^{-1}$ — диагональная матрица с диагональными элементами $(1 + ig_{11})^{-1}, \ldots, (1 + ig_{nn})^{-1}$, для каждого из них $|\cdot| \leqslant 1$, и отсюда немедленно следует, что $|||\,(1 + iG)^{-1}\,||| \leqslant 1$.

c) $(1 - iG)/(1 + iG)$ — диагональная матрица с диагональными элементами $(1 - ig_{11})/(1 + ig_{11}), \ldots, (1 - ig_{nn})/(1 + ig_{nn})$, для каждого из этих чисел $|\cdot| = 1$, и отсюда сразу же следует, что $(1 - iG)/(1 + iG)$ унитарна.

Лемма 13.2. *Пусть $A$ и $B$ — эрмитовы матрицы. Тогда*

$$\left|\left|\left| \frac{1 - iA}{1 + iA} - \frac{1 - iB}{1 + iB} \right|\right|\right| \leqslant 2\, |||\, A - B \,|||. \tag{13.1}$$

Доказательство. Поскольку $(1 - iA)/(1 + iA) = 2(1 + iA)^{-1} - 1$, то $(1 - A)/(1 + B) - (1 - iB)/(1 + iB) = 2((1 + iA)^{-1} - (1 + iB)^{-1})$. Поэтому (13.1) следует из

$$|||\,(1 + iA)^{-1} - (1 + iB)^{-1}\,||| \leqslant \|\, A - B \,\|, \tag{13.2}$$

что мы докажем далее. Имеем

$$(1 + iA)^{-1} - (1 + iB)^{-1} = (1 + iA)^{-1}((1 + iB) - (1 + iA))(1 + iB)^{-1} =$$
$$= -i(1 + iA)^{-1}(A - B)(1 + iB)^{-1},$$

$$|||\,(1 + iA)^{-1} - (1 + iB)^{-1}\,||| \leqslant |||\,(1 + iA)^{-1}\,|||\;|||\,A - B\,|||\;|||\,(1 + iB)^{-1}\,|||.$$

По лемме 13.1, b) $|||\,(1 + iA)^{-1}\,|||$ и $|||\,(1 + iB)^{-1}\,||| \leqslant 1$, откуда следует (13.2).

[24] Здесь $i$ — мнимая единица, $i^2 = -1$ (см. примеч. 21).

Лемма 13.3. a) *Всякая унитарная матрица $U$ может быть представлена в форме*

$$U = \left(\frac{1-iA}{1+iA}\right)^2, \tag{13.3}$$

*где $A$ — эрмитова матрица с $|||A|||\leqslant 1$.*

b) *Для любых двух эрмитовых матриц $A$, $B$ и любой матрицы $C$ выполнено*

$$\left\|\left(\frac{1-iA}{1+iA}\right)^2 C\left(\frac{1-iA}{1+iA}\right)^{-2} - \left(\frac{1-iB}{1+iB}\right)^2 C\left(\frac{1-iB}{1+iB}\right)^{-2}\right\| \leqslant 8\,\|C\|\,|||A-B|||. \tag{13.4}$$

Доказательство. a) $U$ унитарна и, следовательно, нормальна, поэтому можно предположить, что она задана в нормальной форме (12.1), (12.12). (Будем писать $U$, $V$, $G$ вместо $A$, $U$, $G$.) Унитарность, равно как и (13.3), сохраняется при преобразовании $U \to V^{-1}UV$ (и $A \to V^{-1}AV$, $V$ унитарна). Поэтому можно рассматривать диагональную матрицу $G$ вместо $U$. Так как $G$ — унитарная диагональная матрица, то для всех ее диагональных элементов $g_{11}, \ldots, g_{nn}$, $|g_{\varkappa\varkappa}| = 1$, $\varkappa = 1, \ldots, n$.

Так как $|g_{\varkappa\varkappa}| = 1$, можно положить

$$g_{\varkappa\varkappa} = x_\varkappa^2, \qquad |x_\varkappa| = 1, \qquad \Re x_\varkappa \geqslant 0, \tag{13.5}$$

и поэтому

$$x_\varkappa = \frac{1-iy_\varkappa}{1+iy_\varkappa}, \qquad |y_\varkappa| \leqslant 1, \quad y_\varkappa \text{ вещественно.} \tag{13.6}$$

Определим теперь $A$ как диагональную матрицу с диагональными элементами $y_1, \ldots, y_n$. Так как для них $|\cdot|\leqslant 1$, то легко вывести, что $|||A|||\leqslant 1$; поскольку все они вещественны, то $A$ эрмитова. Из (13.5) и (13.6) $((1-iA)/(1+iA))^2$ — диагональная матрица с диагональными элементами $g_{11}, \ldots, g_{nn}$, т. е. $G$.

b) Это утверждение следует из (13.1), так же как и неравенства

$$\|V_1CV_1^{-1} - V_2CV_2^{-1}\| \leqslant 2\,\|C\|\,|||V_1 - V_2|||, \tag{13.7}$$

где $V_1$ и $V_2$ унитарны, и

$$|||U_1^2 - U_2^2||| \leqslant 2\,|||U_1 - U_2|||, \tag{13.8}$$

$U_1$ и $U_2$ также унитарны.

(Положим $U_1 = (1-iA)/(1+iA)$, $U_2 = (1-iB)/(1+iB)$ и $V_1 = U_1^2$, $V_2 = U_2^2$.) Поэтому осталось доказать (13.7) и (13.8).

Докажем (13.7): $V_1CV_1^{-1} - V_2CV_2^{-1} = (V_1CV_1^{-1} - V_1CV_2^{-1}) + (V_1CV_2^{-1} - V_2CV_2^{-1}) = V_1C(V_1^{-1} - V_2^{-1}) + (V_1 - V_2)CV_2^{-1} = V_1C(V_1^* - V_2^*) + (V_1 - V_2)CV_2^*$, $\|V_1CV_1^{-1} - V_2CV_2^{-1}\| \leqslant |||V_1|||\,\|C\|\,|||V_1^* - V_2^*||| + |||V_1 - V_2|||\,\|C\|\,|||V_2^*||| = 1\cdot\|C\|\,|||V_1 - V_2||| + |||V_1 - V_2|||\,\|C\|\cdot 1 = 2\cdot\|C\|\,|||V_1 - V_2|||$.

Докажем (13.8): $U_1^2 - U_2^2 = U_1(U_1 - U_2) - (U_1 - U_2)U_2$, $|||U_1^2 - U_2^2||| \leqslant |||U_1|||\,|||U_1 - U_2||| + |||U_1 - U_2|||\,|||U_2||| = 2\,|||U_1 - U_2|||$.

## Глава II

## ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МАТРИЦ

**14.** Изучим вопросы следующего типа: сколько сфер радиуса $\eta$ достаточно для покрытия некоторого данного множества в пространстве матриц? Число $\eta > 0$ будет варьироваться. Рассматриваемые множества матриц будут иметь возрастающую сложность, и в конце концов возникнет множество, фигурирующее в (9.5) (см. определение 7.1 и лемму 17.2). Затем мы сможем сравнить объем этого множества с объемом сферы $\| A \| \leqslant 1$ и отсюда сделать заключения, приведенные в п. 11.

Определение 14.1. *Множество всех эрмитовых матриц $A$, $||| A ||| \leqslant \leqslant 1$, из $\mathbf{M}_n$ будет обозначаться $\mathbf{H}_n$. Для данной матрицы $C$ из $\mathbf{M}_n$ множество всех матриц $UCU^{-1}$, где $U$ унитарна, будет обозначаться $\mathbf{U}_n(C)$.*

Лемма 14.1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $q = q_1(n, \varepsilon) = 1, 2, \ldots$ со следующими свойствами:*

a) *$\mathbf{H}_n$ можно покрыть $q$ псевдосферами радиуса $\varepsilon$ с центрами $A_1, \ldots, A_q$ в $\mathbf{H}_n$. Таким образом, для всякого $A$ из $\mathbf{H}_n$*

$$||| A - A_\alpha ||| \leqslant \varepsilon \text{ для некоторого } \alpha = 1, \ldots, q; \tag{14.1}$$

b)
$$q \leqslant ((2+\varepsilon)/\varepsilon)^{n^2}. \tag{14.2}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $q = 1, 2, \ldots, n$ и такое множество точек $A_1, \ldots, A_q$ из $\mathbf{H}_n$, что

$$||| A_\alpha - A_\beta ||| \geqslant \varepsilon \qquad \text{для } \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, q. \tag{14.3}$$

Рассмотрим пространство всех эрмитовых элементов $A = (a_{\varkappa\lambda})$ в $\mathbf{M}_n$. Они характеризуются условиями $a_{\varkappa\lambda} = \overline{a_{\lambda\varkappa}}$, т. е.

$$a_{\varkappa\varkappa} \text{ вещественно, } a_{\varkappa\lambda} = \overline{a_{\lambda\varkappa}} \text{ для } \varkappa > \lambda. \tag{14.4}$$

Отсюда $A$ задается $n^2$ вещественными числами:

$$a_{\varkappa\varkappa}, \ \Re a_{\varkappa\lambda} \text{ и } \Im a_{\varkappa\lambda} \text{ для } \varkappa < \lambda. \tag{14.5}$$

Поэтому мы можем рассматривать это пространство как $n^2$-мерное вещественное линейное пространство, обозначим $n^2$ вещественных чисел $x_1, \ldots, x_{n^2}$ (в некотором порядке) и будем обращаться с ними как с координатами. Можно определить обычным образом элемент объема $dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_{n^2}$. Псевдометрика $||| \cdot |||$ в $\mathbf{M}_n$ определяет метрику на этом пространстве, которую мы снова назовем псевдометрикой. Объем псевдосферы радиуса $\eta$ в этом пространстве не зависит понятным образом от ее центра и пропорционален $\eta^{n^2}$. Поэтому имеем

Объем псевдосферы радиуса $\eta$ в описанном пространстве равен $c_n \eta^{n^2}$. (14.6)

Теперь в силу (14.3) псевдосферы радиуса $\varepsilon/2$ с центрами $A_1, \ldots, A_q$ в этом пространстве попарно не пересекаются и все они содержатся в псевдосфере радиуса $1 + \varepsilon/2$ с центром 0. Поэтому (14.6) дает $q c_n (\varepsilon/2)^{n^2} \leqslant c_n (1 + \varepsilon/2)^{n^2}$ и

$$q \leqslant ((2+\varepsilon)/\varepsilon)^{n^2}. \tag{14.7}$$

Таким образом, все $q$ ограничены ($n$ и $\varepsilon$ фиксированы) и мы можем выбрать максимальное $q$. Сделаем это и выберем соответствующие точки $A_1, \ldots, A_q$ в $\mathbf{M}_n$. Рассматриваемое $q$ удовлетворяет (14.7), т. е. утверждение b) доказано.

Рассмотрим теперь произвольное $A$ из $\mathbf{H}_n$. Для выбранных $A_1, \ldots, A_q$ и $A_{q+1} = A$ условие (14.3) не выполнено из-за максимальности $q$. С другой стороны, для $A_1, \ldots, A_q$ (14.3) выполнено. Поэтому (14.1) справедливо. Следовательно, имеет место a).

Лемма 14.2. *Для всякой матрицы $C$ из $\mathbf{M}_n$ и $\varepsilon > 0$ существует число $q = q_1(n, \varepsilon) = 1, 2, \ldots$ со следующими свойствами:*

a) $\mathbf{U}_n(C)$ *может быть покрыто $q$ сферами*[26] *радиуса $8\|C\|\varepsilon$ с центрами $B_1, \ldots, B_q$ из $\mathbf{U}_n(C)$, т. е. для каждой $B$ из $\mathbf{U}_n(C)$ имеем*

$$\|B - B_\alpha\| \leqq 8\|C\|\varepsilon \text{ для некоторого } \alpha = 1, \ldots, q; \tag{14.8}$$

b)
$$q \leqslant ((2+\varepsilon)/\varepsilon)^{n^2}. \tag{14.9}$$

Доказательство. Выберем $q$ и $A_1, \ldots, A_q$ в соответствии с леммой 14.1. Положим

$$B_\alpha = \left(\frac{1 - iA_\alpha}{1 + iA_\alpha}\right)^2 C \left(\frac{1 - A_\alpha}{1 + iA_\alpha}\right)^{-2}$$

и применим лемму 13.3.

15. Предмет этого пункта в основном тот же, что и в п. 14.

Определение 15.1. *Пусть $p = 1, \ldots, n-1$ и $r \geqslant 1$, обозначим через $\mathbf{E}_{n,p,r}$ множество всех матриц $C = (c_{\varkappa\lambda})$* из $\mathbf{M}_n$, $\|C\| \leqslant r$, *и*

$$c_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{для } \varkappa < \lambda \text{ и } \varkappa > p \geqslant \lambda. \tag{15.1}$$

Лемма 15.1. *Для заданных $p = 1, \ldots, n-1$, $r \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ существует число $q = q_2(n, p, r, \varepsilon) = 1, 2, \ldots$ со следующими свойствами:* a) *$\mathbf{E}_{n,p,r}$ может быть покрыто $q$ сферами радиуса $\varepsilon$ с центрами $C_1, \ldots, C_q$ из $\mathbf{E}_{n,q,r}$, т. е. для всякого $C$ из $\mathbf{E}_{n,p,r}$ имеем*

$$\|C - C_\alpha\| \leqslant \varepsilon \quad \text{для некоторого } \alpha = 1, \ldots, q; \tag{15.2}$$

b)
$$q \leqslant ((2r+\varepsilon)/\varepsilon)^{2p^2 - 2np + n^2 + n} \tag{15.3}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $q = 1, 2, \ldots$ и такое множество $C_1, \ldots, C_q$ из $\mathbf{E}_{n,p,r}$, что

$$\|C_\alpha - C_\beta\| > \varepsilon \qquad \text{для } \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, q. \tag{15.4}$$

Рассмотрим пространство всех тех элементов $C = (c_{\varkappa\lambda})$ из $\mathbf{M}_n$, для которых выполнено условие (15.1). Число пар $\varkappa, \lambda (= 1, \ldots, n)$, вообще говоря отличных от нуля в (15.1), очевидно, равно $n(n+1)/2 - p(n-p) = {}^1/_2(2p^2 - 2np + n^2 + n)$. Следовательно, $C$ характеризуется следующими $(2p^2 - 2pn + n^2 + n)$

---

[26] Обратим внимание на различие между леммами 14.2 и 14.1, в последней речь идет о псевдосферах, в то время как в первой — о сферах.

вещественными числами:

$\Re c_{\varkappa\lambda}$ и $\Im c_{\varkappa\lambda}$ для пар $\varkappa$, $\lambda$ $(=1, \ldots, n)$, не упоминаемых в условии (15.1). (15.5)

Поэтому мы можем рассматривать это пространство как $(2p^2 - 2pn + n^2 + n)$-мерное вещественное линейное пространство, обозначая $2p^2 - 2pn + n^2 + n$ вещественных чисел в (15.5) через $x_1, \ldots, x_{2p^2-2pn+n^2+n}$ (в некотором порядке) и обращаясь с ними как с координатами. Можно определить элемент объема обычным образом: $dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_{2p^2-2pn+n^2+n}$. $\| C \|$ в $\mathbf{M}_n$ выражает метрику в этом пространстве, мы будем называть ее метрикой. Объем сферы радиуса $\eta$ в этом пространстве не зависит от центра и пропорционален $\eta^{2p^2-2pn+n^2+n}$. Поэтому

Объем сферы радиуса $\eta$ в описанном пространстве равен $d_{n,p}\eta^{2p^2-2pn+n^2+n}$. (15.6)

Далее, сферы радиуса $\varepsilon/2$ с центрами $C_1, \ldots, C_q$ в этом пространстве попарно не пересекаются. Все они содержатся в сфере радиуса $r + \varepsilon/2$ с центром в 0. Поэтому (15.6) дает

$$q d_{n,p} (\varepsilon/2)^{2p^2-2pn+n^2+n} \leqslant d_{n,p} (r + \varepsilon/2)^{2p^2-2pn+n^2+n},$$

$$q \leqslant ((2r + \varepsilon)/\varepsilon)^{2p^2-2pn+n^2+n}. \tag{15.7}$$

Таким образом, все рассматриваемые $q = 1, 2, \ldots$ ограничены ($n$, $p$, $r$ и $\varepsilon$ фиксированы), и мы можем выбрать $q$ максимальным. Сделаем это и выберем также $C_1, \ldots, C_n$ из $\mathbf{E}_{n,p,r}$; $\mathbf{E}_{n,p,r}$; найденное $q$ удовлетворяет (15.7), т. е. условию b). Рассмотрим теперь $C$ из $\mathbf{E}_{n,p,r}$. Для выбранных $C_1, \ldots, C_q$ и $C_{q+1} = C$ условие (15.4) не выполнено из-за максимальности $q$. С другой стороны, оно выполнено для $C_1, \ldots, C_q$ согласно (15.4). Поэтому (15.2) выполнено. Таким образом, a) также имеет место.

16. Теперь мы соединим результаты п. 14 и 15.

Определение 16.1. *Пусть* $p = 1, \ldots, n - 1$ *и* $r \geqslant 1$, *множество матриц* $A$ *из* $\mathbf{M}_n$, $\| A \| \leqslant r$, *коммутирующих с каким-либо проектором* $E$, $t(E) = p/n$, *обозначим через* $\mathbf{F}_{n,p,r}$.

Лемма 16.1. *Пусть* $p = 1, \ldots, n - 1$ *и* $r \geqslant 1$, *множество* $\mathbf{F}_{n,p,r}$ *состоит из всех матриц вида* $UCU^{-1}$, *где* $U$ *унитарна, а* $C$ *принадлежит* $\mathbf{E}_{n,p,r}$.

Доказательство. Рассмотрим проектор $E$ и пусть $t(E) = p/n$. Так как $E$ эрмитов и, следовательно, нормален, то можно считать, что он задан в нормальной форме (12.1), (12.12). Свойство быть проектором сохраняется при преобразованиях $E \to U^{-1}EU$ ($U$ унитарна). Следовательно, диагональная матрица $G$ есть проектор и $t(G) = p/n$. Это означает для ее диагональных элементов, что

$$\text{Всегда } g_{\varkappa\varkappa} = 0 \text{ или } 1,$$

$$g_{\varkappa\varkappa} = 1 \text{ в точности для } p \text{ значений } \varkappa = 1, \ldots, n. \tag{16.1}$$

Перестановка столбцов $U$ (индекс $\lambda$) и совместная перестановка строк и столбцов $G$ (индексы $\varkappa$, $\lambda$) оставляют (12.1), (12.12) неизменными, и при надлежа-

щем их выборе можно усилить (16.1) следующим образом:

$$g_{\varkappa\varkappa} = \begin{cases} 1 \text{ для } \varkappa = 1, \ldots, p, \\ 0 \text{ для } \varkappa = p+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{16.2}$$

Будем использовать (16.2). Таким образом, всякий проектор $E$, такой, что $t(E) = p/n$, имеет форму

$E = UGU^{-1}$, $U$ унитарная, $G = (g_{\varkappa\lambda})$ — диагональная матрица вида (16.2). (16.3)

Наоборот, всякий элемент вида (16.3) обладает нужным свойством, поскольку им обладает $G$, а преобразование $G \to UGU^{-1}$ ($U$ унитарна) оставляет его неизменным. Поэтому коммутирование $A$ с таким $E$ равносильно коммутированию с $UGU^{-1}$ ($U$ унитарна, $G$ — из (16.2)), т. е. тому, что $U^{-1}AU$ коммутирует с $G$, или же тому, что $A = UCU^{-1}$, где $C$ коммутирует с $G$. Коммутирование $C = (c_{\varkappa\lambda})$ с $G$ означает в силу (16.2), что

$$c_{\varkappa\lambda} = 0 \qquad \text{для } \varkappa \leqslant p < \lambda \text{ и } \varkappa > p \geqslant \lambda. \tag{16.4}$$

Кроме того, преобразование $C \to UCU^{-1}$ ($U$ унитарна) сохраняет $\| \cdot \|$ инвариантной, следовательно, условие $\| A \| \leqslant r$ эквивалентно условию $\| C \| \leqslant r$. Итак, мы видим, что

$A$ принадлежит $\mathrm{F}_{n,p,r}$ тогда и только тогда, когда $A = UCU^{-1}$, где $U$ унитарна, $\|C\| \leqslant r$, $C$ удовлетворяет (16.4). (16.5)

Рассмотрим теперь матрицу $n$-го порядка, удовлетворяющую (16.4). Образуем две матрицы:

$C' = (c_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, p$, $p$-го порядка;

$C'' = (c_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = p+1, \ldots, n$, $(n-p)$-го порядка[26]. (16.6)

Применим лемму 12.1 к $C'$, $C''$, тогда

$C' = U'G'U'^{-1}$, $U' = (u_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, p$, унитарна;

$G' = (g'_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, p$, полудиагональна: $g_{\varkappa\lambda} = 0$ для $\varkappa < \lambda$.

$C'' = U''G''U''^{-1}$, $U'' = (u''_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = p+1, \ldots n$, унитарна;

$G'' = (g''_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = p+1, \ldots n$, полудиагональна: $g''_{\varkappa\lambda} = 0$ для $\varkappa < \lambda$. (16.7)

Тем же способом, каким $C$ образована из $C'$ и $C''$ в соответствии с (16.4) и (16.6), образуем матрицу $n$-го порядка $G_0$ из $G'$ и $G''$ и матрицу $n$-го порядка $U_0$ из $U'$ и $U''$. В результате получим

$$C = (c_{\varkappa\lambda}), \quad c_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} c'_{\varkappa\lambda} & \text{для } \varkappa, \lambda \leqslant p, \\ c''_{\varkappa\lambda} & \text{для } \varkappa, \lambda > p, \\ 0 & \text{для } \varkappa \leqslant p < \lambda \text{ и для } \varkappa > p \geqslant \lambda; \end{cases}$$

[26] Для $\varkappa$ и $\lambda$ используются индексы $p+1, \ldots, n$ вместо $1, \ldots, n-p$.

$$G_0 = (g^0_{\varkappa\lambda}), \quad g^0_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} g'_{\varkappa\lambda} & \text{для } \varkappa,\ \lambda \leqslant p, \\ g''_{\varkappa\lambda} & \text{для } \varkappa,\ \lambda > p, \\ 0 & \text{для } \varkappa \leqslant p < \lambda \text{ и для } \varkappa > p \geqslant \lambda; \end{cases} \tag{16.8}$$

$$U_0 = (u^0_{\varkappa.\lambda}), \quad u^0_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} u_{\varkappa\lambda} & \text{для } \varkappa,\ \lambda \leqslant p, \\ u''_{\varkappa\lambda} & \text{для } \varkappa,\ \lambda > p, \\ 0 & \text{для } \varkappa \leqslant p < \lambda \text{ и для } \varkappa > p \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Унитарность $U'$, $U''$ влечет унитарность $U$, а (16.7) дает $C = U_0 G_0 U_0^{-1}$. Поэтому

$$C = U_0 G_0 U_0^{-1}, \quad U_0 \text{ унитарна.} \tag{16.9}$$

Сопоставляя (16.7), (16.8), получим

$$g^0_{\varkappa\lambda} = 0 \qquad \text{для } \varkappa < \lambda \text{ и для } \varkappa > p \geqslant \lambda. \tag{16.10}$$

В силу (16.9) мы можем заменить $U$, $C$ на $UU_0$, $G_0$ в (16.5), причем для $G_0$ выполнено более сильное требование (16.10), которое совпадает с (15.1), вместо (16.4). Итак, мы можем заменить (16.4) на (15.1) в формулировке (16.5). Это означает, что $C$ в (16.5) может быть выбрано из $\mathrm{E}_{n,p,r}$. Доказательство завершено.

Лемма 16.2. *Для всяких $p = 1, \ldots, n-1$, $r \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$ существует число $q = q_3(n, p, r, \varepsilon) = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющее следующим условиям:* a) $\mathrm{F}_{n,p,r}$ *может быть покрыто $q$ сферами радиуса $(8r+1)\,\varepsilon$ с центрами $A_1, \ldots, A_q$ из $\mathrm{E}_{n,p,r}$, т. е. для любой $A$ из $\mathrm{E}_{n,p,r}$ имеем*

$$\| A - A_\alpha \| \leqslant (8r+1)\,\varepsilon \qquad \text{для некоторого } \alpha = 1, \ldots, q; \tag{16.11}$$

b)
$$q \leqslant ((2r+\varepsilon)/\varepsilon)^{2p^2-2pn+2n^2+n}. \tag{16.12}$$

Доказательство. Применим лемму 15.1, обозначив через $q'$ число $q$ из этой леммы и через $C_1, \ldots, C_{q'}$ — центры. Для каждого $C_{\alpha'}$, $\alpha' = 1, \ldots, q'$, применим лемму 14.2, обозначая через $q''_\alpha$ число $q$ из этой леммы и через $B_{\alpha',1}, \ldots, B_{\alpha',q''_\alpha}$ — центры сфер. Теперь поступим так. Рассмотрим $A$ из $\mathrm{F}_{n,p,r}$. По лемме 16.1 имеем $A = UCU^{-1}$, $U$ унитарна, $C$ — из $\mathrm{E}_{n,p,r}$. Поэтому из (15.2) получим $\| C - C_{\alpha'} \| \leqslant \varepsilon$ для некоторого $\alpha' = 1, \ldots, q'$. Но $\| A - UC_{\alpha'}U^{-1} \| = \| U(C - C_{\alpha'})U^{-1} \| = \| C - C_\alpha \|$, отсюда

$$\| A - UC_{\alpha'}U^{-1} \| \leqslant \varepsilon \text{ для некоторой унитарной матрицы } U \text{ и некоторого } \alpha' = 1, \ldots, q'. \tag{16.13}$$

$UC_{\alpha'}U^{-1}$ лежит в $\mathrm{U}_n(C_{\alpha'})$, следовательно, по (14.8)

$$\| UC_{\alpha'}U^{-1} - B_{\alpha',\alpha''} \| \leqslant 8r\varepsilon \text{ для некоторого } \alpha'' = 1, \ldots, q''_{\alpha'}. \tag{16.14}$$

Комбинируя (16.13) и (16.14), получаем

$$\| A - B_{\alpha'\alpha''} \| \leqslant (8r+1)\,\varepsilon \text{ для некоторых } \alpha' = 1, \ldots, q' \text{ и } \alpha'' = 1, \ldots, q''_{\alpha'}. \quad (16.15)$$

Заметим, что $B_{\alpha'\alpha''}$ принадлежит $\mathbf{U}_n(C_{\alpha'})$, поэтому $B_{\alpha',\alpha''} = U_{\alpha',\alpha''} C_{\alpha'} U^{-1}_{\alpha',\alpha''}$, где $U_{\alpha',\alpha''}$ унитарна, а $C_{\alpha'}$ — из $\mathbf{E}_{n,p,r}$; поэтому $B_{\alpha',\alpha''}$ лежит в $\mathbf{F}_{n,p,r}$ по лемме (16.1). Число всех $B_{\alpha',\alpha''}$, фигурирующих в (16.15), равно $q = \sum_{\alpha'=1}^{q'} q''_{\alpha'}$, и по (14.9) и (15.3) для него верно

$$q \leqslant ((2+\varepsilon)/\varepsilon)^{n^2} ((2r+\varepsilon)/\varepsilon)^{2p^2-2pn+n^2+n},$$

т. е.

$$q \leqslant ((2r+\varepsilon)/\varepsilon)^{2p^2-2pn+2n^2+n}. \quad (16.16)$$

Поэтому, записав $B_{\alpha'\alpha''}$ в последовательность $A_1, \ldots, A_q$, мы выведем a) из (16.15), a b) — из (16.16).

17. Теперь мы в состоянии получить решающую лемму о «покрытии» (см. начало п. 14).

Определение 17.1. *Пусть заданы* $\delta$, $0 < \delta < 1/2$, и $\varepsilon > 0$; *множество всех матриц* $A$ *из* $\mathbf{M}_n$, $\| A \| \leqslant 1$, *для которых существует* $B$ *из* $\mathbf{M}_n$, $\| A - B \| \leqslant \varepsilon$, *и проектор* $E$ *из* $\mathbf{M}_n$, $\delta < t(E) < 1 - \delta$, *с которым коммутирует* $B$, *обозначим через* $\mathbf{K}_{\delta,\varepsilon}$.

Лемма 17.1. *Для любого* $\delta$, $0 < \delta < 1/2$, *и* $\varepsilon > 0$ *существует число* $q = q_4(n, \delta, \varepsilon) = 1, 2, \ldots$ *со следующими свойствами*: a) $\mathbf{K}_{\delta,\varepsilon}$ *может быть покрыто* $q$ *сферами радиуса* $(10 + 8\varepsilon)\,\varepsilon$ *с центрами* $A_1, \ldots, A_q$, *т. е. для всякой матрицы* $A$ *из* $\mathbf{K}_{\delta,\varepsilon}$ *имеем*

$$\| A - A_\alpha \| \leqslant (10 + 8\varepsilon)\,\varepsilon \text{ для некоторого } \alpha = 1, \ldots, q; \quad (17.1)$$

b)
$$q \leqslant n\,((2 + 3\varepsilon)/\varepsilon)^{2(1-\delta(1-\delta))n^2+n}. \quad (17.2)$$

Доказательство. Рассмотрим $A$ из $\mathbf{K}_{\delta,\varepsilon}$. Существует $B$ и проектор $E$, причем $\| A - B \| \leqslant \varepsilon$, $\delta < t(E) < 1 - \delta$, $B$, $E$ коммутируют. Так как $\| A \| \leqslant 1$, то

$$\| B \| \leqslant 1 + \varepsilon. \quad (17.3)$$

Далее, $t(E) = p/n$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, следовательно,

$$t(E) = p/n, \quad \delta n < p < (1-\delta)\,n, \qquad p = 1, \ldots, n-1. \quad (17.4)$$

Поэтому

$$B \text{ принадлежит } \mathbf{F}_{n,p,1+\varepsilon} \text{ и } \delta n < p < (1-\delta)\,n. \quad (17.5)$$

Применим теперь лемму 16.2 ко всем $\mathbf{F}_{n,p,1+\varepsilon}$, обозначая через $q'_p$ число $q$ из этой леммы и центры — через $A'_{p,1}, \ldots, A'_{p,q'_p}$. В силу (16.11) $\| B' - A'_{p,\alpha'} \| \leqslant (8\varepsilon + 9)\,\varepsilon$ для некоторого $p$, $\delta n < p < (1-\delta)\,n$, и некоторого $\alpha' = 1, \ldots q_p$. (Здесь $r = 1 + \varepsilon$.) Это вместе с $\| A - B \| \leqslant \varepsilon$ дает

$$\| A - A'_{p,\alpha'} \| \leqslant (10 + 8\varepsilon)\,\varepsilon \text{ для некоторого } p,$$

$$\delta n < p < (1-\delta)\,n, \text{ и некоторого } \alpha' = 1, \ldots, q'_p. \quad (17.6)$$

Число всех $A_{p,\alpha'}$, участвующих в (17.6), равно $q = \sum_{\delta n < p < (1-\delta)n} q_p$, и в силу (16.12) это не больше, чем $\sum_{\delta n < p < (1-\delta)n} ((2+3\varepsilon)/\varepsilon)^{2p^2-2pn+2n^2+n}$ (напомним, что $r = 1+\varepsilon$). Число слагаемых в сумме не превышает $n$, а показатель

$$2p^2 - 2pn + 2n^2 + n = 2(n^2 - p(n-p)) + n < 2(1-\delta(1-\delta))n^2 + n.$$

Отсюда

$$q \leqslant n((2+3\varepsilon)/\varepsilon)^{2(1-\delta(1-\delta))n^2+n}. \tag{17.7}$$

Поэтому если мы запишем $A_{p,\alpha'}$ в последовательность $A_1, \ldots, A_q$, то a) выполнено в силу (17.6), а b) — в силу (17.7).

Теперь мы можем получить утверждение, близкое к (9.5), с помощью объемометрического метода. Следующая лемма отличается от (9.5) двумя ограничениями. Первое ограничение состоит в том, что $n > n_0(\delta)$, а второе в том, что условие $|||A||| \leqslant 1$ заменено на $\|A\| \leqslant 1$. (По поводу последнего см п. 11.) Мы снимем оба ограничения впоследствии с помощью других методов (см. п. 18 и главным образом п. 19).

Лемма 17.2. *Для любого $\delta > 0$ существуют такие $n = n_0(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon_1(\delta) > 0$, что для всякого $n > n_0$ можно найти такое $A = A_1(n, \delta)$ из $\mathbf{M}_n$, $\|A\| \leqslant 1$, что если $B$ из $\mathbf{M}_n$ коммутирует с проектором $E$ из $\mathbf{M}_n$ и $\delta < t(E) < 1-\delta$, то $\|A - B\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Можно предполагать, что $0 < \delta < 1/2$, так как иначе предположения относительно $E$ несовместны. Предположим, что дано $\delta$, $0 < \delta < 1/2$, а также $n = 1, 2, \ldots$ и $\varepsilon > 0$; пусть не существует $A$ из $\mathbf{M}_n$, описанного в лемме. Изучим следствия из этой гипотезы. Очевидно, мы можем утверждать, что

Множество $\mathbf{K}_{\delta,\varepsilon}$ содержит целиком сферу $\|A\| < 1$ в $\mathbf{M}_n$. (17.8)

Рассмотрим пространство $\mathbf{M}_n$. Его общий элемент $A = (a_{\varkappa\lambda})$ характеризуется следующими $2n^2$ числами:

$$\Re a_{\varkappa\lambda} \text{ и } \Im a_{\varkappa\lambda}, \qquad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n. \tag{17.9}$$

Поэтому можно рассматривать его как $2n^2$-мерное линейное пространство, считая $2n^2$ чисел (17.9) координатами и обозначая их $x_1, \ldots, x_{2n^2}$ (в некотором порядке). Можно определить объемы с помощью известного элемента объема $dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_{2n^2}$. Метрика $\|\cdot\|$ в $\mathbf{M}_n$ порождает метрику в этом пространстве, и мы будем называть ее снова метрикой. Объем сферы радиуса $\eta$ в этом пространстве, очевидно, не зависит от центра и пропорционален $\eta^{2n^2}$. Поэтому имеем

Объем сферы радиуса $\eta$ в описанном пространстве $e_n\eta^{2n^2}$. (17.10)

Лемма 17.1 дает вместе с (17.8) и (17.10)

$$n((2+3\varepsilon)/\varepsilon)^{2(1-\delta(1-\delta))n^2+n} \cdot e_n((10+8\varepsilon)\varepsilon)^{2n^2} \geqslant e_n$$

или

$$n((2+3\varepsilon)/\varepsilon)^{2(1-\delta(1-\delta))n^2+n}((10+8\varepsilon)\varepsilon)^{2n^2} \geqslant 1. \tag{17.11}$$

Предположим, что

$$n \geqslant [\delta(1-\delta)]^{-1}. \tag{17.12}$$

Тогда $\delta(1-\delta)n^2 \geqslant n$, и поэтому (17.11) дает

$$n\left(\frac{2+3\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{(2-\delta(1-\delta))n^2}((10+8\varepsilon)\varepsilon)^{2n^2} \geqslant 1,$$

$$n(2+3\varepsilon)^{(2-\delta(1-\delta))n^2}(10+8\varepsilon)^{2n^2}\varepsilon^{\delta(1-\delta)n^2} \geqslant 1, \tag{17.13}$$

$$n(2+3\varepsilon)^{2n^2}(10+8\varepsilon)^{2n^2}\varepsilon^{\delta(1-\delta)n^2} \geqslant 1.$$

Так как $n(1/2)^{n^2} < 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то из (17.13) следует

$$(2+3\varepsilon)^2(10+8\varepsilon)^2\varepsilon^{\delta(1-\delta)} > {}^1/_2. \tag{17.14}$$

Для любого заданного $\delta$ левая часть (17.14) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда существует $\varepsilon = \varepsilon_1'(\delta) > 0$, для которого (17.14) не верно. Поэтому существование $n \geqslant n_0 = n_0(\delta) = [\delta(1-\delta)]^{-1}$ (см. (17.12) выше) и $\varepsilon = \varepsilon_1(\delta) > 0$ указывает на противоречие с нашей исходной гипотезой, следовательно, гарантировано существование $A$ в $\mathbf{M}_n$, указанного в лемме. Доказательство полностью завершено.

## Глава III

## АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЙ (9.5), (9.6) И (9.3)

18. Перейдем теперь от утверждения, эквивалентного (9.5), к утверждению, эквивалентному (9.6), с теми же оговорками (см. замечание перед леммой 17.2).

Лемма 18.1. *Для всякого $\delta > 0$ существуют такие $n_0 = n_0(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon_2'(\delta) > 0$, что для каждого $n \geqslant n_0$ можно указать $A = A_1(n, \delta)$ из $\mathbf{M}_n$, $\|A\| \leqslant 1$, причем для всякого проектора $E$ из $\mathbf{M}_n$, для которого $\delta < t(E) < 1-\delta$, выполнено неравенство $\|EA - AE\| > \varepsilon$.*

Доказательство. Выберем $n_0 = n(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon_1(\delta) > 0$ так же, как в лемме 17.2, предполагая $n \geqslant n_0$, и найдем $A = A_1(n, \delta)$, как в той же лемме. Рассмотрим проектор $E$ из $\mathbf{M}_n$ с $\delta < t(E) < 1-\delta$. Положим $B = EAE + (1-E)A(1-E)$. Очевидно, $EB = BE = AEA$, поэтому $B$, $E$ коммутируют, и, следовательно, по лемме 17.2

$$\|A - B\| > \varepsilon'. \tag{18.1}$$

Теперь вспомним, что согласно (7.15) $|||E||| \leqslant 1$,

$$A - B = A - EAE - (1-E)A(1-E) = EA(1-E) + (1-E)AE =$$
$$= (AE - EA)E + E(AE - EA),$$

$$\|A - B\| \leqslant \|AE - EA\|\,|||E||| + |||E|||\,\|AE - EA\| \leqslant 2\|AE - EA\|,$$

отсюда и из (18.1) получаем

$$\|AE - EA\| > {}^1/_2\varepsilon'. \tag{18.2}$$

Поэтому $\varepsilon = \varepsilon_2(\delta) = {}^1/_2\varepsilon' = {}^1/_2\varepsilon_1'(\delta) > 0$ удовлетворяет нашим требованиям.

Освободимся теперь от требования $n \geqslant n_0(\delta)$. Это будет сделано в два приема.

Лемма 18.2. *Лемма* 18.1 *справедлива для любого* $n$, *если допустить зависимость* $\varepsilon$ от $n$: $\varepsilon = \varepsilon_3'(n, \delta) > 0$.

Доказательство. Нам необходимо найти $A = A(n, \delta)$ из $\mathbf{M}_n$, $\|A\| \leqslant 1$, которое не коммутирует ни с одним проектором $E$ из $\mathbf{M}_n$, где $\delta < t(E) < 1-\delta$. Действительно, такие $E$ образуют замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{M}_n$[27] и на этом множестве $AE - EA$ не обращается в нуль, т. е. $\|AE - EA\| > 0$. Так как это выражение непрерывно относительно $E$[28], оно принимает минимальное значение на множестве таких проекторов, скажем $\varepsilon_3''(n, \delta)$, причем $\varepsilon_3''(n, \delta) > 0$. Следовательно, $\varepsilon = \varepsilon_3'(n, \delta) = {}^1/_2\varepsilon_3''(n, \delta) > 0$ обладает нужным свойством.

Остается найти явно указанное ранее $A$. Положим

$$A = (a_{\varkappa\lambda}), \qquad a_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{для } \varkappa + 1 = \lambda, \\ 0 & \text{для остальных значений.} \end{cases} \tag{18.3}$$

Ясно, что $\|A\| = \sqrt{(n-1)/n} < 1$.

Простое вычисление показывает, что $G = (g_{\varkappa\lambda})$ коммутирует с $A$ тогда и только тогда, когда

$$g_{\varkappa-1,\lambda} = g_{\varkappa,\lambda+1} \qquad (g_{-1,\lambda} \text{ и } g_{\varkappa,n-1} \text{ считаются нулями}) \tag{18.4}$$

Это эквивалентно:

$$g_{\varkappa\lambda} \begin{cases} \text{зависит лишь от } \varkappa - \lambda & \text{для } \varkappa \geqslant \lambda, \\ \text{равно } 0 & \text{для } \varkappa < \lambda. \end{cases} \tag{18.5}$$

Таким образом, $G$ полудиагональна. Отсюда если $G$ нормальна, то она должна быть диагональна по лемме 12.2. Это вместе с (18.5) дает:

$$\text{Если } G \text{ — нормальна, то } G = z\cdot\mathbf{1} \quad (z = g_{11}). \tag{18.6}$$

Если матрица $G$ — проектор и, следовательно, нормальна, то $G = z\cdot\mathbf{1}$ в силу (18.6). Поэтому $z = 0$ или 1, т. е. $G = 0$ или 1, $t(G) = 0$ или 1. Это исключает $\delta < t(G) < 1 - \delta$. Доказательство завершено.

Лемма 18.3. *Требование* $n > n_0 = n_0(\delta)$ (*в лемме* 18.1) *может быть опущено, если* $\varepsilon = \varepsilon_2(\delta)$ *заменить на другое* $\varepsilon = \varepsilon_4'(\delta) > 0$.

Доказательство. Используя леммы 18.1 и 18.2, имеем

$$\varepsilon_4'(\delta) = \min(\varepsilon_3(1, \delta), \ldots, \varepsilon_3'(n_0(\delta), \delta), \varepsilon_2'(\delta)).$$

[27] Несущественно, какая топология в $\mathbf{M}_n$ рассматривается, т. е. в нашей метрике измеряется расстояние между $A = (a_{\varkappa\lambda})$ и $B = (b_{\varkappa\lambda})$ в $\mathbf{M}_n$ — $\|A-B\|$ или $|||A-B|||$. Это важно в тех случаях, когда мы рассматриваем равномерность по $n$, которая в данном случае не важна. Здесь мы рассматриваем каждый элемент $a_{\varkappa\lambda}$ как отдельную координату $A$.

Проекторы $E = (e_{\varkappa\lambda})$, удовлетворяющие условию $\delta < t(E) < 1 - \delta$, или иначе $t(E) = q/n$, где $q = 1, \ldots, n - 1$, $\delta n < q < (1 - \delta)n$, выделяются алгебраическими уравнениями относительно $e_{\varkappa\lambda}$ и, следовательно, образуют замкнутое множество.

[28] Непрерывность по переменной $A = (a_{\varkappa\lambda})$ в $\mathbf{M}_n$ понимается относительно топологии, указанной в примеч. 27. Отсюда ясна непрерывность по переменным $a_{\varkappa\lambda}$. Мы рассматриваем $\|AE-EA\|$ как функцию от $E = (e_{\varkappa\lambda})$ при фиксированном $A$; эта функция непрерывна очевидным образом в смысле, описанном выше.

**19.** Мы можем теперь установить (9.6) полностью, т. е. заменить условие $\| A \| \leqslant 1$ в лемме 18.3 (см. лемму 18.1) на $||| A ||| \leqslant 1$. Настоящий пункт полностью посвящен этой задаче.

Рассмотрим сначала матрицу $A$ из $\mathbf{M}_n$, относительно которой не предполагается ничего, кроме

$$\| A \| \leqslant 1. \tag{19.1}$$

Поскольку $A^*A$ эрмитова, положительно определенная и, следовательно, нормальна, то можно считать, что она задана в нормальной форме (12.1), (12.12). (Будем писать $A^*A$, $U$, $G$ вместо $A$, $U$, $G$.) Поэтому имеем:

$$A^*A = UGU^{-1},\ U \text{ унитарна};$$
$$G \text{ — диагональная: } G = (g_{\varkappa\lambda}),\ g_{\varkappa\lambda} = 0 \text{ для } \varkappa \neq \lambda. \tag{19.2}$$

Так как эрмитовость, положительная определенность, равно как и след, сохраняются при преобразованиях $B \to U^{-1}BU$ (применим это к $B = AA^*$, $U$ унитарна), то диагональная матрица $G$ эрмитова, положительно определена и (см. 19.1) $t(G) = t(A^*A) = \| A \|^2 \leqslant 1$. Все это вместе дает

$$g_{11}, \ldots, g_{nn} \geqslant 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} g_{\varkappa\varkappa} \leqslant 1. \tag{19.3}$$

Введем число $\tau = 1, 2, \ldots$, которое определится в конце пункта. Для каждого

$$\theta = 0,\ 1, \ldots, 2\tau - 2 \tag{19.4}$$

образуем следующее множество:

$$\Gamma_\theta: \text{множество всех } \varkappa\,(= 1, \ldots, n), \text{ для которых } \tau^\theta \leqslant g_{\varkappa\varkappa} < \tau^{\theta+1}. \tag{19.5}$$

Элементы множества $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2\tau-2}$ попарно дизъюнктны.

Это дает с учетом (19.3) $\sum_{\theta=0}^{2\tau-2} \frac{1}{n} \sum_{\varkappa \in \Gamma_\theta} g_{\varkappa\varkappa} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} g_{\varkappa\varkappa} \leqslant 1$. Отсюда число тех $\theta\,(=0, 1, \ldots, 2\tau - 2)$, для которых $\frac{1}{n} \sum_{\varkappa \in \Gamma_\theta} g_{\varkappa\varkappa} > \frac{1}{\tau}$, не может быть больше $\tau$. Иными словами,

$$\frac{1}{n} \sum_{\varkappa \in \Gamma_\theta} g_{\varkappa\varkappa} \leqslant \frac{1}{\tau} \qquad \text{для } \theta\,(= 0, 1, \ldots, 2\tau - 2),$$

$$\text{за исключением не более чем } \tau - 1 \text{ значений } \theta^{[2b]}. \tag{19.6}$$

---

[2b] Неравенство (19.6) реализует операцию «вырезания тонкой части спектра» (в данном случае оператора $A^*A$; для другого примера см. примеч. 33). Смысл ее проявится впервые в (19.11), а затем в (19.14), (19.19)—(19.24), равно как и в (19.27). Более грубая оценка в (19.6) (мы имеем в виду $1/\tau$ в правой части вместо, казалось бы, естественной 1) дала бы вместо множителя $1/\tau^{\theta+1}$ в правой части указанных неравенств множитель $1/\tau^\theta$. Наш выбор множителя

Рассмотрим $\theta\,(=0,\ 1,\ \dots,\ 2\tau-2)$, которое удовлетворяет (19.6). Образуем следующие множества:

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta&: \text{ множество всех } \varkappa\,(=1,\ \dots,\ n), \text{ для которых } g_{\varkappa\varkappa}<\tau^\theta,\\
\Theta_\theta=\Gamma_\theta&: \text{ множество всех } \varkappa\,(=1,\ \dots,\ n), \text{ для которых } \tau^\theta<g_{\varkappa\varkappa}<\tau^{\theta+1},\\
Z_\theta&: \text{ множество всех } \varkappa\,(=1,\ \dots,\ n), \text{ для которых } g_{\varkappa\varkappa}>\tau^{\theta+1}.
\end{aligned}\tag{19.7}$$

Из (19.6)

$$\frac{1}{\tau}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{\varkappa\in\Gamma_\theta}g_{\varkappa\varkappa}=\frac{1}{n}\sum_{\varkappa\in\Theta_\theta}g_{\varkappa\varkappa}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{\varkappa\in\Theta_\theta}\tau^\theta=(\text{Число элементов в } \Theta_\theta)\cdot\tau^\theta/n,$$

$$(\text{Число элементов в } \Theta_\theta)/n\leqslant 1/\tau^{\theta+1}.\tag{19.8}$$

В силу (19.3)

$$1\geqslant\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}g_{\varkappa\varkappa}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{\varkappa\in Z_\theta}g_{\varkappa\varkappa}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{\varkappa\in Z_\theta}\tau^{\theta+1}=(\text{Число элементов в } Z_\theta)\cdot\tau^{\theta+1}/n,$$

$$(\text{Число элементов в } Z_\theta)/n\leqslant 1/\tau^{\theta+1}.\tag{19.9}$$

Образуем далее множество

$$\Delta'_\theta=\Theta_\theta+Z_\theta, \text{ т. е. дополнение к } \Delta_\theta \text{ в } (1,\ \dots,\ n):\text{ множество всех}$$
$$\varkappa=(1,\ \dots,\ n), \text{ для которых } g_{\varkappa\varkappa}\geqslant\tau^\theta.\tag{19.10}$$

Из (19.8) и (19.9) следует

$$(\text{Число элементов в } \Delta'_\theta)/n\leqslant 2/\tau^{\theta+1}.\tag{19.11}$$

Построим проектор

$$E'_\theta=(e_{\theta/\varkappa\lambda}),\qquad e_{\theta/\varkappa\lambda}=\begin{cases}1, & \varkappa=\lambda \text{ из } \Delta'_\theta,\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}\tag{19.12}$$

и диагональную матрицу

$$G'_\theta=(g'_{\theta/\varkappa\lambda}),\qquad g_{\theta/\varkappa\lambda}=\begin{cases}g_{\varkappa\varkappa} & \text{для } \varkappa=\lambda \text{ из } \Delta_\theta,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}\tag{19.13}$$

Немедленно проверяется, что

$$t\,(E'_\theta)\leqslant 2/\tau^{\theta+1}\ \ (\text{из (19.11)}),\tag{19.14}$$

$$|||\,G_\theta\,|||\leqslant\tau^\theta\ \ (\text{из (19.7)})\tag{19.15}$$

и

$$(1-E'_\theta)\,G\,(1-E'_\theta)=G'_\theta.\tag{19.16}$$

---

является решающим. В случае более грубой оценки множители $1/\tau^{\theta+1}$, $1/\tau^{(\theta+1)/2}$, $1/\tau^{\theta+1}$, $1/\tau^{1/2}$, $1/\tau^{1/2}$ в (19.32), (19.33), (19.35), (19.36), (19.38) были бы заменены на $1/\tau^\theta$, $1/\tau^{\theta/2}$, $1/\tau^\theta$, 1, 1, а с ними (19.38) нельзя удовлетворить для достаточно малых $\varepsilon$.

Образуем идемпотент

$$F'_\theta = UE'_\theta U^{-1}. \tag{19.17}$$

(19.16), (19.2) и (19.17) дают

$$(1 - F'_\theta) A^*A (1 - F'_\theta) = UG'_\theta U^{-1}. \tag{19.18}$$

Поскольку $t(\cdot)$ и $|||\cdot|||$ сохраняются при преобразовании $B \to UBU^{-1}$ (применим это к $B = E'_\theta$ и к $B = G'_\theta$, $U$ унитарна), то (19.4) дает

$$t(F_\theta) \leqslant 2/\tau^{\theta+1}, \tag{19.19}$$

и (19.15), (19.18) дают

$$|||(1 - F'_\theta) A^*A (1 - F'_\theta)||| \leqslant \tau^\theta. \tag{19.20}$$

Поскольку

$$(1 - F'_\theta) A^*A (1 - F'_\theta) = (A(1 - F'_\theta))^* A (1 - F'_\theta),$$

(19.20) влечет

$$|||A(1 - F'_\theta)||| \leqslant \tau^{\theta/2}\ ^{30}. \tag{19.21}$$

Если $F$ — проекция, большая, чем $F'_\theta$, то $1 - F \leqslant 1 - F'_\theta$, следовательно, $A(1-F) = A(1 - F'_\theta)(1 - F)$ и поэтому из (19.21) и $|||(1 - F)||| \leqslant 1$ (см. (3.15)) получаем в совокупности

$$|||A(1 - F)||| \leqslant \tau^{\theta/2}. \tag{19.22}$$

Комбинируя ограничения (19.6) с (19.19) и (19.22), получаем следующее:

Для всех $\theta (= 0, 1, \ldots, 2\tau - 2)$, с не более чем $\tau - 1$ исключениями, проекция $F'_\theta$ обладает следующими свойствами:

a) $\quad t(F'_\theta) \leqslant 2/\tau^{\theta+1}$;

b) $\quad$ для всякой проекции $F \geqslant F'_\theta \quad |||A(1 - F)||| \leqslant \tau^{\theta/2}$. $\quad$ (19.23)

Поскольку $\|A^*\| = \|A\|$, то условие (19.1) позволяет применить (19.23) к $A^*$ вместо $A$. Имея также в виду, что

$$|||A^*(1 - F)||| = |||(1 - F) A^*||| = |||(1 - F) A|||,$$

мы можем установить.

Для всех $\theta = (0, 1, \ldots 2\tau - 2)$, за исключением не более чем $\tau - 1$, проекции $F''_\theta$ обладают следующими свойствами:

a) $\quad t(F''_\theta) \leqslant 2/\tau^{\theta+1}$

b) $\quad$ для каждой проекции $F \geqslant F''_\theta \quad |||(1 - F) A||| \leqslant \tau^{\theta/}$. $\quad$ (19.24)

---

[30] Именно величина $\tau^{\theta/2}$ делает различие между $1/\tau^{(\theta+1)/2}$ и $1/\tau^{\theta/2}$, указанное в примеч 29, решающим

В силу (19.23) и (19.24) число этих всех исключений равно $2\tau-2$. Число же всех $\theta$ ($= 0, 1, \ldots, 2\tau - 2$) равно $2\tau - 1$. Поэтому существует такое $\theta$, что (19.23) и (19.24) выполнены одновременно. Рассмотрим это $\theta$.

Пусть $F_\theta$ — проектор на линейное подпространство, являющееся суммой подпространств, отвечающих проекторам $F'_\theta$ и $F''_\theta$. Его размерность не превышает суммы их размерностей, т. е.

$$\mathrm{Rank}\,(F_\theta) \leqslant \mathrm{Rank}\,(F'_\theta) + \mathrm{Rank}\,(F''_\theta).$$

Из (3.13) вытекает такое же соотношение для $t(\cdot)$. Поэтому (19.23), a) и (19.24), a) дают

$$t(F_\theta) \leqslant 4/\tau^{\theta+1}. \tag{19.25}$$

Так как $F_\theta \geqslant F'_\theta$ и $F_\theta \geqslant F''_\theta$, то (19.23), b) и (19.24), b) можно применить к $F = F_\theta$. Кроме того, $A - F_\theta A F_\theta = A(1 - F_\theta) + (1 - F_\theta) A F_\theta$. Учитывая, что (по (3.15)) $|||F_\theta||| \leqslant 1$, все это вместе дает

$$|||A - F_\theta A F_\theta|| \leqslant 2\tau^{\theta/2}. \tag{19.26}$$

Комбинируя замечание после (19.24) с (19.25) и (19.26), получаем следующее:

Существует $\theta$ ($= 0, 1, \ldots, 2\tau - 2$), для которого проектор $F_\theta$ обладает свойствами:

a)
$$t(F_\theta) \leqslant 4/\tau^{\theta+1};$$

b)
$$|||A - F_\theta A F_\theta||| \leqslant 2\tau^{\theta/2}. \tag{19.27}$$

Пусть выбрано $\delta' > 0$. Рассмотрим $\delta > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon'_4(\delta) > 0$, а также $A = A_1(n, \delta)$ согласно лемме 18.3, пусть $\varepsilon' > 0$, $\tau = 1, 2, \ldots$ Мы определим величины $\delta$, $\varepsilon'$, $\tau$ лишь в конце пункта. Применим (19.27) к $A$ и выберем $\theta = \theta(A, \tau) = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2\tau - 2$ и $F_\theta = F_\theta(A, \tau)$ соответственно. Положим

$$A' = {}^1/_2\tau^{-\theta/2}(A - F_\theta A F_\theta). \tag{19.28}$$

Из (19.27) выводим

$$|||A'||| \leqslant 1. \tag{19.29}$$

Предположим теперь, что существует проектор $E$ и

$$\delta < t(E) < 1 - \delta', \tag{19.30}$$

$$\|A'E - EA'\| < \varepsilon'. \tag{19.31}$$

Изучим следствия этих предположений. Образуем проектор $E'_\theta$, линейное подпространство которого есть сумма таких подпространств для проекторов $E$ и $F_\theta$. Размерность этого подпространства не превосходит сумму размерностей этих двух подпространств

$$\mathrm{Rank}\,(E'_\theta) \leqslant \mathrm{Rank}\,(E) + \mathrm{Rank}\,(F_\theta).$$

Из (13.13) соответствующее соотношение выполнено, если заменить $\mathrm{Rank}\,(\cdot)$ на $t(\cdot)$. Отсюда (19.27), a) дает $t(E'_\theta) \leqslant t(E) + 4/\tau^{\theta+1}$, т. е.

$$t(E'_\theta - E) \leqslant 4/\tau^{\theta+1}. \tag{19.32}$$

Так как $E'_\theta \geqslant E$, то $E'_\theta - E$ есть также проектор, и поэтому (19.32) дает (с учетом (3.14))

$$\| E'_\theta - E \| \leqslant 2/\tau^{(\theta+1)/2}. \tag{19.33}$$

Из (19.30) и (19.32) следует

$$\delta < t(E'_\theta) < 1 - \delta, \tag{19.34}$$

если предположить, что

$$\delta + 4/\tau^{\theta+1} \leqslant \delta'. \tag{19.35}$$

Из (19.29) и (19.33)

$$\| A'(E'_\theta - E) - (E'_\theta - E)A' \| \leqslant 2 ||| A' ||| \, \| E'_\theta - E \| \leqslant 4/\tau^{(\theta+1)/2}.$$

Вместе с (19.32) имеем

$$\| A'E'_\theta - E'_\theta A' \| \leqslant \varepsilon' + 4/\tau^{(\theta+1)/2},$$

учитывая (19.28), получаем

$$\| (A - F_\theta A F_\theta) E'_\theta - E'_\theta (A - F_\theta A F_\theta) \| \leqslant 2\tau^{\theta/2}\varepsilon' + 8/\tau^{1/2}. \tag{19.36}$$

Так как $E'_\theta \geqslant F_\theta$, то $F_\theta A F_\theta \cdot E'_\theta - E'_\theta \cdot F_\theta A F_\theta = F_\theta A F_\theta - F_\theta A F_\theta = 0$, следовательно, $\| AE'_\theta - E'_\theta A \| \leqslant 2\tau^{\theta/2}\varepsilon' + 8/\tau^{1/2}$ и поэтому

$$\| AE_\theta - E'_\theta A \| \leqslant \varepsilon, \tag{19.37}$$

если

$$2\tau^{\theta/2}\varepsilon' + 8/\tau^{1/2} \leqslant \varepsilon, \tag{19.38}$$

что мы и будем предполагать.

Так как выбор $\varepsilon = \varepsilon_4(\delta) > 0$ и $A = A(n, \delta)$ произведен в соответствии с леммой 18.3, то (19.34) и (19.38) противоречат друг другу. Это опровергает наши первоначальные предположения (19.30) и (19.31), т. е.

Для всякого проектора $E$, $\delta' < t(E) < 1 - \delta'$, выполнено $\| A'E - EA' \| > \varepsilon'$. (19.39)

Все это предполагает, однако, (19.35) и (19.38). Поскольку $\theta = 0, 1, \ldots, 2\tau - 2$, мы можем заменить эти неравенства на следующие более сильные утверждения

$$\delta + 4/\tau \leqslant \delta', \quad 2\tau^{\tau-1}\varepsilon' + 8/\tau^{1/2} \leqslant \varepsilon. \tag{19.40}$$

Но (19.40) есть следствие условий

$$\delta = {}^1/_2\delta', \qquad \tau \geqslant 8/\delta' \text{ и } \tau \geqslant 256/\varepsilon^2, \qquad \varepsilon' = \varepsilon/4\tau^{\tau-1}. \tag{19.41}$$

Теперь мы можем выбрать $\delta$, $\varepsilon'$, $\tau$ (см. замечания после (19.3) и (19.27)). Дано $\delta' > 0$, выберем $\delta > 0$ из первого соотношения (19.41). Положим $\varepsilon = \varepsilon'_4(\delta) > 0$ и возьмем в качестве $\tau$ минимальное число, равное 1, 2, ..., для которого выполнены средние неравенства (19.41). Выберем $\varepsilon' > 0$ из последнего соотношения (19.41). Теперь $A = A_1(n, \delta)$ и $\theta = \theta(A, \tau)$ определены, тогда

определено $A'=A(n, \delta, \tau, \theta)$. Косвенным образом $\varepsilon'=\varepsilon_5(\delta')>0$ и $A'=A_2(n, \delta)$. Для этих $\varepsilon'$, $A'$ мы имеем (19.29) и (19.39).

Напишем снова $\delta$, $\varepsilon$, $A$ вместо $\delta'$, $\varepsilon'$, $A'$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 19.1. *Для всякого $\delta>0$ существует такое $\varepsilon=\varepsilon_5(\delta)>0$, что, каково бы ни было $n$, можно указать такое $A=A_2(n, \delta)$ из $\mathbf{M}_n$, что $|||A|||\leqslant 1$, и если $E$ — проектор из $\mathbf{M}_n$, для которого $\delta<t(E)<1-\delta$, то $\|AE-EA\|>\varepsilon$.*
Эта теорема устанавливает в точности (9.6).

**20**. Теперь можно легко получить утверждение (9.5).

Теорема 20.1. *Для всякого $\delta>0$ существует такое $\varepsilon=\varepsilon_6(\delta)$, что, каково бы ни было $n$, существует такое $A=A_2(n, \delta)$ из $\mathbf{M}_n$, что $|||A|||\leqslant 1$, и если $B$ из $\mathbf{M}_n$ коммутирует с проектором $E$ из $\mathbf{M}_n$, а $\delta<t(E)<1-\delta$, то $\|A-B\|>\varepsilon$.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon'=\varepsilon_5(\delta)$ и $A=A_2(n, \delta)$ по теореме 19.1. Рассмотрим $B$ из $\mathbf{M}_n$ и проектор $E$ из $\mathbf{M}_n$, $\delta<t(E)<1-\delta$, такие, что $B$ и $E$ коммутируют. Тогда (используя (3.15)) имеем: $|||E|||\leqslant 1$,

$$\|(A-B)E-E(A-B)\|\leqslant\|A-B\|\,|||E|||+|||E|||\,\|A-B\|\leqslant 2\|A-B\|.$$

Это означает, что

$$\|AE-EA\|\leqslant 2\|A-B\|. \tag{20.1}$$

Далее, из теоремы 19.1 получаем, что $\|AE-EA\|>\varepsilon'$, следовательно,

$$\|A-B\|>{}^1/_2\varepsilon'. \tag{20.2}$$

Таким образом $\varepsilon=\varepsilon_6(\delta)={}^1/_2\varepsilon'={}^1/_2\varepsilon_5'(\delta)>0$ удовлетворяет нашим требованиям.

Утверждение (9.4) немедленно следует из (9.5), т. е. теоремы 20.1, как мы убедились в этом в п. 9, поэтому мы не обсуждаем это здесь. Однако мы выведем (9.3), поскольку оно непосредственно влечет (9.1) и отвечает поэтому на вопрос 7.1.

Следующее утверждение совпадает с (9.3).

Теорема 20.2. *Существует такое $\varepsilon=\varepsilon_7>0$, что для любого $m$ и для любого $p(=2, 3, \ldots)$ справедливо отрицание $\mathfrak{A}_m^{mp}(\varepsilon)$ (см. определение 7.1)*

Доказательство. Выберем $\varepsilon=\varepsilon_6(1/4)>0$ и $A=A_2(mp, 1/4)$ из $\mathbf{M}_{mp}$ в соответствии с теоремой 20.1 ($\delta=1/4$ и $n=mp$). Если $\mathfrak{A}_m^{mp}(\varepsilon)$ справедливо, то оно верно, в частности, для $A$ (см. определение 7.1). Так как $|||A|||\leqslant 1$, то существует такое $C$ из $\mathbf{M}_m$ ($\subseteq\mathbf{M}_{mp}$, см. определение 5.3) и унитарная матрица $U$ из $\mathbf{M}_{mp}$, что

$$\|A-UCU^{-1}\|\leqslant\varepsilon. \tag{20.3}$$

Учитывая определения 5.2 и 5.3, получаем

$$C=C^+=(c_{\varkappa\lambda}^+),\quad \varkappa, \lambda=1, \ldots, mp,$$

$$c_{\varkappa\lambda}^+=\begin{cases} c_{\mu\nu} & \text{для } \alpha=\beta, \\ 0 & \text{для } \alpha\neq\beta, \end{cases}$$

где $\varkappa=m(\alpha-1)+\mu$; $\quad\lambda=m(\beta-1)+\nu$; $\quad\varkappa, \lambda=1, \ldots, mp$;

$$\mu\nu=1, \ldots, m;\qquad \alpha, \beta=1, \ldots, p. \tag{20.4}$$

Теперь положим

$$F = (f^0_{\varkappa\lambda}),\ \varkappa, \lambda = 1, \ldots, mp,$$

$$f^0_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} f_{\alpha\beta} & \text{для } \mu = \nu, \\ 0 & \text{для } \mu \neq \nu, \\ \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta & \text{как в (20.4)} \end{cases} \tag{20.5}$$

Тогда, очевидно,

$$C, F \text{ коммутируют.} \tag{20.6}$$

Отсюда

$$UCU^{-1}, \quad UFU^{-1} \text{ коммутируют.} \tag{20.7}$$

Выберем, в частности,

$$f_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha = \beta = 1, \ldots, q, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \tag{20.8}$$

где $q = 1, \ldots, p-1$. Тогда $F$ — проектор и $UFU^{-1}$ — также проектор. Далее, $t\,(UFU^{-1}) = t\,(F) = q/p$. Поэтому если

$$\tfrac{1}{4}p < q < \tfrac{3}{4}p, \tag{20.9}$$

что мы предполагаем, то

$$UFU^{-1} \text{ — проектор и } 1/4 < t\,(UFU^{-1}) < 3/4 \tag{20.10}$$

Но (20.3), (20.7) и (20.10) противоречат теореме 20.1. (Положим $B = UCU^{-1}$, $E = UFU^{-1}$, $\delta = 1/4$, $n = mp$ и $A = A_2\,(mp,\ 1/4)$.) Это опровергает наше первоначальное предположение, и, таким образом, имеет место отрицание $\mathfrak{A}^{mp}_m\,(\varepsilon)$.

Число $q = 1, \ldots, p-1$, удовлетворяющее (20.9), разумеется, существует для всех $p = 2, 3, \ldots$:

$$q = \begin{cases} p/2 & \text{для } p = 2, 4, \ldots, \\ (p-1)/2 & \text{для } p = 3, 5, \ldots \end{cases}$$

## Глава IV

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ВЫВОД УТВЕРЖДЕНИЯ (9.7)

**21.** Ближайшие два пункта содержат вывод (9.7) из (9.6), т. е. из теоремы 19.1. Настоящий пункт включает предварительные леммы.

Лемма 21.1. *Для каждого комплексного полинома* $\rho\,(z) \equiv p_l z^l + \ldots + p_1 z + p_0$ ($l = 0, 1, \ldots$; $p_l, \ldots, p_1, p_0$ *и* $z$ — *комплексные числа*) *и каждого (вещественного числа)* $c \geqslant 0$ *существует (вещественное число)* $d = d\,(\rho\,(\ldots),\ c)$, *обладающее следующим свойством: для любых двух матриц* $A$, $B$ *из* $\mathbf{M}_n$[31] $|||\,B\,||| \leqslant c$,

$$\|A\rho\,(B) - \rho\,(B)\,A\| \leqslant d\,\|AB - BA\|. \tag{21.1}$$

[31] Существенно, что утверждение выполняется равномерно по $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Мы докажем (21.1) с

$$d = l\,|p_l|\,c^{l-1} + \ldots + |p_1|. \tag{21.2}$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть только мономы $\rho(z) \equiv p_\varkappa z^\varkappa$ или даже лишь степени $\alpha(z) \equiv z^\varkappa$, $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ Поэтому мы должны доказать, что

$$\| AB^\varkappa - B^\varkappa A \| \leqslant \varkappa c^{\varkappa-1} \| AB - BA \|, \qquad \text{если } ||| B ||| < c. \tag{21.3}$$

Мы докажем это по индукции для $\varkappa = 0, 1, \ldots$ Так как (21.3) тривиально для $\varkappa = 0, 1$, надо доказать его только для $\varkappa = 2, 3, \ldots$, предполагая, что (21.3) уже установлено для $\varkappa - 1$.

Имеем $AB^\varkappa - B^\varkappa A = (AB^{\varkappa-1} - B^{\varkappa-1}A)\,B + B^{\varkappa-1}(AB - BA)$, отсюда (используя (21.3) для $\varkappa - 1$)

$$\| AB^\varkappa - B^\varkappa A \| \leqslant \| AB^{\varkappa-1} - B^{\varkappa-1}A \|\; ||| B ||| + ||| B^{\varkappa-1} |||\; \| AB - BA \| \leqslant (\varkappa - 1) \times$$
$$\times c^{\varkappa-2} \| AB - BA \|\, c + c^{\varkappa-1} \| AB - BA \| = \varkappa c^{\varkappa-1} \| AB - BA \|,$$

доказывающее (21.3) для $\varkappa$.

Лемма 21.2. *При каждом $\tau = 1, 2, \ldots$ существует вещественный полином $\rho_\tau(z)$ со следующими свойствами:*

$$\begin{cases} 1 - 1/\tau \leqslant \rho_\tau(z) \leqslant 1 & \text{для } -2 \leqslant z \leqslant -1/\tau^3, \\ 0 \leqslant \rho_\tau(z) \leqslant 1 & \text{для } -1/\tau^3 \leqslant z \leqslant 1/\tau^3, \\ 0 \leqslant \rho_\tau(z) \leqslant 1/\tau & \text{для } 1/\tau^3 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases} \tag{21.4}$$

**Доказательство.** Образуем (вещественную) функцию

$$f_\tau(z) = \begin{cases} 1 - {}^1/_2\tau^{-1} & \text{для } -2 \leqslant z \leqslant -1/\tau^3, \\ {}^1/_2 - \tau^2(\tau - 1)z/2 & \text{для } -1/\tau^3 \leqslant z \leqslant 1/\tau^3, \\ {}^1/_2\tau^{-1} & \text{для } 1/\tau^3 \leqslant z \leqslant 2, \end{cases} \tag{21.5}$$

которая определена и непрерывна в интервале $-2 \leqslant z \leqslant 2$. По аппроксимационной теореме Вейерштрасса [32] существует вещественный полином $\rho_\tau(z)$, для которого $|\rho_\tau(z) - f_i(z)| \leqslant 2/\tau$ для всех $z$, $-2 \leqslant z \leqslant 2$. Поэтому (21.5) влечет (21.4).

Лемма 21.3. *Для всякой матрицы $B$ (вещественное) число $\|B - z\cdot 1\|$ достигает минимума (по всем комплексным $z$) при $z = t(B)$.*

Доказательство. Мы можем рассмотреть $\| B - z\cdot \mathbf{1} \|^2$ вместо $\| B - z\cdot \mathbf{1} \|$. Поэтому получаем

$$\| B - z\cdot\mathbf{1} \|^2 = t((B - z\cdot 1)^*(B - z\cdot 1)) = t(B^*B - zB^* - \bar{z}B + |z|^2\cdot 1) =$$
$$= t(B^*B) - zt(B^*) - \bar{z}t(B) + |z|^2 = \|B\|^2 - z\overline{t(B)} - \bar{z}t(B) + |z|^2 = |z - t(B)|^2 +$$
$$+ (\|B\|^2 - |t(B)|^2).$$

Ясно, что последнее выражение принимает минимальное значение, которое, между прочим, равно $\| B \|^2 - | t(B) |^2$ для $z = t(B)$.

---

[32] Доказательство аппроксимационной теоремы Вейерштрасса см., например: Courant R. and Hilbert D. Methoden der Mathematischen Physik. B.: Springer, 1924, S. 69—72.

22. Перейдем к доказательству (9.7).

Рассмотрим сначала матрицу $B$ из $\mathbf{M}_n$, о которой предполагается лишь, что

$$B \text{ эрмитова}, \ |||B||| < 1. \tag{22.1}$$

Поскольку $B$ эрмитова, можно считать, что она задана в нормальной форме (12.1), (12.12) (полагая $B$ вместо $A$). Поэтому

$$B = UGU^{-1}, \quad U \text{ унитарна}, \quad G \text{ диагональна: } G = (g_{\varkappa\lambda}), \quad g_{\varkappa\lambda} = 0 \text{ для } \varkappa \neq \lambda. \tag{22.2}$$

Так как эрмитовость и $|||\cdot|||$ сохраняются при преобразовании $B \to U^{-1}BU$, то диагональная матрица $G$ эрмитова и $|||G||| \leqslant 1$ (в силу (22.1)), и поэтому

$$-1 \leqslant g_{11}, \ldots, g_{nn} \leqslant 1. \tag{22.3}$$

Введем число $\tau = 1, 2, \ldots$, которое будет определено в конце пункта. Рассмотрим

$$\omega = 0, 1, \ldots, \tau - 1, \tag{22.4}$$

для каждого

$$\theta = 0, 1, \ldots, \tau^2 - 1 \tag{22.5}$$

образуем следующее множество:

$\Gamma_\theta^\omega$: множество всех $\varkappa (= 1, \ldots, n)$, для которых

$$(2\omega - \tau)/\tau + 2\theta/\tau^3 \leqslant g_{\varkappa\varkappa} < (2\omega - \tau)/\tau + (2\theta + 2)/\tau^3. \tag{22.6}$$

Множества $\Gamma_0^\omega, \Gamma_1^\omega, \ldots, \Gamma_{\tau^2-1}^\omega$ попарно дизъюнктны. Поэтому

$$\sum_{\theta=1}^{\tau^2-1} (\text{Число элементов } \Gamma_\theta^\omega) \leqslant n.$$

Следовательно, число тех $\theta (= 0, 1, \ldots, \tau^2 - 1)$, для которых число элементов в $\Gamma_\theta^\omega$ больше $n/\tau^2$, не может быть равно $\tau^2$, т. е. существует такое $\theta = \theta(\omega) \times$ $\times (= 0, 1, \ldots, \tau^2 - 1)$, что

$$\text{Число элементов в } \Gamma_\theta^\omega \leqslant n/\tau^2 \text{ [33]}. \tag{22.7}$$

С помощью этого $\theta = \theta(\omega)$ образуем множества

$\Delta^\omega$: множество всех таких $\varkappa (= 1, 2, \ldots, n)$, что $g_{\varkappa\varkappa} < (2\omega - \tau)/\tau + (2\theta + 1)/\tau^3$;

$\Delta^\omega$ = дополнение к множеству $\Delta^\omega$ в $(1, \ldots, n)$: множество всех таких $\varkappa (= 1, 2, \ldots, n)$, что $g_{\varkappa\varkappa} \geqslant (2\omega - \tau)/\tau + (2\theta + 1)/\tau^3$. (22.8)

[33] Неравенство (22.7) снова реализует операцию «вырезания тонкой части спектра». (В данном случае матрицы $B$. Другой пример см. в примеч. 29.) Эффект здесь подобен аналогичному эффекту, обсуждавшемуся в примеч. 29: без предосторожности, связанной с членом $n/\tau^2$ в (22.7), т. е. при замене его членом $n$, в (22.15), (22.16), (22.18) и (22.24) вместо $1/\tau$ возникнет 1. Это сделает невозможным неравенство (22.24) для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим проекторы

$$E^{\omega} = (e^{\omega}_{\varkappa\lambda}), \qquad e^{\omega}_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{для } \varkappa = \lambda \text{ из } \Delta^{\omega}, \\ 0 & \text{для остальных } \varkappa, \lambda. \end{cases} \tag{22.9}$$

Возьмем полином $\rho_\tau(z)$ из леммы 21.2 и образуем матрицу

$$E^{\omega} - \rho_\tau\,(G - ((2\omega - \tau)/\tau + (2\theta+1)/\tau^3)\,\mathbf{1}) = H = (h_{\varkappa\lambda}). \tag{22.10}$$

Так как $E^{\omega}$, $G$, $\mathbf{1}$ — диагональные матрицы, то и $H$ диагональна и ее диагональные элементы

$$e^{\omega}_{\varkappa\lambda} - \rho_\tau\,(g_{\varkappa\varkappa} - ((2\omega - \tau)/\tau + (2\theta + 1)/\tau^3)) = h_{\varkappa\varkappa}. \tag{22.11}$$

Теперь мы в состоянии вычислить $h_{11}, \ldots, h_{nn}$, используя (22.6), (22.8) и (22.9), с одной стороны, и (21.4) — с другой, помня при этом, что $\omega$ и $\theta = \theta(\omega)$ подчинены (22.4) и (22.5). В результате получаем

*Случай $\varkappa$ из $\Gamma^{\omega}_{\theta}$: $h_{\varkappa\varkappa}$ есть разность двух чисел между* 0 *и* 1, *т. е.*

$$-1 \leqslant h_{\varkappa\varkappa} \leqslant 1. \tag{22.12}$$

*Случай $\varkappa$ не из $\Gamma^{\omega}_{\theta}$: подслучай $\varkappa$ из $\Delta^{\omega}$: тогда $g_{\varkappa\varkappa} < (2\omega - \tau)/\tau + 2\theta/\tau^3$, и $h_{\varkappa\varkappa}$ есть разность между* 1 *и числом между* $(1 - 1/\tau)$ *и* 1. *Поэтому*

$$0 \leqslant h_{\varkappa\varkappa} \leqslant 1/\tau. \tag{22.13}$$

*Подслучай $\varkappa$ из $\Delta^{\omega}$: тогда $g_{\varkappa\varkappa} \geqslant (2\omega - \tau)/\tau + (2\theta + 2)/\tau^3$, поэтому $h_{\varkappa\varkappa}$ есть разность между* 0 *и числом* $1/\tau$, *т. е.*

$$-1/\tau \leqslant h_{\varkappa\varkappa} \leqslant 0. \tag{22.14}$$

Комбинируя (22.12) — (22.14) и учитывая (22.7), получаем

Всегда $|h_{\varkappa\varkappa}| \leqslant 1$ и, исключая не более $n/\tau^2$ значений $\varkappa$: $|h_{\varkappa\varkappa}| \leqslant 1/\tau$. (22.15)

Следовательно,

$$\|H\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} |h_{\varkappa\lambda}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} |h_{\varkappa\varkappa}|^2 \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\tau^2}\cdot 1 + n\frac{1}{\tau^2}\right) = \frac{2}{\tau^2},$$

т. е. (в силу (22.11) $\theta = \theta(\omega)$)

$$\|E^{\omega} - \rho_\tau\,(G - ((2\omega - \tau)/\tau + (2\theta + 1)/\tau^3)\cdot \mathbf{1})\| \leqslant \sqrt{2}/\tau. \tag{22.16}$$

Образуем проектор

$$F^{\omega} = UE^{\omega}U^{-1}. \tag{22.17}$$

Преобразование $C \to UCU^{-1}$ ($U$ унитарна) оставляет $\|\cdot\|$ инвариантным. Мы применим его к (22.16) и благодаря (22.2) и (22.17) получим

$$\|F^{\omega} - \rho_\tau\,(B - ((2\omega - \tau)/\tau + (2\theta + 1)/\tau^3)\cdot \mathbf{1})\| \leqslant \sqrt{2}/\tau. \tag{22.18}$$

В этот момент введем вторую матрицу $A$ из $\mathbf{M}_n$, о которой будем предполагать лишь, что

$$|||A|||\leqslant 1. \tag{22.19}$$

Записывая $(\cdot)$ вместо матрицы под знаком $\|\cdot\|$ в (22.18), мы получим

$$\|A(\cdot)-(\cdot)A\|\leqslant 2|||A|||\,\|(\cdot)\|\leqslant 2\sqrt{2}/\tau. \tag{22.20}$$

Пусть теперь дано $\delta'>0$. Возьмем $\delta>0$, $\varepsilon=\varepsilon_5'(\delta)>0$ и $A=A_2(n,\delta)$, следуя теореме 19.1, а также $\varepsilon'>0$. Мы определим величины $\delta$ и $\varepsilon'$, равно как и $\tau$, введенное ранее, только в конце этого пункта. Применим (22.20) к $A=A_2(n,\delta)$, что возможно в силу (22.19). Получим

$$\|AB-BA\|\leqslant\varepsilon'. \tag{22.21}$$

Обозначим $d_\tau=d(\rho_\tau(\ldots),2)$ из леммы 21.1. Имеем $|||B|||\leqslant 1$ и $1>(2\omega-\tau)/\tau+(2\theta+1)/\tau^3>-1$, и отсюда $|(2\omega-\tau)/\tau+(2\theta+1)/\tau^3|<1$, следовательно, $|||B-((2\omega-\tau)/\tau+(2\theta+1)/\tau^3)\,1|||\leqslant 2$. Объединяя это с (22.21) (мы заменяем $B$ на $B-((2\omega-\tau)/\tau+(2\theta+1)/\tau^3)\,\mathbf{1}$, что ничего не меняет, так как добавка не влияет на коммутатор) и (21.1), получаем

$$\left\|A\rho_\tau\left(B-\left(\frac{2\omega-\tau}{\tau}+\frac{2\theta+1}{\tau^3}\right)\mathbf{1}\right)-\rho_\tau\left(B-\left(\frac{2\omega-\tau}{\tau}+\frac{2\theta+1}{\tau^3}\right)\mathbf{1}\right)A\right\|\leqslant$$
$$\leqslant d_\tau\varepsilon'. \tag{22.22}$$

Соотношения (22.21) и (22.22) дают вместе

$$\|AF^\omega-F^\omega A\|\leqslant\varepsilon, \tag{22.23}$$

если предположить

$$2\sqrt{2}/\tau+d_\tau\varepsilon'<\varepsilon. \tag{22.24}$$

Предположим, что (22.24) справедливо.

По теореме 19.1 неравенство (22.24) влечет

$$t(F^\omega)\leqslant\delta \text{ или } t(F^\omega)\geqslant 1-\delta. \tag{22.25}$$

Поэтому (22.17) и (22.9) дают

$$t(F^\omega)=t(UE^\omega U^{-1})=t(E^\omega)=\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}e^\omega_{\varkappa\varkappa}=(\text{Число элементов в }\Delta^\omega)/n.$$

Поэтому из (22.25) следует

$$(\text{Число элементов в }\Delta^\omega)\leqslant\delta n \text{ или }\geqslant(1-\delta)n. \tag{22.26}$$

Имея в виду (22.8) и (22.5), заключаем, что первая альтернатива в (22.26) дает

$$(\text{Число таких }\varkappa\,(=1,\ldots,n),\text{ что } g_{\varkappa\varkappa}<(2\omega-\tau)/\tau)\leqslant\delta n, \tag{22.27}$$

а вторая альтернатива в (22.26) приводит к утверждению

$$(\text{Число таких }\varkappa\,(=1,\ldots,n),\text{ что } g_{\varkappa\varkappa}<(2\omega+2-\tau)/\tau)\geqslant(1-\delta)n. \tag{22.28}$$

Следовательно, в (22.6) содержится такой факт:

Для всякого $\omega = 0, 1, \ldots, \tau - 1$ выполнено по крайней мере одно из утверждений (22.27) или (22.28). (22.29)

Для $\omega = 0$ имеет место (22.27), поскольку неравенство $g_{\varkappa\varkappa} < -1$ (по (22.3)) невозможно; поэтому число нужных $\varkappa$ равно 0. Таким образом, (22.27) выполнено для некоторых $\omega = 0, 1, \ldots, \tau - 1$, пусть $\omega_0$ — наибольшее из них. Если $\omega_0 \neq \tau - 1$, то $\omega_0 + 1 = 1, \ldots, \tau - 1$ и $\omega_0 + 1$ больше $\omega_0$, следовательно, для него не выполнено (22.7). Поэтому для $\omega_0 + 1$ имеет место (22.28) в силу (22.29). Если $\omega_0 = \tau - 1$, то (22.28) выполнено для $\omega = \omega_0 + 1$, которое равно $\tau$. В любом случае $g_{\varkappa\varkappa} < (\tau + 2)/\tau$ (по (22.3)), отсюда число в скобках (22.28) равно $n$.

Поэтому(22.27) выполнено для $\omega = \omega_0$, а (22.28) — для $\omega_0 + 1$, и, следовательно,

$$(\text{Число таких } \varkappa (= 1, \ldots, n), \text{ что } (2\omega_0 - \tau)/\tau \leqslant g_{\varkappa\varkappa} \leqslant (2\omega_0 + 4 - \tau)/\tau) \leqslant 2\delta n. \tag{22.30}$$

Теперь напомним, что $-1 < (2\omega_0 + 2 - \tau)/\tau \leqslant 1$, т. е. $|(2\omega_0 + 2 - \tau)/\tau| \leqslant 1$. Это вместе с (22.3) и (22.30) дает

Для $z_0 = (2\omega_0 + 2 - \tau)/\tau$ всегда выполнено $|g_{\varkappa\varkappa} - z_0| \leqslant 2$ и, исключая не более чем $2\delta n$ значений $\varkappa$, выполняется даже $|g_{\varkappa\varkappa} - z_0| < 2/\tau$. (22.31)

Следовательно,

$$\|G - z_0 1\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} |g_{\varkappa\lambda} - z_0\delta_{\varkappa\lambda}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} |g_{\varkappa\varkappa} - z_0|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(2\delta n \cdot 4 + n\frac{4}{n^2}\right) = 8\delta + \frac{4}{\tau^2}$$

$$\|G - z_0 1\| < \delta', \tag{22.32}$$

если считать, что

$$8\delta + 4/\tau^2 \leqslant \delta'^2. \tag{22.33}$$

Будем предполагать, что (22.33) выполнено. Преобразование $G \to UGU^{-1}$ ($U$ унитарна) оставляет $\|\cdot\|$ инвариантным. Применим его к (22.32), учитывая (22.2), получаем

$$\|B - z_0 \cdot 1\| \leqslant \delta'. \tag{22.34}$$

По лемме 21.3 $\|B - z \cdot 1\|$ принимает свой минимум (для всех комплексных чисел $z$), когда $z = t(B)$, поэтому (22.34) влечет

$$\|B - t(B) \cdot 1\| \leqslant \delta'. \tag{22.35}$$

Мы видим, что наш выбор $A$ (см. замечание после (22.20)) дает вместе с предположением о $B$, т. е. с (22.1), (22.21) и (22.35):

Для всякой эрмитовой матрицы $B$, удовлетворяющей условиям

$$|||B||| \leqslant 1 \text{ и } \|AB - BA\| \leqslant \varepsilon', \text{ имеем } \|B - t(B) \cdot 1\| \leqslant \delta'. \tag{22.36}$$

Все это выполнено, однако, лишь при условии (22.24) и (22.23). Последние же следуют из

$$\delta = \frac{1}{16}\delta'^2, \qquad \tau \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{\delta'}, \qquad \tau \geqslant \frac{4\sqrt{2}}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2d_\tau}. \tag{22.37}$$

Мы можем теперь выбрать $\delta$, $\varepsilon'$, $\tau$ (см. замечания после (22.3) и (22.20)). Пусть $\delta' > 0$ дано. Найдем $\delta > 0$ из первого уравнения (22.37). Положим $\varepsilon = \varepsilon_5(\delta) > 0$, и пусть $\tau$ — минимальное число $= 1, 2, \ldots$, удовлетворяющее двум средним неравенствам в (22.37). Выберем $\varepsilon'$ из последнего уравнения (22.37). Таким образом, $\varepsilon' = \varepsilon_8(\delta') > 0$ и $A = A_2(n, \delta) = A_3(n, \delta')$. Будем писать снова $\delta$, $\varepsilon$, $A$ вместо $\delta'$, $\varepsilon'$, $A$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 22.1. *Для всякого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon_8(\delta)$, что, каково бы ни было $n$, найдется $A = A_3(n, \delta)$ из $\mathbf{M}_n$, причем $|||A||| \leqslant 1$, и для любой эрмитовой матрицы $B$ из $\mathbf{M}_n$, такой, что $|||B||| \leqslant 1$ и $|||AB - BA||| \leqslant \varepsilon$, выполняется соотношение $\| B - t(B)\cdot 1 \| \leqslant \delta$.*

Эта теорема доказывает в точности (9.7).

**23.** Мы заключим работу выводом того обобщения утверждения (9.7), которое упомянуто в конце п. 9.

Теорема 23.1. *Для всякого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon'_9(\delta) > 0$, что, каково бы ни было $n$, найдется матрица $A = A_4(n, \delta)$ из $\mathbf{M}_n$, причем $|||A||| \leqslant 1$, и для любой матрицы $B$ из $\mathbf{M}_n$, для которой $|||B||| \leqslant 1$, $\|B^*B - BB^*\| \leqslant \varepsilon$ и $\|AB - BA\| \leqslant \varepsilon$, выполняется соотношение $\|B - t(B)\cdot 1\| \leqslant \delta$.*

Доказательство. Будем писать $\delta'$, $\varepsilon'$ вместо $\delta$, $\varepsilon$ в этой теореме. Пусть дано $\delta' > 0$. Рассмотрим $\delta > 0$ и соответствующее $\varepsilon = \varepsilon_8(\delta)$ и $A = A_3(n, \delta)$ из теоремы 22.1, а также $\varepsilon' > 0$. Мы определим эти величины $\delta$ и $\varepsilon'$ в конце доказательства.

Рассмотрим матрицу $B$ со свойствами

$$|||B||| \leqslant 1, \qquad \|B^*B - BB^*\| \leqslant \varepsilon', \qquad \|AB - BA\| \leqslant \varepsilon. \tag{23.1}$$

Поскольку $|||A||| \leqslant 1$, то $|||A^*A - AA^*||| \leqslant |||A^*|||\,|||A||| + |||A|||\,|||A^*||| = 2|||A|||^2 \leqslant 2$, тем более (см. (3.10))

$$\|A^*A - AA^*\| \leqslant 2. \tag{23.2}$$

Поэтому (23.1) и (23.2) дают вместе с (3.12)

$$|t((A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*))| \leqslant 2\varepsilon'. \tag{23.3}$$

Теперь мы используем тождество

$$\|AB - BA\|^2 - \|AB^* - B^*A\|^2 = -t((A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*)), \tag{23.4}$$

которое уже упоминалось в п. 9 (как (9.11)) и которое будет доказано в приложении 3.

Комбинируя (23.1) и (23.3), получаем

$$\|AB^* - B^*A\| \leqslant \sqrt{2\varepsilon' + \varepsilon^2}. \tag{23.5}$$

Положим

$$C = (1/2)(B + B^*), \qquad D = (1/2i)(B - B^*). \tag{23.6}$$

Благодаря (23.2) получаем

$$C,\ D \quad \text{эрмитовы,} \quad |||C|||, \quad |||D||| \leqslant 1. \tag{23.7}$$

Но в силу (23.1) и (23.5) (заметим, что $\varepsilon' \leqslant \sqrt{2\varepsilon' + \varepsilon'^2}$)

$$\|AC - CA\|, \quad \|AD - DA\| \leqslant \varepsilon, \tag{23.8}$$

если

$$2\varepsilon' + \varepsilon'^2 \leqslant \varepsilon^2. \tag{23.9}$$

Будем предполагать, что это верно. Соотношения (23.7) и (23.8) влекут

$$\|C - t(C)\cdot 1\|, \quad \|D - t(D)\cdot 1\| \leqslant \delta \tag{23.10}$$

по теореме 22.1. Поскольку $B = C + iD$, то из (23.10)

$$\|B - t(B)\cdot 1\| \leqslant \delta', \tag{23.11}$$

если

$$2\delta < \delta'. \tag{23.12}$$

Будем предполагать, что это соотношение имеет место.

Итак, наш выбор $A$ удовлетворяет требованиям теоремы. Все это предполагает, однако, (23.9) и (23.12). Их легко удовлетворить: положим $\delta = {}^1/_2\,\delta' > 0$, возьмем $\varepsilon = \varepsilon_8(\delta)$ и выберем, наконец, $\varepsilon' > 0$, $2\varepsilon' + \varepsilon'^2 = \varepsilon$. Таким образом, $\varepsilon' = \varepsilon_9'(\delta)$ и $A = A_3(n, \delta) = A_4(n, \delta')$. Для нормальных матриц $B^*B = BB^*$, следовательно, $\|B^*B - BB^*\| \leqslant \varepsilon$ тогда автоматически удовлетворено. Итак, из теоремы 23.1 следует, что в теореме 22.1 достаточно требовать, чтобы $B$ было нормальной (а не эрмитовой), как и утверждалось в конце п. 9.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

**24** В этом приложении мы дадим решение двух следующих проблем.

Проблема 24.1. *Описать все погружения* $\mathbf{M}_m$ *в* $\mathbf{M}_n$ $(m, n = 1, 2\dots)$ *в смысле определения* 5.1.

Проблема 24.2. *Описать все системы матричных единиц* $p$*-го порядка в* $\mathbf{M}_n$ $(p, n = 1, 2, \dots)$ *в смысле определения* 6.1.

Проблема 24.1 будет решена, если доказать теоремы **5.1** и **5.2**, решение обеих проблем 24.1 и 24.2 позволяет доказать теорему 6.2.

Таким образом, мы установим все результаты, которые необходимы для обоснования содержания п. 5. 6.

**25.** Обсудим сначала проблему 24.2.

Рассмотрим систему матричных единиц $p$-го порядка в $\mathbf{M}_n$ (в смысле определения 6.1): $C^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, p$.

Пусть $\mathfrak{A}^\alpha$ есть ранг $C^{\alpha\alpha}$ в $\mathfrak{E}_n$ $(\alpha = 1, \dots, p)$.

$$\mathfrak{A}^\alpha:\ \text{множество всех } C^{\alpha\alpha}\xi, \qquad \xi \text{ — произвольный вектор из } \mathfrak{E}_n. \tag{25.1}$$

$\mathfrak{A}^\alpha$ есть линейное множество в $\mathfrak{E}_n$.

Согласно (6.1) имеем $\xi = \mathbf{1}\cdot\xi = \sum_{\alpha=1}^{p} C^{\alpha\alpha}\xi$, т. е. $\xi$ принадлежит к линейной сумме всех $\mathfrak{A}^{\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, p$, т. е.

Совокупность $\mathfrak{A}^{\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, p$, образует разложение линейного множества $\mathfrak{E}_n$. (25.2)

Опять-таки в силу (6.1) для $\alpha \neq \beta$ $(C^{\alpha\alpha}\xi, C^{\beta\beta}\eta) = (C^{\beta\beta}C^{\alpha\alpha}\xi, \eta) = 0$, т. е. $\mathfrak{A}^{\alpha}$ и $\mathfrak{A}^{\beta}$ ортогональны, иными словами,

$\mathfrak{A}^{\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, p$, попарно ортогональны. (25.3)

Рассмотрим отображение

$$\mathfrak{M}^{\alpha\beta}: \xi \rightarrow C^{\beta\alpha}\xi, \qquad \xi \text{ из } \mathfrak{A}^{\alpha}. \tag{25.4}$$

Немедленно проверяется с помощью (6.1), что это отображение $\mathfrak{A}^{\alpha}$ в $\mathfrak{A}^{\beta}$. Аналогично $\mathfrak{M}^{\beta\alpha}$ отображает $\mathfrak{A}^{\beta}$ в $\mathfrak{A}^{\alpha}$. Легко проверить, что эти два отображения взаимно обратны в $\mathfrak{A}^{\alpha}$ и $\mathfrak{A}^{\beta}$ соответственно.

Поэтому

$\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ есть взаимно однозначное отображение $\mathfrak{A}^{\alpha}$ на все $\mathfrak{A}^{\beta}$. (25.5)

Следующие выкладки проделываются с использованием (6.1):

$$C^{\alpha\alpha}\xi = \xi, \text{ если } \xi \text{ из } \mathfrak{A}^{\alpha}, \text{ т. е. } \xi = C^{\alpha\alpha}\eta.$$

$$(C^{\beta\alpha}\xi, C^{\beta\alpha}\eta) = (C^{\beta\alpha *}C^{\beta\alpha}\xi, \eta) = (C^{\alpha\beta}C^{\beta\alpha}\xi, \eta) = (C^{\alpha\alpha}\xi, \eta) = (\xi, \eta),$$
$$\text{если } \xi \text{ из } \mathfrak{A}^{\alpha}.$$

Поэтому

Отображение $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ множества $\mathfrak{A}^{\alpha}$ на $\mathfrak{A}^{\beta}$ оставляет неизменным внутреннее произведение. (25.6)

Пусть теперь $\xi_1, \ldots, \xi_m$ образуют полную нормированную ортогональную систему в $\mathfrak{A}^{\beta}$.

Определим

$$\eta_{\varkappa} = C^{\alpha\beta}\xi_{\mu} \quad \text{для } \varkappa = m(\alpha-1)+\mu, \quad \varkappa = 1, \ldots, n; \quad \mu = 1, \ldots, m;$$
$$\alpha = 1, \ldots, p. \tag{25.7}$$

Поэтому $\eta_{m(\alpha-1)+1}, \ldots, \eta_{m\alpha}$ есть $\mathfrak{M}^{\beta\alpha}$ — образ $\xi_1, \ldots, \xi_m$, и, следовательно, мы можем заключить из (25.5) и (25.6):

$\eta_{m(\alpha-1)+1}, \ldots, \eta_{m\alpha}$ образуют полную, нормированную ортогональную систему в $\mathfrak{A}^{\alpha}$. (25.8)

Комбинируя это с (25.2) и (25.3), получаем:

$$\eta_1, \ldots, \eta_{mp} \text{ образуют полную, нормированную, ортогональную систему (в } \mathfrak{E}_n). \tag{25.9}$$

Следовательно,

$$n = mp. \tag{25.10}$$

Сравнение (25.7) и (6.1) дает

$$C^{\alpha\beta}\eta_{m(\gamma-1)+\mu} = \begin{cases} \eta_{m(\alpha-1)+\mu} & \text{для } \beta = \gamma, \\ 0 & \text{для } \beta \neq \gamma, \end{cases}$$

$$\text{где } \mu = 1, \ldots, m; \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, p. \tag{25.11}$$

Определим теперь векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\xi_\varkappa = (\delta_{\varkappa\lambda}), \qquad \lambda = 1, \ldots, n \qquad \text{для} \quad \varkappa = 1, \ldots, n. \tag{25.12}$$

Они также образуют полную, нормированную, ортогональную систему в $\mathfrak{E}_n$. Следовательно, существует такая унитарная матрица $U$, что

$$U\xi_\varkappa = \eta_\varkappa{}^{34}. \tag{25.13}$$

Поэтому (25.11) дает

$$(U^{-1}C^{\alpha\beta}U)\,\xi_{m(\gamma-1)+\mu} = \begin{cases} \xi_{m(\alpha-1)+\mu} & \text{для } \beta = \gamma, \\ 0 & \text{для } \beta \neq \gamma, \end{cases}$$

$$\text{где } \mu = 1, \ldots, m; \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, p; \tag{25.14}$$

(25.14) означает следующее:

$$U^{-1}C^{\alpha\beta}U = D^{\alpha\beta} = (d^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda}), \qquad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n;$$

$$d^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha = \gamma, \quad \beta = \delta, \quad \gamma = \nu, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$\text{где } \varkappa = m(\gamma - 1) + \mu; \qquad \lambda = m(\delta - 1) + \nu;$$

$$\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n; \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, m; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, p; \tag{25.15}$$

(25.10), (25.15) вполне характеризуют $C^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$, с точностью до произвольной унитарной матрицы $U$ из $\mathrm{M}_n$. Обратно, если (25.10) выполнено, то тогда (25.15) определяет систему матричных единиц $p$-го порядка в $\mathrm{M}_n$.

Действительно, немедленно проверяется, что $D^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$, удовлетворяет (6.1), и поскольку преобразование $D \to UDU^{-1}$ ($U$ унитарна) сохраняет неизменным (6.1), то же верно и для $C^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$.

Мы доказали, таким образом, теорему:

Т е о р е м а 25.1. *Система матричных единиц $p$-го порядка $C^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$, в $\mathrm{M}_n$ существует тогда и только тогда, когда выполнено* (25.10), *т. е. p*

[34] Положим $\eta_\varkappa = (y_{\varkappa\lambda})$, $\lambda = 1, \ldots, n$ для $\varkappa = 1, \ldots, n$, тогда $U = (u_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n$, $u_{\varkappa\lambda} = y_{\varkappa\lambda}$, удовлетворяет (25.13), она унитарна, так как обе системы — $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — полны, нормированы и ортогональны.

*делит n. В этом случае* $C^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$, *задается с помощью* (25.15), *где* $U$ — *унитарная матрица в* $\mathbf{M}_n$.

Эта теорема решает проблему 24.2, а первая ее часть совпадает с теоремой 6.2, а), которая, таким образом, доказана.

**26**. Следующей будет рассмотрена проблема 24.1.

Образуем в $\mathbf{M}_m$ матрицы $C^{\rho\sigma}$, $\rho, \sigma = 1, \ldots, m$, определенные

$$C^{\rho\sigma} = (c_{\mu\nu}^{\rho\sigma}), \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, m, \qquad c_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{для } \rho = \mu,\ \sigma = \nu, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{26.1}$$

$C^{\rho\sigma}$, $\rho, \sigma = 1, \ldots, m$, образуют систему матричных единиц $m$-го порядка в $\mathbf{M}_m$, как легко проверить прямым вычислением (или, замечая, что (26.1) получается из (25.15) при $U = \mathbf{1}$ и $n, m, p$, равными $m, 1, m$).

Рассмотрим теперь погружение $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$ (определение 5.1):

$$A \to A'. \tag{26.2}$$

Так как $C^{\rho\sigma}$, $\rho, \sigma = 1, \ldots, m$, образуют систему матричных единиц в $\mathbf{M}_m$, то $(C^{\rho\sigma})'$, $\rho, \sigma = 1, \ldots, m$, образуют ее в $\mathbf{M}_n$. Поэтому по теореме 25.1 (меняя местами $m$ и $p$) $m$ делит $n$, т. е.

$$n = mp. \tag{26.3}$$

Опять-таки по теореме 25.1 $(C^{\rho\sigma})'$ может быть представлено с помощью (25.15), где $m$ и $p$ меняются местами. Более точно: $n, m, p, \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ в (25.15) должны быть заменены на $n, p, m, \varkappa, \lambda, \gamma, \delta, \rho, \sigma, \mu, \nu$. Поэтому мы получаем:

$$(C^{\rho\sigma})' = UD^{\rho\sigma}U^{-1}, \qquad D^{\rho\sigma} = (d_{\varkappa\lambda}^{\rho\sigma}), \qquad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n;$$

$$d_{\varkappa\lambda}^{\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{для } \rho = \mu,\ \sigma = \nu,\ \gamma = \delta, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$\text{где} \quad \varkappa = p(\mu - 1) + \gamma; \qquad \lambda = p(\nu - 1) + \delta; \qquad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n;$$
$$\rho, \sigma, \mu, \nu = 1, \ldots, m; \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, m. \tag{26.4}$$

Сравним соотношения

$$\varkappa = p(\mu - 1) + \gamma, \qquad \lambda = p(\nu - 1) + \delta, \tag{26.5}$$

использованные в (26.4), с

$$\varkappa = m(\gamma - 1) + \mu, \qquad \lambda = m(\delta - 1) + \nu. \tag{26.6}$$

Обе формулы задают взаимно однозначные отображения $\mu = 1, \ldots, m$ и $\gamma = 1, \ldots, p$ на $\varkappa = 1, \ldots, n$ (соответственно для $\nu$, $\delta$ и $\lambda$). Отсюда замена (26.5) на (26.6) в (26.4) сводится просто к перестановке строк и столбцов в $D^{\rho\sigma}$. Первое уравнение (26.4) остается справедливым, если мы проделаем одну и ту же подстановку только над строками в $U$. Другими словами, мы можем заменить (26.5) на (26.6) в (26.4). Сделаем это.

Рассмотрим теперь произвольную матрицу $A = (a_{\mu\nu})$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$, в $\mathbf{M}_n$. Благодаря (26.1) имеем

$$A = \sum_{\rho,\sigma=1}^{m} a_{\rho\sigma} C^{\rho\sigma}; \tag{26.7}$$

применяя операцию погружения (26.2) к (26.7) ($a_{\rho\sigma}$ — числа!), получаем, учитывая первое уравнение (26.4),

$$A' = \sum_{\rho,\sigma=1}^{m} a_{\rho\sigma} (C^{\rho\sigma})' = \sum_{\rho,\sigma=1}^{m} a_{\rho\sigma} U D^{\rho\sigma} U^{-1} = U \sum_{\rho,\sigma=1}^{m} a_{\rho\sigma} D^{\rho\sigma} U^{-1}.$$

Теперь (26.4) (с заменой (26.5) на (26.6)) позволяет выразить $\sum\limits_{\rho,\sigma=1}^{m} a_{\rho\sigma} D^{\rho\sigma}$. Сравнение результата с (5.4) (с заменой $\gamma$, $\delta$ на $\alpha$, $\beta$) показывает, что это есть $A^+$ из $\mathbf{M}_n$, или, применяя отождествление из определения 5.3, что это есть $A$ из $\mathbf{M}_n$ (вместо $\mathbf{M}_m$). Итак, мы имеем (используя определение 5.3)

$$A' = UAU^{-1}. \tag{26.8}$$

Обратно, каждое отображение (26.2), (26.8) (в предположении (26.3)) есть погружение $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$. Действительно, $A \to A' = A^+$ ($A$ из $\mathbf{M}_m$, $A'$, $A^+$ из $\mathbf{M}_n$) есть отображение в смысле определения 5.2 и может быть записано $A \to A' = A$ ($A$ из $\mathbf{M}_m$, $A'$ из $\mathbf{M}_n$) согласно определению 5.3. Так как $A \to UAU^{-1}$ ($A$ из $\mathbf{M}_n$, $U$ — фиксированный унитарный элемент $\mathbf{M}_n$) есть автоморфизм в $\mathbf{M}_n$, из предыдущего следует, что это отображение также есть погружение.

Таким образом, (26.3), т. е. делимость $n$ на $m$, есть необходимое и достаточное условие для существования погружения $\mathbf{M}_m$ в $\mathbf{M}_n$. Если (26.3) выполнено, то тогда все эти погружения даются формулой (26.8). Но это — в точности утверждения теорем 5.1 и 5.2, которые, следовательно, доказаны. Итак, решена проблема 26.1.

27. Нам осталось лишь доказать теорему 6.2, b). Так как теорема 5.1 уже доказана, то достаточно рассмотреть случай, когда $m$ делит $n$, т. е.

$$n = mp. \tag{27.1}$$

Будем предполагать это и переформулируем утверждение теоремы 6.2, b) с учетом теорем 5.2 и 25.1. (Будем иметь в виду также определения 5.2, 5.3 и (25.15).) Тогда доказываемое утверждение превращается в следующее:

Матрица $B$ из $\mathbf{M}_n$ имеет форму $UAU^{-1}$ ($U$ — унитарная из $\mathbf{M}_n$, $A$ — из $\mathbf{M}_m$) тогда и только тогда, когда она коммутирует со всеми $VD^{\rho\sigma}V^{-1}$, $\rho, \sigma = 1, \ldots, p$ (для $D^{\rho\sigma}$ из (25.15)), при некоторой унитарной матрице $V$ из $\mathbf{M}_n$. (27.2)

(Мы пишем $V$ вместо $U$ из (25.15).) Докажем более сильное утверждение вместо (27.2), а именно, что оно верно при $U = V$. Поскольку преобразование $C \to UCU^{-1}$ оставляет неизменным коммутирование, мы должны показать следующее:

Матрица $B$ из $\mathbf{M}_n$ принадлежит $\mathbf{M}_m$ тогда и только тогда, когда она коммутирует с $D^{\rho\sigma}$, $\rho, \sigma = 1, \ldots, p$ (из (25.15)). (27.3)

Рассмотрим $B = (b_{\varkappa\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n$, и вычислим (заменяя $\rho, \sigma$ на $\alpha, \beta$):

$$BD^{\alpha\beta} = (e^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda}), \qquad D^{\alpha\beta}B = (f^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda}),$$
$$\varkappa = m(\gamma - 1) + \mu; \qquad \lambda = m(\delta - 1) + \nu; \tag{27.4}$$
$$\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n; \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, m; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, p.$$

(Индексы как в (25.15).) Ясно, что

$$e^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} b_{m(\gamma-1)+\mu,\, m(\alpha-1)+\nu} & \text{для } \beta = \delta, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$f^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} b_{m(\rho-1)+\mu,\, m(\alpha-1)+\nu} & \text{для } \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{27.5}$$

Коммутирование $B$ и всех $D^{\alpha\beta}$ (см. (27.3) выше) означает, что $e^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda} = f^{\alpha\beta}_{\varkappa\lambda}$ для всех $\varkappa, \lambda, \alpha, \beta$. На основании (27.5) это эквивалентно следующему:

$$b_{m(\gamma-1)+\mu, m(\delta-1)+\nu} = \begin{cases} \text{не зависит от } \gamma & \text{для } \gamma = \delta, \\ 0 & \text{для } \gamma \neq \delta. \end{cases} \tag{27.6}$$

Если записать $a_{\mu\nu}$ для значения этого выражения при $\gamma = \delta$ (оно зависит только от $\mu\nu$) и образовать матрицу $A = (a_{\mu\nu})$, $\mu, \nu = 1, \ldots, m$, которая принадлежит $\mathbf{M}_m$, то (27.6) означает, что с учетом определений 5.2 и 5.3: $B = A$, $A$ — из $\mathbf{M}_m$, т. е. $B$ — из $\mathbf{M}_m$. Это завершает доказательство (27.3) и поэтому устанавливает теорему 6.2, b).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**28.** Мы утверждали в п. 8, что ответ на вопрос 7.1 и тем более на вопрос 7.2 — «да», если $A$, $B$, $C$ являются эрмитовыми, или унитарными, или нормальными матрицами.

Мы докажем теперь эти утверждения. Все они являются специальными случаями следующего ограничения на $A$, $B$, $C$: нормальность и принадлежность собственных значений [35] данному подмножеству $\mathscr{C}$ множества комплексных чисел. Действительно, три следующих выбора $\mathscr{C}$ отвечают эрмитовым, унитарным и нормальным матрицам соответственно:

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \text{ — множество всех вещественных чисел;} \tag{28.1}$$
$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_2 \text{ — множество всех комплексных чисел с абсолютной величиной 1;} \tag{28.2}$$
$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_3 \text{ — множество всех комплексных чисел.} \tag{28.3}$$

[35] Собственные значения матрицы $A = (a_{\varkappa\lambda})$ суть корни ее характеристического уравнения

$$\operatorname{Det}(A - z \cdot \mathbf{1}) \equiv \operatorname{Det}(a_{\varkappa\lambda} - z\delta_{\varkappa\lambda}) = 0.$$

Это легко проверяется [36].

В некотором отношении мы докажем даже немного больше, чем справедливость положительного ответа на вопрос 7.1: мы найдем по любому $\varepsilon > 0$ такое $m_1 = m_1(\varepsilon)$, что $\mathfrak{A}_m^n(\varepsilon)$ ($m$ делит $n$) выполняется не только для $m = m_1$, но для всех $m \geqslant m_1$.

29. Числа $m, p, \tau = 1, 2, \ldots$ будут считаться заданными, но мы определим их в конце пункта. Положим

$$n = mp. \tag{29.1}$$

Рассмотрим матрицу $A$ из $\mathbf{M}_n$, о которой мы предполагаем:

$$|||A||| \leqslant 1,\ A \text{ нормальна, и собственные числа лежат в данном множестве } \mathscr{C} \text{ множества комплексных чисел.} \tag{29.2}$$

Так как $A$ нормальна, мы предположим, что она задана в нормальной форме (12.1), (12.12):

$$A = UGU^{-1}, \qquad U \text{ унитарна,}$$
$$G \text{ диагональна: } G = (g_{\mu\nu}), \qquad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{для } \mu \neq \nu. \tag{29.3}$$

Так как (29.2) сохраняется при преобразовании $A \to U^{-1}AU$ ($U$ унитарна), то (29.2) выполнено и для $G$. Собственные значения $G$ есть, очевидно, $g_{11}, \ldots, g_{nn}$, и поэтому имеем

$$|g_{11}|, \ldots, |g_{nn}| < 1,$$
$$g_{11}, \ldots, g_{nn} \text{ принадлежат } \mathscr{C}. \tag{29.4}$$

Для любой пары

$$\theta, \xi = 0, 1, \ldots, \tau \tag{29.5}$$

образуем следующее множество:

$$\Gamma_{\theta,\xi}: \text{множество всех } \varkappa\,(=1, 2, \ldots, n) \text{ и } \frac{2\theta-\tau-1}{\tau} \leqslant \Re g_{\varkappa\varkappa} < \frac{2\theta-\tau+1}{\tau}, \quad \frac{2\xi-\tau-1}{\tau} \leqslant \Im g_{\varkappa\varkappa} < \frac{2\xi-\tau+1}{\tau}. \tag{29.6}$$

Эти множества попарно дизъюнктны. Они содержат все $\varkappa\,(=1, \ldots, n)$, для которых $-(\tau+1)/\tau \leqslant \Re g_{\varkappa\varkappa}$, $\Im g_{\varkappa\varkappa} < (\tau+1)/\tau$, и тем более те, для которых $|g_{\varkappa\varkappa}| \leqslant 1$, отсюда в силу (29.4) все $\varkappa = 1, \ldots, n$. Определим

$$n_{\theta,\xi} = (\text{число элементов в } \Gamma_{\theta,\xi}),$$
$$n_{\theta,\xi} = pk_{\theta,\xi} + l_{\theta,\xi},$$
$$k_{\theta,\xi} = 0, 1, 2, \ldots; \qquad l_{\theta,\xi} = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{29.7}$$

[36] Все эти утверждения инвариантны относительно преобразований $A \to UAU^{-1}$ ($U$ унитарна), поэтому достаточно доказать их по леммам 12.1 и 12.2 для диагональных матриц $G = (g_{\varkappa\lambda})$, $g_{\varkappa\lambda} = 0$ для $\varkappa \neq \lambda$. Собственные значения такой матрицы есть, очевидно, $g_{11}, \ldots, g_{nn}$; ясно, что $G$ эрмитова, или унитарна, или нормальна соответственно тогда и только тогда, когда $g_{11}, \ldots, g_{nn}$ вещественны, или по абсолютной величине равны 1, или произвольны.

Предыдущее замечание показывает, что

$$\sum_{\theta,\xi=0}^{\tau} n_{\theta,\xi} = n. \tag{29.8}$$

Из (29.4) следует, что $\mathscr{C}$ содержит элементы с $|\cdot|\leqslant 1$, пусть $\tilde{g}^0$ будет один из них. Если $k_{\theta,\xi}\neq 0$, то также и $n_{\theta,\xi}\neq 0$, поэтому из (29.7) следует, что $\mathscr{C}$ содержит элемент, удовлетворяюший условиям (29.6) при $\varkappa$ из $\Gamma_{\theta,\xi}$; пусть $\tilde{g}^{\theta,\xi}$ будет таким элементом. Определим теперь $\approx{g}_1, \ldots, \approx{g}_n$ следующим образом:

Для всякой пары $\theta, \xi = 0, 1, \ldots, \tau$ выберем $\tau k_{\theta,\xi}$ элементов среди $n_{\theta,\xi}$ элементов $\varkappa$ из $\Gamma_{\theta,\xi}$ (см. 29.7) и для этих $\varkappa$ положим $\approx{g}_\varkappa = \tilde{g}^{\theta,\xi}$. (Это возможно лишь тогда, когда $k_{\theta,\xi}\neq 0$ и $\tilde{g}^{\theta,\xi}$ определено, см. выше.) Эти $\varkappa$ отнесем к *первому роду*. Для оставшихся $l_{\theta,\xi}$ элементов $\varkappa$ из $\Gamma_{\theta,\xi}$ (см.(29.7)) определим $\approx{g} = \tilde{g}^0$. Такие $\varkappa$ отнесем ко *второму роду*. (29·9)

Расстояние между двумя элементами в определенном условиями (29.6) квадрате не превосходит $2\sqrt{2}/\tau$. Отсюда получаем

$$|g_{\varkappa\varkappa} - \approx{g}_\varkappa| < 2\sqrt{2}/\tau \qquad \text{для всех } \varkappa \text{ первого рода} \tag{29.10}$$

Расстояние между любыми двумя элементами единичного круга $|\cdot|$ не более 2. Поэтому

$$|g_{\varkappa\varkappa} - \approx{g}_\varkappa| \leqslant 2 \qquad \text{для всех } \varkappa \text{ второго рода.} \tag{29.11}$$

Учитывая (29.7),

Число $\varkappa$ второго рода равно

$$\sum_{\theta,\xi=0}^{\tau} l_{\theta,\xi} \leqslant (\tau+1)^2 p. \tag{29.12}$$

Определим диагональную матрицу из $\mathbf{M}_n$:

$$\hat{G} = (\hat{g}_{\varkappa\lambda}), \qquad \hat{g}_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} \approx{g}_\varkappa & \text{для } \varkappa = \lambda, \\ 0 & \text{для } \varkappa \neq \lambda. \end{cases} \tag{29.13}$$

Тогда

$$\|G - \hat{G}\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} |g_{\varkappa\lambda} - \hat{g}_{\varkappa\lambda}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} |g_{\varkappa\varkappa} - \approx{g}_\varkappa|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left((\tau+1)^2 p\cdot 4 + n\frac{8}{\tau^2}\right) = \frac{4(\tau+1)^2}{m} + \frac{8}{\tau^2}.$$

$$\|G - \hat{G}\|^2 \leqslant \frac{4(\tau+1)^2}{m} + \frac{8}{\tau^2}. \tag{29.14}$$

По определению (29.9) число элементов $\varkappa$ первого рода в каждом $\Gamma_{\theta,\xi}$ делится на $p$. Поэтому число всех элементов первого рода $\varkappa = 1, \ldots, n$ также делится на $p$. Благодаря (29.1) $n$ делится на $p$, и поэтому число всех элементов второго рода $\varkappa = 1, \ldots, n$ также делится на $p$. Учитывая (29.9), все эти утверждения дают следующее: каждое значение, встречающееся среди $\overset{\approx}{g}_{11}, \ldots, \overset{\approx}{g}_{\varkappa\varkappa}$, имеет кратность, делящуюся на $p$. Или эквивалентно:

Множество всех $\varkappa = 1, \ldots, n$ может быть разложено в попарно дизъюнктные подмножества по $p$ элементов в каждом (их число поэтому есть $n/p = m$):

$\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, причем в каждом $\Delta_\mu$ все $\overset{\approx}{g}_\varkappa$, $\varkappa$—из $\Delta_\mu$, имеют одинаковые значения. (29.15)

Поэтому существует подстановка множества $(1, \ldots, n)$, которая отображает $\Delta_\mu$ на множество $(\mu, m + \mu, \ldots, (p-1)m + \mu)$ для каждого $\mu = 1, \ldots, m$. Если мы применим эту подстановку к строкам и столбцам $G = (g_{\varkappa\lambda})$ и к строкам $U$, то (29.3) остается справедливым и для преобразованных матриц, а $g_{\varkappa\varkappa}$ и $\overset{\approx}{g}_\varkappa$ подвергнутся той же перестановке.

Следовательно,

$$\Delta_\mu = (\mu, m + \mu, \ldots, (p-1)m + \mu) \qquad \text{для } \mu = 1, \ldots, m. \tag{29.16}$$

Имея в виду (29.15), обозначим общее значение всех $\overset{\approx}{g}_\varkappa$ для $\varkappa$ из $\Delta_\mu$ через $h_\mu$. Тогда (29.15) и (29.16) приводят к следующему:

$$\overset{\approx}{g}_\varkappa = h_\mu \qquad \text{для } \varkappa = m(\alpha - 1) + \mu, \qquad \text{где } \varkappa = 1, \ldots, n;$$
$$\mu = 1, \ldots, m; \qquad \alpha = 1, \ldots, p. \tag{29.17}$$

Образуем диагональную матрицу из $\mathbf{M}_m$:

$$C = (c_{\mu\nu}), \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, m, \qquad c_{\mu\nu} = \begin{cases} h_\mu & \text{для } \mu = \nu, \\ 0 & \text{для } \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{29.18}$$

Тогда (29.13), (29.17) и (29.18) дают с учетом определений 5.2 и 5.3

$$\hat{G} = C. \tag{29.19}$$

Скомбинируем (29.14) и (29.19) и примем во внимание, что преобразование $B \to UBU^{-1}$ ($U$ унитарна) оставляет $\|\cdot\|$ неизменным. Используя (29.3), имеем

$$\| A - UCU^{-1} \| \leqslant \varepsilon \tag{29.20}$$

в предположении

$$\sqrt{4(\tau + 1)^2/m + 8/\tau^2} \leqslant \varepsilon. \tag{29.21}$$

Заметим, что собственные значения $C$ есть $c_{11}, \ldots, c_{mm}$. Каждое $c_{\mu\mu} = h_\mu$ есть $\approx g_\varkappa$ и, следовательно, элемент $\mathscr{C}$ с $|\cdot| \leqslant 1$. Последнее обстоятельство (вместе с диагональностью $C$) дает $|||C||| \leqslant 1$. Поэтому $C$ обладает следующими свойствами:

$$C \text{ принадлежит } \mathbf{M}_m, \qquad |||C||| \leqslant 1,$$

$$C \text{ нормальна, и собственные значения принадлежат } \mathscr{C}. \tag{29.22}$$

Остается обеспечить (29.21) надлежащим выбором $m$, $p$, $\tau$; (29.21) есть следствие

$$\tau \geqslant 4/\varepsilon, \qquad m \geqslant 8(\tau + 1)^2/\varepsilon^2. \tag{29.23}$$

Поэтому можно выбрать $\tau$ как минимальное из чисел 1, 2, ..., для которого выполнено первое неравенство (29.23); затем мы возьмем в качестве $m_1$ минимальное из чисел 1, 2, ..., для которого выполнено последнее неравенство (29.23). Косвенным образом $m_1 = m_1(\varepsilon)$. Тогда

$$m \geqslant m_1 \tag{29.24}$$

влечет (29.23), где $p = 1, 2, \ldots$ совершенно произвольно. Мы доказали тем самым следующую теорему.

Теорема 29.1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $m_1 = m_1(\varepsilon)$, что, каково бы ни было $m \geqslant m_1$ и $p$ (оба равны 1, 2, ...), справедливо следующее: пусть $n = mp$; для всякой нормальной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_n$, такой, что $|||A||| \leqslant 1$ и все собственные числа ее лежат в множестве $\mathscr{C}$, существует нормальная матрица $C$ из $\mathbf{M}_m$, $|||C||| \leqslant 1$, у которой все собственные числа лежат в множестве $\mathscr{C}$, и унитарная матрица $U$ из $\mathbf{M}_n$, причем $\| A - UCU^{-1} \| \leqslant \varepsilon$.*

Эта теорема доказывает все утверждения п. 28.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

30. Мы хотим установить тождество (9.11), (23.4):

$$\| AB - BA \|^2 - \| AB^* - B^*A \|^2 = -t((A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*)), \tag{30.1}$$

которое выполнено для всех матриц $A$, $B$ из $\mathbf{M}_n$. Если $A$ или $B$ нормальна, то это дает (9.8):

$$\| AB - BA \| = \| AB^* - B^*A \|, \tag{30.2}$$

что будет установлено непосредственно.

Дальнейшая специализация (30.2) приводит к следующему:

$$\text{Коммутативность } A, B \text{ влечет коммутативность } A, B^*,$$

$$\text{если } A \text{ или } B \text{ нормальна.} \tag{30.3}$$

Перед тем как доказать (30.1) и, следовательно, также (30.2) и (30.3), мы хотим сказать несколько слов о возможных обобщениях этих утверждений.

Они высказаны для матричных колец $\mathbf{M}_n$ конечной размерности, и естественно спросить, верны ли они для $\mathbf{M}_\infty$, т. е. ограниченных матриц (операторов) в

гильбертовом пространстве? Этот вопрос относится, конечно, к (30.3), поскольку там понятия $t(\cdot)$ и $\|\cdot\|$ (которые не определены для $\mathbf{M}_\infty$) не встречаются.

Верно или нет (30.3) для гильбертова пространства — неизвестно, и было бы желательно это исследовать *. Это, конечно, не «формальное» соотношение, потому что отрицание его «формального» аналога может быть установлено (не вполне строго) с использованием «квантовомеханических $q$-чисел» (т. е. неограниченных операторов) [37].

В некоторых кольцах операторов в гильбертовом пространстве, изученных Ф. Мюрреем и автором (см. примеч. 8), $t(\cdot)$ и $\|\cdot\|$ определены. Доказательство (30.3), которое мы дадим в следующем пункте, чисто «формально» по отношению к понятиям $t(\cdot)$ и $\|\cdot\|$. Поэтому оно без изменений переносится на упомянутые выше кольца — для этих колец утверждения (30.1) и вместе с этим (30.2) и (30.3) установлены.

**31**. Докажем теперь (30.1) в $\mathbf{M}$.

Выражение $\| AB-BA \|^2 - \| AB^* - B^*A \|^2$ равно

$$t((AB-BA)^*(AB-BA)) - t((AB^*-B^*A)^*(AB^*-B^*A)).$$

Это есть сумма значений $t(\cdot)$ на следующих членах:

$$B^*A^*AB,\quad -B^*A^*BA,\quad -A^*B^*AB,\quad A^*B^*BA,$$

$$-BA^*AB^*,\quad BA^*B^*A,\quad A^*BAB^*,\quad -A^*BB^*A.$$

С помощью второй формулы в (3.11) эти члены можно заменить на

$$A^*ABB^*,\quad -AB^*A^*B,\quad -ABA^*B^*,\quad AA^*B^*B,$$

$$-A^*AB^*B,\quad ABA^*B^*,\quad AB^*A^*B,\quad -AA^*BB^*.$$

Опуская члены, которые аннулируются, и упорядочивая другие, получим

$$-A^*AB^*B,\quad A^*ABB^*,\quad AA^*B^*B,\quad -AA^*BB^*.$$

---

* См. комментарии к статье.

[37] Пусть $Q_1$, $P_1$ и $Q_2$, $P_2$ — две коммутирующие пары «канонически сопряженных» величин, которые вводятся в квантовой механике. Иными словами,

$$P_\varkappa P_\lambda - P_\lambda P_\varkappa = 0,\quad Q_\varkappa Q_\lambda - Q_\lambda Q_\varkappa = 0,$$

$$P_\varkappa Q_\lambda - Q_\lambda P_\varkappa = \begin{cases} i\cdot 1 & \text{для } \varkappa = \lambda, \\ 0 & \varkappa \neq \lambda, \end{cases} \qquad \varkappa, \lambda = 1,2.$$

Мы опускаем квантовомеханический множитель $h/2\pi$, который обычно стоит перед $i\cdot 1$. Он несуществен в этом контексте. Образуем теперь $A = P_1 + iP_2$, $B = Q_1 + iQ_2$, тогда $A^* = P_1 - iP_2$, $B^* = Q_1 - iQ_2$. Отсюда $A^*A - AA^* = 0$, $B^*B - BB^* = 0$, т. е. оба оператора $A$ и $B$ — нормальны. Можно проверить, что $AB - BA = 0$, $AB^* - B^*A = 2i\cdot 1$, т. е. $A$ и $B$ коммутируют, в то время как $A$ и $B^*$ — нет.

Эти члены дают вместе выражение

$$-(A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*).$$

Отсюда $t(\cdot)$ от этого произведения равно нашему исходному выражению, что есть в точности (30.1).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space.— Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932, vol. 15.
2. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 49—131.
3. *Neuman J. von.* Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 370—427.
4. *Neumann J. von.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. B.: Springer, 1932.
5. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 116—229. (Рус. пер. см. наст. изд., т. 2).
6. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators. II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 208—248. (Рус. пер. см. наст. изд., т. 2).
7. *Neumann J. von.* On infinit direct products.— Compos. math., 1938, bd. 6, blz. 1—77. (Рус. пер. см. наст. кн.)

# ОДНОЗНАЧНОСТЬ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА*

1. В новой квантовой теории фундаментальное значение имеет так называемое соотношение коммутации

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} 1.$$

Это объясняется тем, что «оператор координаты» $Q$ и «оператор импульса» $P$ определяются им в сущности однозначно [1]. Говоря математически, речь идет о следующем утверждении: два эрмитовых оператора $P$ и $Q$, действующих в некотором гильбертовом пространстве, определяются коммутационным соотношением однозначно с точностью до вращения, т. е. унитарного преобразования, гильбертова пространства [2]. Здесь необходимо предположить лишь дополнительно, что $P$ и $Q$ образуют неприводимую систему (см. дальше примеч. 6). Мы будем, удобства ради, как это делается в шредингеровском изложении квантовой теории, интерпретировать гильбертово пространство как пространство всех комплекснозначных функций $f(q)$, $-\infty < q < +\infty$, с конечным $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(q)|^2 dq$. Вопрос заключается в том, является ли специальная шредингеровская реализация коммутационного соотношения

$$Q: f(q) \to qf(q), \qquad P: f(q) \to \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dq} f(q)$$

в существенном единственной [3]?

Такая формулировка проблемы требует, однако, некоторого уточнения. Дело в том, что операторы $P$ и $Q$ являются неограниченными и, следовательно, не всюду определенными операторами, поэтому оператор $PQ - QP$, который должен равняться $(h/2\pi i)\cdot 1$, также определен не всюду. Поэтому, прежде чем приравнивать обе стороны соотношения, необходимо уточнить области определения участвующих в нем операторов (имеется в виду левая часть соотношения). Эту трудность можно обойти следующим образом. Из коммутационного соотношения, по крайней мере формально, следует, что

$$PF(Q) - F(Q)P = (h/2\pi i) F'(Q)$$

($F(x)$ аналитична, $F'(x)$ — производная $F(x)$, см. примеч. 1). Подставляя $F(x) = \exp[(2\pi i/h)\beta x]$, имеем

$$\exp[-(2\pi i/h)\beta Q] P \exp[(2\pi i/h)\beta Q] = P + \beta 1.$$

---

* Math. Ann., 1931, Bd. 104, S. 570—578.

[1] См. [1, 2]. Особенно существенна роль этого соотношения в последней работе. Интересная попытка обоснования рассматриваемой нами ниже теоремы единственности была предпринята в работе [3]. Однако сходимость степенных рядов от неограниченных операторов и законность их использования вызывают сомнение.

[2] Это преобразование заменяет $P$, $Q$ на $UPU^{-1}$, $UQU^{-1}$; при этом сохраняются эрмитов характер операторов и соотношение коммутации.

[3] См. [4].

Отсюда, опять-таки формально, следует, что

$$\exp[-(2\pi i/h)\beta Q]\, F(P)\exp[(2\pi i/h)\beta Q] = F(P+\beta 1),$$

и в частности для $F(x)=\exp[(2\pi i/h)\alpha x]$

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\alpha P\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\beta Q\right)=\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\alpha\beta\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\beta Q\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\alpha P\right).$$

Последнее уравнение есть соотношение Вейля, и оно заменяет рассматриваемое нами коммутационное соотношение [4]. Его преимущество заключается в следующем: с помощью операторов $P$ и $Q$ можно определить семейства унитарных операторов $U(\alpha)=\exp[(2\pi i/h)\alpha P]$ и $V(\beta)=\exp[(2\pi i/h)\beta Q]$, удовлетворяющих свойству мультипликативности [5]

$$U(\alpha)U(\beta)=U(\alpha+\beta),\qquad V(\alpha)V(\beta)=V(\alpha+\beta);$$

тогда обе части соотношения Вейля

$$U(\alpha)V(\beta)=\exp[(2\pi i/h)\alpha\beta]\,V(\beta)U(\alpha)$$

являются унитарными и, следовательно, ограниченными и всюду определенными операторами, так что их смысл совершенно ясен. Теперь остается только доказать, что единственным неприводимым представлением [6] соотношения Вейля является шредингеровское представление (см. примеч. 5). Это замечание принадлежит Стоуну (см. примеч. 5) и было любезно сообщено автору до его опубликования.

В последующем будет доказываться сформулированное утверждение об единственности. Мы сможем указать все (в том числе и приводимые) представления.

**2.** Пусть $\mathfrak{H}$ есть гильбертово пространство (в последующем почти всегда реализуемое или как пространство комплексных последовательностей $\{x_1, x_2, \ldots\}$ с конечной $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$, или как пространство комплексных функций $f(q)$, $-\infty<q<+\infty$, с конечным $\int_{-\infty}^{\infty}|f(q)|^2dq$. Мы будем использовать для объектов в $\mathfrak{H}$ геометрическую терминологию. В $\mathfrak{H}$ введены «внутреннее произведение» $(f, g)$ $\left(\text{в примерах } \sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty}f(q)\overline{g(q)}\,dq\right)$ и «абсолютная величина» $|f|=\sqrt{(f, f)}$ [7] $\left(\text{в примерах } \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2} \text{ и } \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(q)|^2\,dq}\right)$. Если в $\mathfrak{H}$ задан ограниченный

---

[4] См. [5].

[5] См. работу Вейля в предыдущем примеч., а также [6]. В шредингеровском представлении легко вычислить, что

$$U(\alpha){:}f(q)\to f(q+\alpha),\quad V(\beta){:}f(q)\to\exp[(2\pi i/h)\beta q]\,f(q).$$

[6] Система операторов $A$, $B$, ... (в рассматриваемой нами реализации — это все операторы $U(\alpha)$, $V(\beta)$) называется неприводимой, если в гильбертовом пространстве не существует отличного от 0 замкнутого подпространства $\mathfrak{M}$, такого, что вместе с $f$ в $\mathfrak{M}$ лежат и $Af$, $Bf$, ... См. по этому поводу [7].

[7] См. [8], а также работу автора [9].

линейный оператор $A$, то через $A^*$ мы будем обозначать сопряженный оператор (так что $(Af, g) = (f, A^*g)$, $(f, Ag) = (A^*f, g)$). Кроме того, мы скажем, что оператор $A(\alpha)$ зависит от параметра $\alpha$ измеримым образом, если все функции $(A(\alpha) f, g)$ (являющиеся комплекснозначными функциями вещественной переменной $\alpha$, которые зависят от $f$ и $g$, как от параметров) измеримы по лебеговой мере в $\alpha$ [8].

Ясно, что из измеримости $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ следует измеримость $aA(\alpha)$, $A(\alpha)^*$, $A(\alpha) + B(\alpha)$. Несколько сложнее обстоит дело с измеримостью $A(\alpha) B(\alpha)$. Для проверки последней можно воспользоваться формулой умножения матриц, если ввести полную ортонормированную систему векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$:

$$(A(\alpha) B(\alpha) f, g) = (B(\alpha) f, A(\alpha)^* g) = \sum_{n=1}^{\infty} (B(\alpha) f, \varphi_n)(\varphi_n, A(\alpha)^* g) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A(\alpha)\varphi_n, g)(B(\alpha) f, \varphi_n).$$

Все то же самое справедливо и в случае, когда вместо $\alpha$ рассматривается несколько переменных $\alpha, \beta, \ldots$:

Теперь мы вернемся к нашей задаче, заменив в $V(\beta)$ аргумент $\beta$ на $(h/2\pi)\beta$. Тогда она будет звучать следующим образом.

Пусть $U(\alpha)$, $V(\beta)$ есть унитарные операторы, которые измеримым образом зависят от $\alpha$, $\beta$ и удовлетворяют соотношениям

$$U(\alpha) U(\beta) = U(\alpha+\beta), \qquad V(\alpha) V(\beta) = V(\alpha+\beta), \qquad U(\alpha) V(\beta) = e^{i\alpha\beta} V(\beta) U(\alpha);$$

необходимо описать все системы такого вида.

Введем (зависящий от $\alpha$, $\beta$ измеримым образом, унитарный) оператор

$$S(\alpha, \beta) = \exp[-(i/2)\alpha\beta] U(\alpha) V(\beta) = \exp[(i/2)\alpha\beta] V(\beta) U(\alpha).$$

Тогда указанные выше соотношения можно записать единым образом:

$$S(\alpha, \beta) S(\gamma, \delta) = \exp[{}^1/_2 i(\alpha\delta - \beta\gamma)] S(\alpha+\gamma, \beta+\delta).$$

Из него следует, что $S(0, 0)$ есть единичный оператор и $S(-\alpha, -\beta)$ является обратным к $S(\alpha, \beta)$, так что $S(\alpha, \beta)^* = S(-\alpha, -\beta)$. Построим по $S(\alpha, \beta)$ линейный функционал следующим образом: пусть на плоскости $\alpha$, $\beta$ задана абсолютно интегрируемая функция $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$. По неравенству Шварца

$$|(S(\alpha, \beta) f, g)| \leqslant |S(\alpha, \beta) f| |g| = |f| |g|,$$

---

[8] Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ есть полная ортонормированная система в $\mathfrak{H}$ и $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi_n$. Тогда $(A(\alpha) f, g) = \lim_{M, N \to \infty} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} x_m \bar{y}_n (A(\alpha)\varphi_m, \varphi_n)$, поэтому достаточно измеримости функций $(A(\alpha)\varphi_m, \varphi_n)$, т. е. матричных элементов $A(\alpha)$ в базисе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

т. е. эта величина ограничена, поэтому интеграл

$$\iint \mathbf{a}(\alpha, \beta)(S(\alpha, \beta) f, g)\, d\alpha d\beta$$

абсолютно сходится. Более того, если величина $c = \iint |\mathbf{a}(\alpha, \beta)|\, d\alpha d\beta$ фиксирована, то этот интеграл по модулю $\leqslant c\, |f|\, |g|$. При этом он линеен по $f$ и сопряженно линеен по $g$. Поэтому здесь применима теорема Ф. Риса [9], согласно которой для каждого $f$ существует такой вектор $f^*$, что для любого $g$ указанное выше выражение равно $(f^*, g)$ и, более того, $|f^*| \leqslant c\, |f|$. Вектор $f^*$ линейно зависит от $f$, поэтому можно определить линейный оператор $Af = f^*$, причем по-предыдущему оператор $A$ ограничен. Запишем символически

$$A = \iint \mathbf{a}(\alpha, \beta) S(\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta,$$

имея в виду соотношение

$$(Af, g) = \iint \mathbf{a}(\alpha, \beta)(S(\alpha, \beta) f, g)\, d\alpha d\beta.$$

Функцию $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$ мы будем называть ядром оператора $A$.

Выведем правила вычислений для этих операторов. Ясно, что $aA$ имеет ядро $a\mathbf{a}(\alpha, \beta)$, $A^*$, ввиду равенства $S(\alpha, \beta)^* = S(-\alpha, -\beta)$, — ядро $\overline{\mathbf{a}(-\alpha, -\beta)}$, $AS(u, v)$ и $S(u, v)A$, ввиду правил умножения для $S(\alpha, \beta)$,— ядра

$$\exp[{}^1/_2 i(\alpha v - \beta u)]\, \mathbf{a}(\alpha - u, \beta - v), \qquad \exp[-{}^1/_2 i(\alpha v - \beta u)]\, \mathbf{a}(\alpha - u, \beta - v).$$

Если $A$, $B$ имеют соответственно ядра $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$, $\mathbf{b}(\alpha, \beta)$, то $A + B$ имеет, очевидно, ядро $\mathbf{a}(\alpha, \beta) + \mathbf{b}(\alpha, \beta)$. Для $AB$ требуются небольшие вычисления:

$$(ABf, g) = (Bf, A^*g) = \iint \mathbf{b}(\alpha, \beta)(S(\alpha, \beta) f, A^*g)\, d\alpha d\beta =$$
$$= \iint \mathbf{b}(\alpha, \beta)(AS(\alpha, \beta) f, g)\, d\alpha d\beta = \iiiint \mathbf{b}(\alpha, \beta) \exp[{}^1/_2 i(\gamma\beta - \delta\alpha)]\, \mathbf{a}(\gamma -$$
$$- \alpha, \delta - \beta)(S(\gamma, \delta) f, g)\, d\alpha d\beta d\gamma d\delta = \iint \Big[ \iint \exp[{}^1/_2 i(\gamma\delta - \delta\alpha)]\, \mathbf{a}(\gamma -$$
$$- \alpha, \delta - \beta)\, \mathbf{b}(\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta \Big] (S(\gamma, \delta) f, g)\, d\gamma d\delta.$$

Ядро $AB$ есть поэтому (мы пишем $\alpha$, $\beta$, $\xi$, $\eta$ вместо $\gamma$, $\delta$, $\alpha$, $\beta$)

$$\iint \exp[{}^1/_2 i(\alpha\eta - \beta\xi)]\, \mathbf{a}(\alpha - \xi, \beta - \eta)\, \mathbf{b}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

(абсолютная интегрируемость следует из вывода).

Наконец, мы покажем, что если оператор $A$ обращается в нуль, то его ядро (с точностью до множества лебеговой меры нуль) равно нулю. В самом деле, из $A = 0$ следует, что $S(-u, -v)\, AS(u, v) = 0$, поэтому ядро $\exp[i(\alpha v - \beta u)] \times \times\, \mathbf{a}(\alpha, \beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\iint \exp[i(\alpha v - \beta u)]\, \mathbf{a}(\alpha, \beta)(S(\alpha, \beta) f, g)\, d\alpha d\beta = 0.$$

---

[9] См. [9, примеч. 52 на с. 94].

Отсюда

$$\iint P(\alpha, \beta)\, \mathbf{a}(\alpha, \beta)\, (S(\alpha, \beta) f, g)\, d\alpha d\beta = 0$$

для любой линейной комбинации $P(\alpha, \beta)$ мономов $e^{i(\varkappa\alpha+l\beta)}$, т. е. для любого тригонометрического полинома с периодом $p > 0$ по $\alpha$, $\beta$. Второй множитель в левой части последнего равенства абсолютно интегрируем, третий — ограничен, поэтому относительно первого множителя мы имеем равномерную ограниченность. Следовательно, мы можем последовательно расширять класс функций $P(\alpha, \beta)$: 1) все непрерывные функции с периодом $p > 0$ по $\alpha$, $\beta$; 2) все ограниченные непрерывные функции; 3) все ограниченные функции первого класса Бэра. Поэтому если $\mathfrak{R}$ есть произвольный (конечный) прямоугольник в $\alpha$, $\beta$-плоскости, то мы можем взять $P(\alpha, \beta) = 1$ в $\mathfrak{R}$ и $= 0$ вне $\mathfrak{R}$

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} \mathbf{a}(\alpha, \beta)\, (S(\alpha, \beta) f, g)\, d\alpha d\beta = 0$$

для любого $\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathbf{a}(\alpha, \beta)\,(S(\alpha, \beta) f, g) = 0$ (с точностью до множества меры нуль). Зафиксируем в этом равенстве $f$, и пусть $g$ пробегает полную ортонормированную систему векторов. Тогда из последнего равенства следует, что (с точностью до множества меры нуль в $\alpha$, $\beta$-плоскости) $\mathbf{a}(\alpha, \beta)\, S(\alpha, \beta) f = 0$. Поскольку для $f \neq 0$ $|S(\alpha, \beta) f| = |f| \neq 0$, то $\mathbf{a}(\alpha, \beta) = 0$, что завершает доказательство.

3. Для решения проблемы единственности мы рассмотрим оператор

$$A = \iint \exp(-{}^1/_4\alpha^2 - {}^1/_4\beta^2)\, S(\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta.$$

Этот оператор в силу наших прежних результатов эрмитов (т. е. $A^* = A$) и не равен нулю, он обладает, кроме того, следующим замечательным свойством: оператор $AS(u, v)A$ отличается от $A$ лишь числовым множителем. Действительно, $A$ имеет ядро $\exp(-{}^1/_4\alpha^2 - {}^1/_4\beta^2)$, следовательно, $S(u, v)A$ — ядро $\exp[-{}^1/_2 i(\alpha v - \beta u) - {}^1/_4(\alpha - u)^2 - {}^1/_4(\beta - v)^2]$ и $AS(u, v)A$ — ядро

$$\iint \exp[{}^1/_2 i(\alpha\eta - \beta\xi) - {}^1/_4(\alpha - \xi)^2 - {}^1/_4(\beta - \eta)^2 - {}^1/_4 i(\xi v - \eta u) -$$

$$- {}^1/_4(\xi - u)^2 - {}^1/_4(\eta - v)^2]\, d\xi d\eta = \iint \exp[{}^1/_2(-\xi^2 - \eta^2 + (\alpha + u - i\beta - iv)\xi +$$

$$+ (\beta + v + i\alpha + iu)\eta) - {}^1/_4(\alpha^2 + \beta^2 + u^2 + v^2)]\, d\xi d\eta = \iint \exp[-{}^1/_4(u^2 +$$

$$+ v^2 + \alpha^2 + \beta^2) - {}^1/_2(\xi^2 - (\alpha + u - i\beta - iv)\xi + \eta^2 - (\beta + v + i\alpha + iu)\eta)]\, d\xi d\eta =$$

$$= \exp[-{}^1/_4(u^2 + v^2 + \alpha^2 + \beta^2)] \iint \exp[-{}^1/_2(\xi - {}^1/_2(\alpha + u - i\beta - iv))^2 -$$

$$- {}^1/_2(\eta - i/2(\alpha + u - i\beta - iv))^2]\, d\xi d\eta = \exp[-{}^1/_4(u^2 + v^2 + \alpha^2 + \beta^2)] \times$$

$$\times \iint \exp(-{}^1/_2 x^2 - {}^1/_2 y^2)\, dx dy = 2\pi \exp(-{}^1/_4 u^2 - {}^1/_4 v^2) \exp(-{}^1/_4\alpha^2 - {}^1/_4\beta^2).$$

В последнем выражении первый множитель есть константа, а второй совпадает с ядром $A$, поэтому

$$AS(u, v)A = 2\pi \exp(-{}^1/_4 u^2 - {}^1/_4 v^2)\, A.$$

Теперь мы рассмотрим замкнутое подпространство $\mathfrak{M}$ решений уравнения $Af = 2\pi f$. Эти решения имеют вид $Ag$ (с $g = (1/2\pi) f$), и, подставляя $Ag$ в уравнение, мы получаем соотношение $A^2 = 2\pi A$ (в приведенном выше равенстве оно соответствует $u = v = 0$). Пусть $\mathfrak{N}$ есть замкнутое подпространство, ортогональное $\mathfrak{M}$. Тогда элемент $f$ из $\mathfrak{N}$ ортогонален всем элементам из $\mathfrak{M}$, т. е. всем $Ag$. Поэтому $(f, Ag) = 0$, откуда $(Af, g) = 0$, следовательно, $Af = 0$.

Если $f$, $g$ принадлежат $\mathfrak{M}$, то

$$(S(\alpha, \beta) f, S(\gamma, \delta) g) = (1/4\pi^2)(S(\alpha, \beta) Af, S(\gamma, \delta) Ag) =$$

$$= (1/4\pi^2)(AS(-\gamma, -\delta) S(\alpha, \beta) Af, g) = (1/4\pi^2) \exp[{}^1/_2 i (\alpha\delta -$$

$$-\beta\gamma)] (AS(\alpha-\gamma, \beta-\delta) Af, g) = (1/2\pi) \exp[-{}^1/_4(\alpha-\gamma)^2 - {}^1/_4(\beta-\delta)^2 +$$

$$+ {}^1/_2 i (\alpha\delta - \beta\gamma)] (Af, g) = \exp[-{}^1/_4(\alpha-\gamma)^2 - {}^1/_4(\beta-\delta)^2 + {}^1/_2 i(\alpha\delta - \beta\gamma)] (f, g).$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ есть ортонормированная система, полная в $\mathfrak{M}$ (т. е. $\mathfrak{M}$ порождается этими элементами; количество их либо конечно, либо счетно). Из $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}$ (т. е. 1 при $m = n$, 0 в остальных случаях) следует, что

$$(S(\alpha, \beta)\varphi_m, S(\gamma, \delta)\varphi_n) = \exp[-{}^1/_4(\alpha-\gamma)^2 - {}^1/_4(\beta-\delta)^2 + {}^1/_2 i(\alpha\delta - \beta\gamma)]\,\delta_{mn}.$$

Обозначим замкнутое подпространство, порождаемое элементами $S(\alpha, \beta)\varphi_n$ ($n$ фиксировано, $\alpha$, $\beta$ меняются) через $\mathfrak{B}_n$; тогда из предыдущей записи следует, что при $m \neq n$ $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_n$ ортогональны. Эти $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ порождают некоторое замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{S}$; пусть $\mathfrak{T}$ есть ортогональное дополнение $\mathfrak{S}$.

$S(\gamma, \delta)$ переводит $S(\alpha, \beta)\varphi_n$ в вектор того же вида (с точностью до числового множителя) и, следовательно, отображает $\mathfrak{B}_n$ в свою часть; поскольку $S(\gamma, \delta)^{-1} = S(-\gamma, -\delta)$, то эта часть совпадает с $\mathfrak{B}_n$, т. е. $\mathfrak{B}_n$ инвариантно. Отсюда следует инвариантность $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{S}$ содержит все $\mathfrak{B}_n$, следовательно, все $\varphi_n$, следовательно, $\mathfrak{M}$, поэтому $\mathfrak{T}$ лежит в $\mathfrak{N}$. Таким образом, в $\mathfrak{T}$ $Af = 0$. Из наших рассмотрений следует, что подпространство $\mathfrak{T}$ инвариантно относительно действия операторов $S(\alpha, \beta)$, поэтому $S(\alpha, \beta)$ можно рассматривать как операторы в $\mathfrak{T}$. Но в $\mathfrak{T}$ $A \equiv 0$, поэтому из нашего предыдущего рассуждения следует, что в $\mathfrak{T}$ нет никаких $f \neq 0$. Следовательно, $\mathfrak{T}$ содержит лишь 0 и $\mathfrak{S}$ совпадает с гильбертовым пространством, т. е. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ порождают все гильбертово пространство.

Таким образом, гильбертово пространство распадается в конечную или счетную сумму (попарно ортогональных) подпространств $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, каждое из которых инвариантно относительно действия всех $S(\alpha, \beta)$; при этом в каждом из этих подпространств для $S(\alpha, \beta)$ справедливы все установленные ранее свойства (что касается неприводимости, то она имеет место, естественно, для каждого $\mathfrak{B}_n$, и каждое из этих подпространств можно рассматривать как гильбертово пространство). Итак, относительно действия $S(\alpha, \beta)$ в $\mathfrak{B}_n$ нам известны следующие факты. Обозначим $\mathfrak{B}_n$ через $\mathfrak{B}$ и $S(\alpha, \beta)\varphi_n$ через $f_{\alpha,\beta}$. Тогда

$$S(\gamma, \delta) f_{\alpha,\beta} = \exp[{}^1/_2 i(\beta\gamma - \alpha\delta)] f_{\alpha+\gamma,\beta+\delta},$$

$$(f_{\alpha,\beta}, f_{\gamma,\delta}) = \exp[-{}^1/_4(\alpha-\gamma)^2 - {}^1/_4(\beta-\delta)^2 + {}^1/_2 i(\alpha\delta - \beta\gamma)]$$

и конечные линейные комбинации различных $f_{\alpha,\beta}$ (любые комбинации допустимы!) образуют в $\mathfrak{B}$ всюду плотное множество.

Если мы покажем, что любые два таких пространства $\mathfrak{B}$ с соответствующими множествами унитарных операторов $S(\alpha, \beta)$ и точек $f_{\alpha,\beta}$ изоморфны, то наша цель будет достигнута. Под изоморфизмом понимается следующее: существует взаимно однозначное, линейное, сохраняющее длину отображение пространств, переводящее элементы $f_{\alpha,\beta}$, $S(\alpha, \beta)$ одного пространства в соответствующие элементы другого пространства.

Наша формула для $(f_{\alpha,\beta}, f_{\delta,\gamma})$ позволяет явно вычислить норму любой линейной комбинации векторов $f_{\alpha,\beta}$, поэтому, сопоставив одинаковые линейные комбинации в двух пространствах друг с другом, мы получим взаимно однозначное, линейное, сохраняющее длину отображение на множестве линейных комбинаций. Поскольку это множество плотно в $\mathfrak{B}$, то мы можем по непрерывности продолжить построенное отображение на все $\mathfrak{B}$. При этом свойства линейности, инвариантности длины и взаимно однозначности сохраняются, а элементы $f_{\alpha,\beta}$ переходят друг в друга. Ввиду формулы для $S(\gamma, \delta) f_{\alpha,\beta}$ операторы $S(\gamma, \delta)$ действуют одинаково на элементы $f_{\alpha,\beta}$, а следовательно, и на их линейные комбинации и на предельные точки и, стало быть, во всем $\mathfrak{B}$.

Таким образом, если вернуться к $U(\alpha)$, $V(\beta)$, то доказано следующее.

Система унитарных операторов $U(\alpha)$, $V(\beta)$ вместе с набором точек $f_{\alpha,\beta}$, порождающих все гильбертово пространство, однозначно, с точностью до унитарного преобразования [10], определяется соотношениями

$$U(\gamma) f_{\alpha,\beta} = \exp(1/_2 i\beta\gamma) f_{\alpha+\gamma,\beta}, \quad V(\delta) f_{\alpha,\beta} = \exp(- 1/_2 i\alpha\delta) f_{\alpha,\beta+\delta},$$

$$(f_{\alpha,\beta}, f_{\gamma,\delta}) = \exp[- 1/_4 (\alpha - \gamma)^2 - 1/_4 (\beta - \delta)^2 + 1/_2 i (\alpha\delta - \beta\gamma)].$$

Система унитарных операторов $U(\alpha)$, $V(\beta)$, удовлетворяющих мультипликативному соотношению Вейля (см. п. 1), есть или описанная система, или все гильбертово пространство распадается в конечную или счетную сумму (попарно ортогональных гильбертовых) подпространств, в каждом из которых действует указанная система, т. е. возникает связанный набор таких же систем.

Неприводимая система соответствует, очевидно, первому случаю (в нем число линейно независимых решений уравнения $Af = 2\pi f$ равно минимально возможному — 1).

4. В заключение сделаем еще одно замечание.

Для представления Шредингера операторы $U(\alpha)$, $V(\beta)$ имеют вид (см. примеч. 5): $f(q) \to f(q + \alpha)$, $f(q) \to \exp(i\beta q) f(q)$ ($(h/2\pi)\beta$ вместо $\beta$), откуда $S(\alpha, \beta)$: $f(q) \to \exp[i\beta(q+\alpha/2)] f(q+\alpha)$ и, как легко вычислить, $A: f(q) \to \sqrt{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(- 1/_2 q^2 - 1/_2 q'^2) f(q')\, dq'$. Единственное решение уравнения $Af = 2\pi f$ есть $c \exp(- 1/_2 q^2)$, поэтому $\varphi_1 = \varphi_1(q) \equiv \pi^{-1/4} \exp(- 1/_2 q^2)$ и

---

[10] Если $U$ — унитарный оператор, то он определяет преобразование (см. примеч. 2)

$$U(\alpha) \to UU(\alpha) U^{-1}, \quad V(\beta) \to UV(\beta) U^{-1}, \; f_{\alpha,\beta} \to U f_{\alpha,\beta}.$$

$$f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta}(q) \equiv \pi^{-1/4} \exp[-{}^1/_2 (q+\alpha)^2 + i\beta(q+\alpha/2)] \equiv$$
$$\equiv \pi^{-1/4} \exp[-{}^1/_2 q^2 + (-\alpha + i\beta) q + (-\alpha^2/2 + i\alpha\beta/2)].$$

Для этого случая наши формулы проверяются непосредственно.

В квантовомеханической задаче с $k\ (= 1, 2, \ldots)$ степенями свободы возникает общая система коммутационных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} P_m P_n = P_n P_m, \quad Q_m Q_n = Q_n Q_m \\ P_m Q_n - Q_n P_m = (h/2\pi i)\, \delta_{mn} \cdot 1 \end{aligned}\right\} \quad (m,\ n = 1, \ldots, k).$$

Вводя

$$U_n(\alpha) = \exp[(2\pi i/h)\, \alpha P_n], \qquad V_n(\beta) = \exp(i\beta Q_n) \qquad (n = 1, \ldots, k),$$

мы получаем соотношения Вейля

$$U_n(\alpha) U_n(\beta) = U_n(\alpha+\beta), \qquad V_n(\alpha) V_n(\beta) = V_n(\alpha+\beta), \qquad U_n(\alpha) U_m(\beta) =$$
$$= U_m(\beta) U_n(\alpha), \qquad V_m(\alpha) V_n(\beta) = V_n(\beta) V_m(\alpha), \qquad U_m(\alpha) V_n(\beta) =$$
$$= \exp(i\delta_{mn}\alpha\beta)\, V_n(\beta) U_m(\alpha).$$

Наши методы доказательства единственности в пунктах 2,3 применимы и здесь. А именно положим

$$S(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k) = \exp[-{}^1/_2 i (\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_k\beta_k)]\, U(\alpha_1) \ldots U(\alpha_k)\, V(\beta_1) \ldots$$
$$\ldots V(\beta_k) = \exp[{}^1/_2 i (\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_k\beta_k)]\, V(\beta_1) \ldots V(\beta_k)\, U(\alpha_1) \ldots U(\alpha_k),$$

$$A = \iint \ldots \iint \exp[-{}^1/_4 (\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_k^2)] \times$$
$$\times S(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k d\beta_1 \ldots d\beta_k.$$

Тогда, так же как и в п. 3, можно доказать, что

$$AS(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k)\, A = (2\pi)^k \exp[-{}^1/_4 (u_1^2 + \ldots + u_k^2 + v_1^2 + \ldots + v_k^2)]\, A,$$

и мы вновь (исследуя решения уравнения $Af = (2\pi)^k f$) достигаем своей цели.

С точки зрения общей теории наши рассуждения (вместе с подходом Фробениуса к конечным группам, основанным на «характеристических единицах») родственны вейлевскому анализу замкнутых континуальных групп с помощью групповых чисел [11]. Операторы $A = \iint \mathbf{a}(\alpha, \beta)\, S(\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta$ и есть те самые «групповые числа» $S(\alpha, \beta)$-группы, и равенство $AS(u, v)\, A = c_{u,v} A$ ($c_{u,v}$ — **число!**) **эквивалентно определяющему свойству «примитивных» единиц.**

[11] См. [10,11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Born M., Jordan P.* Zur Quantenmechanik.— Ztschr. Phys., 1925, Bd. 34, S. 858—888.
2. *Dirac P.* The fundamental equations of quantum mechanics.— Proc. Roy. Soc. London A, 1925, vol. 109, p. 642—653.
3. *Jordan P.* Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik.— Ztschr. Phys., 1926, Bd. 37, H. 4/5, S. 383—386.
4. *Schrödinger E.* Über das Verhältnis der Heisenberg—Born—Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen.— Ann. Phys., 1926, Bd. 79, H. 8, S. 734—756.
5. *Weyl H.* Quantenmechanik und Gruppentheorie.— Ztschr. Phys., 1928, Bd. 46, H. 1, S. 1—46.
6. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space. III. Operational methods and group theory.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1930, vol. 16, N 1, p. 172—175.
7. *Born M., Jordan P.* Elementare Quantenmechanik. B. : Springer, 1930. 434 S.
8. *Schmidt E.* Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.— Rend. Circ. math. Palermo, 1908, vol. 25, p. 53—77.
9. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 49—131.
10. *Frobenius F.*— Berl. Ber., 1896.
11. *Peter F., Weyl H.* Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.—Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 737—755.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## ДЖОН ФОН НЕЙМАН

Один из крупнейших математиков XX в. Джон фон Нейман родился 28 декабря 1903 г. в Будапеште. Будапешт дал миру многих замечательных ученых XX в. Достаточно назвать имена Э. Вигнера, Л. Силарда, Т. фон Кармана и многих других. Сам фон Нейман считал это проявлением сильного стремления к творчеству в различных его формах, характерного для интеллектуального климата средней Европы тех лет.

Его отец, Макс фон Нейман, был состоятельным банкиром и получил за свои заслуги наследственный дворянский титул «von» от императора Франца-Иосифа. Полное имя Джона было сначала Маргиттан Нейман Янош, т. е. Янош Нейман из Маргитта. Позже в Германии он именовался Иоганн фон Нейман, а с переездом в США — Джон фон Нейман. В семье фон Нейманов было трое сыновей, из которых Джон был старшим.

До десяти лет он обучался дома, а затем в Высшей лютеранской школе Будапешта, которая была в то время одним из лучших учебных заведений Венгрии. Его первый преподаватель математики Л. Ратц скоро заметил необыкновенные математические способности Джона и с согласия отца начал давать ему частные уроки, а затем ввел в университет. Позже его занятиями руководили профессора Будапештского университета Кюршак и М. Фекете, а также признанный наряду с Ф. Рисом лидер венгерской математической школы — Л. Фейер, который назвал его «Величайший Янчи (уменьшительное от Янош) нашей страны». В двенадцатилетнем возрасте он изучил книгу Э. Бореля «Теория функций». К 18 годам Дж. фон Нейман уже считался профессиональным математиком.

Сохранилось много рассказов об удивительных способностях юного фон Неймана, восхищавших всех, кто общался с ним. Он обладал поразительной памятью, не ослабевавшей в течение всей его жизни, позволявшей ему мгновенно запоминать разнообразные сведения. У него были замечательные лингвистические способности, он знал классические языки и пять европейских языков, интересовался всемирной историей. Есть свидетельство о его феноменальных вычислительных способностях — свойство, не обязательно сопутствующее собственно математическому дарованию и часто принимаемое за склонность к математике. Любовь к счету фон Нейман сохранял всю жизнь, а скорость, с которой он решал задачи, по выражению друзей, «внушала ужас». Один из математиков писал, что фон Нейман обладал «самым быстрым мозгом, который я когда-либо встречал».

После окончания Высшей школы в Будапеште фон Нейман проходит курс химии сначала в Берлинском университете (1921—1923 гг.), а затем в Высшей технической школе в Цюрихе (1923—1925 гг.). Химия была выбрана по совету извест-

ного механика Т. фон Кармана — друга семьи — как компромисс между желанием отца дать сыну надежную деловую профессию и математическими устремлениями сына. В 1924 г., находясь в Берлине, фон Нейман часто бывал у Д. Гильберта и интересовался подходом великого математика к физике и к теории доказательств. Несомненно, что Гильберт оказал на фон Неймана большое влияние, и многие считают фон Неймана и Г. Вейля наиболее выдающимися учениками Гильберта. Во время обучения в Цюрихе фон Нейман много общался с Вигнером, ставшим впоследствии выдающимся физиком, и оказал на него сильное влияние, проявившееся, в частности, в интересе Вигнера к теории групп. Их дружба продолжалась в течение всей жизни Дж. фон Неймана.

Большую часть времени фон Нейман проводил в обществе математиков. В Цюрихе в это время работали Г. Вейль и Г. Пойа, с которыми фон Нейман установил близкие отношения. Однажды, во время отъезда Вейля, фон Нейман заменял его в качестве лектора. Почти одновременно он получил диплом химика в Цюрихе и степень доктора философии по математике в Будапеште (1926 г.). Затем он продолжил занятия в Геттингене. Химия постепенно отходит на задний план.

В 1927 г. фон Нейман становится приват-доцентом Берлинского университета и с этого момента целиком посвящает себя математике и теоретической физике. В 1929 г. фон Нейман переехал в Гамбург, где получил должность приват-доцента Университета. В 1930 г. он впервые приезжает в США для чтения лекций в Принстонском университете. Атмосфера одного из лучших американских университетов произвела благоприятное впечатление на фон Неймана. Он быстро освоился, и приглашение было продлено еще на один год. В Германии в то время было чрезвычайно трудно получить место профессора. По подсчетам самого фон Неймана, математическое ожидание числа вакансий в год равнялось трем, а претендентов было около 40. К тому же фон Нейман видел активизацию деятельности нацистов и отчетливо понимал, к каким последствиям приведет их приход к власти.

Итак, в 1931 г. фон Нейман занял постоянную должность профессора Принстонского университета. В 1933 г. он переходит во вновь организованный Институт высших научных исследований (Institute for Advanced Study) и становится одним из его первых сотрудников. Институт был создан организаторскими усилиями математиков А. Флекснера, О. Веблена и их друзей как эксперимент в области научной и преподавательской деятельности. С момента основания Принстонский университет и Институт высших научных исследований были независимы один от другого, хотя первое время институт помещался в одном из зданий университета. С 1940 г. Институт высших научных исследований имеет отдельное здание несколько в стороне от города. В нем всего два этажа, отдельное крыло занято под библиотеку; рядом — большой лес, поблизости — дома для приезжающих ученых. Полный перечень первых профессоров-математиков института таков: Дж. Александер, А. Эйнштейн, М. Морс, О. Веблен, Дж. фон Нейман, Г. Вейль. И в дальнейшем число постоянных профессоров оставалось весьма небольшим. В то же время институт приглашал активно работающих математиков со всего мира на относительно небольшие сроки. Такая структура оказалась удачной и в дальнейшем была повторена в ряде других стран Приглашение 30-летнего фон Неймана в институт было, конечно, признанием его замечательных спо-

собностей и вклада в науку. Сотрудником института фон Нейман оставался почти до конца своей жизни (до 1954 г.).

Сообщество выдающихся ученых, собранных в Принстоне, стимулировало работу фон Неймана в различных областях математики и ее приложений. С каждым годом в его поле зрения попадают новые области исследований, новые математики, рождаются новые идеи. Этой бурлящей научной атмосфере одного из лучших научных центров мира фон Нейман, безусловно, многим обязан; сам он высоко ее ценил и считал залогом своей дальнейшей научной работы.

В последующие годы он не раз посещает Европу (в 1936 г. Кембридж, Институт Пуанкаре (Франция)). В 1935 г. фон Нейман участвовал в Московской топологической конференции. В середине 30-х годов завязываются его связи с советскими математиками. В журнале «Математический сборник» печатаются в 1936 г. его известная работа о мере Хаара и статья о математическом аппарате квантовой механики. Менее известно, что другая его работа «Некоторые неравенства в теории матриц и метризация матричных пространств» была напечатана в записках Томского университета (1937, т. 1).

В 1930 г. фон Нейман женился, будучи еще в Венгрии, на Мариэтте Ковачи. В 1935 г. у фон Нейманов родилась дочь Марина. Впоследствии она стала крупным экономистом и одно время входила в Совет по проблемам экономики при президенте США. Позднее она работала профессором экономики в одном из американских университетов.

В 1938 г. фон Нейман женился вторично, после поездки в Венгрию, на Кларе Дан. К. Дан была одной из первых программисток, при ее непосредственном участии было издано шеститомное собрание работ фон Неймана (см. ниже). Она лишь на несколько лет пережила своего мужа.

С начала 40-х годов и во время второй мировой войны фон Нейман делает поворот в своей научной и практической деятельности в сторону приложений математики. Впрочем, прикладными вопросами он интересовался на всех этапах своего творчества. Он становится одним из первых специалистов и идеологов машинной математики во всех ее аспектах, занимается гидромеханикой, атомной физикой, техникой, метеорологией, математической экономикой, теорией игр. С 1954 г. он — член комиссии по атомной энергии. По существу, в последние годы жизни лишь немногие его работы связаны с довоенной проблематикой, в основном они относятся к перечисленным выше областям Незадолго до смерти фон Нейман выступает на Международном математическом конгрессе в Амстердаме (1954 г.) с докладом «Нерешенные проблемы в математике». К сожалению, рукопись и стенограмма этого доклада не сохранились или вообще не существовали. По свидетельству слушателей, доклад содержал глубокий анализ значительной части математики и ее приложений.

Биографы и современники описывают Дж. фон Неймана как жизнерадостного и общительного человека, обладавшего чувством юмора, умелого рассказчика, много знавшего (особое увлечение — история), читавшего, хорошо понимавшего людей. Но наибольшее впечатление производила работа его блестящего ума, похожая на работу «идеальной логической машины». Он умел с удивительной простотой и последовательностью раскрыть суть сложных проблем. Черты его стиля видны в публикуемых в этой книге работах и характерны для всего его творчества. Чтение большинства его работ оставляет впечатление органичности,

адекватности проблемы и данного им решения. Можно сказать, что для каждой исследованной им задачи он умел подбирать наиболее характерный, но далеко не очевидный путь, ведущий к ее решению и вскрывающий ее связи с другими задачами.

В начале 50-х годов у Дж. фон Неймана, до тех пор обладавшего хорошим здоровьем, обнаружились первые признаки смертельной болезни (рак). Она продолжалась несколько лет и протекала мучительно. Но даже находясь в больнице, фон Нейман не прекращал научной деятельности, давал консультации и советы по многим математическим и общим проблемам. Он скончался 8 февраля 1957 г. в возрасте 53 лет.

Заслуги фон Неймана были широко признаны и в США, и во всем мире. Он был членом Национальной академии США и многих иностранных академий, состоял членом многих научных обществ различных стран. С 1951 по 1953 г. он был Президентом Американского математического общества. Джон фон Нейман был лауреатом премий Альберта Эйнштейна, Энрико Ферми и др., входил в редакционные коллегии известнейших журналов, советы различных лабораторий, университетов и т. п.

Его педагогическая и лекторская деятельность не прекращалась в течение всей его жизни. Многие его книги являются записями его лекций, читавшихся в основном для специалистов. В списке его работ около двухсот названий, некоторые из этих работ вышли уже после его смерти, подготовленные учениками и последователями. Из многочисленных ученых, бывших его сотрудниками или учениками, назовем наиболее близких — П. Халмош, И. Сигал, И. Гальперин, О. Моргенштерн, С. Улам, А. Тауб. Что же касается личного или научного влияния, то его испытали многие математики. Он поддерживал контакты с большим числом ученых, значительная часть его работ выполнена в сотрудничестве с другими математиками. Воздействие его оригинальных и глубоких научных идей продолжается до настоящего времени. Более того, ценность некоторых из них раскрывается только сейчас, по прошествии 30—40 лет. Джон фон Нейман по праву считается одним из самых выдающихся ученых нашего столетия.

* * *

Творческое наследие Дж. фон Неймана огромно. Первая его работа «О нулях полиномов Чебышева» (совместная с М. Фекете) вышла в 1922 г., когда ему было лишь 18 лет. Его научная активность в течение всей жизни была ошеломительной. Описать здесь даже приблизительно все аспекты его творчества не представляется возможным. Помимо основных работ по математике и ее приложениям, он — автор работ собственно по физике (среди них одна из первых работ по теории лазеров), химии (вспомним, что он получил образование химика) и др. Его осведомленность в этих, а также биологических, экономических и других вопросах позволяла ему создавать математические модели явлений с подлинно естественнонаучной широтой и глубиной.

Уже упоминалось, что фон Нейман — автор примерно двухсот работ, среди них около десяти монографий. Многие циклы статей также могут считаться монографиями (например, цикл статей по кольцам операторов, помещенный в т. 2 наст. изд.). Ряд его работ посвящен решению отдельных, как правило, узловых

проблем. Однако в наиболее характерных для него работах открываются совершенно новые области с новыми понятиями, задачами и связями.

Основные библиографические источники таковы: Bull. Amer. Math. Soc., 1958 (выпуск назван «John von Neumann 1903—1957» и посвящен целиком фон Нейману) . В нем помещены статьи С. Улама, Дж. Биркгофа, Ф. Мюррея, Р. Кэдисона, П. Халмоша, Л. Ван-Хова, Х. Куна и А. Таккера и К. Шеннона о жизни и творчестве фон Неймана. Там же приведена библиография его работ. В последующие, годы появился ряд воспоминаний о фон Неймане: *Halmos P.* The legend of John von Heumann.— Amer. Math., Month., 1973, vol. 80, № 4, p. 382—394; *Wigner E.* John von Neumann.— Yearb. Amer. Philos. Soc., 1957, p. 149; *Ulam S.* Adventures of a mathematician. N. Y., 1976; *Goldstine H.* The computer from Pascal to von Neumann. Princeton: Univ. press. 414 p., и др., которые содержат много интересных фактов о жизни и творчестве фон Неймана. Некоторые из них переведены на русский язык, например статья Шеннона в книге: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963 и Вигнера в книге: Этюды о симметрии. М. : Мир, 1970. 318 с.

В начале 60-х годов в издательстве Pergamon press под редакцией А. Тауба с участием Э. Вигнера, Э. Теллера, С. Какутани и др. вышло шесть томов работ фон Неймана (*Neumann J. von.* Collected works/Ed A. H. Taub. Oxford etc.: Pergamon press, 1960—1962. Vol. 1—6). В это собрание было включено несколько неопубликованных ранее и незаконченных работ с комментариями и рефератами известных математиков (Дж. Биркгофа, И. Гальперина, И. Капланского, Г. Куна, Г. Макки, О. Моргенштерна, А. Таккера, Г. Ханта и др.). Содержание этих томов, каждый из которых насчитывает около пятисот страниц, далеко не исчерпывает научного наследия фон Неймана. Книги (например, *Neumann J. von.* Continuous geometry. Princeton, 1960. 250 p., до сих пор не переведенная на русский язык), записи лекций не вошли в собрание и выходили отдельно (например, лекции по теории автоматов, теории меры). Фактически в этом издании собраны журнальные статьи. Тематика работ по томам хорошо отражает весь спектр занятий фон Неймана, и мы приведем заголовки этих томов.

Т I. Логика, теория множеств и квантовая механика

Т.II. Операторы, эргодическая теория, почти периодические функции на группах.

Т.III. Кольца операторов.

Т.IV. Непрерывная геометрия и другие вопросы.

Т.V. Структура вычислительных машин, теория автоматов и численный анализ

Т. VI. Теория игр, астрофизика, гидродинамика и метеорология.

В настоящее издание включены избранные работы по функциональному анализу из II—IV томов. Об их содержании и месте в современных исследованиях говорится более подробно в комментариях.

Укажем несколько переводов статей и книг фон Неймана на русский язык.

1. Статья об автоматах в кн.: Автоматы. М. : Изд-во иностр. лит., 1956.
2. Вычислительная машина и мозг.— Кибернет. сб., 1960.
3. Статьи по теории игр в кн. Матричные игры. М : Физматгиз, 1961.
4. Математические основы квантовой механики. М. : Наука, 1964.
5. Теория игр и экономическое поведение. М. : Наука, 1970.
6. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М. : Мир, 1971.

* * *

Несмотря на многообразие интересов и полученных результатов, в творчестве фон Неймана можно выделить несколько ведущих идей, объединяющих совершенно разные на первый взгляд работы. Одной из таких идей была идея аксиоматизации, утверждение которой характерно для первых десятилетий XX в. В творчестве фон Неймана первый, наиболее известный цикл работ относится к аксиоматической теории множеств и основаниям математики. Следы этих работ можно обнаружить во всей его дальнейшей деятельности. Попав в начале 20-х годов в Геттинген, фон Нейман проникся «духом Геттингена», в частности заинтересовался работами по основаниям математики. Он сразу включился в активную работу по аксиоматической теории множеств и внес в нее существенно новую идею «различения множеств и классов», фактически предвосхитив современный категорный подход к математическим структурам и теориям Система аксиом фон Неймана, несколько видоизмененная позже Бернайсом, стала общепринятой и была впоследствии использована К. Геделем в его классических работах по континуум-гипотезе. Другая большая работа этого периода относится к зарождавшейся в то время теории доказательств. К этому циклу относится также ряд статей, посвященных конкретным проблемам теории множеств и теории функций: эффективное построение замкнутого множества континуальной мощности, состоящего из чисел, линейно независимых над полем рациональных чисел, разложение интервала на счетное число непересекающихся конгруэнтных подмножеств и ряд других.

Постепенно интересы фон Неймана смещаются к дескриптивной теории функций и теории меры, затем к функциональному анализу, теории операторов и квантовой механике. Остановимся на статье «Zur Allgemeinen Theorie des Masses» («К общей теории меры», см. наст. кн.). Сначала в ней проводится глубокий анализ работ Хаусдорфа, Банаха и Тарского, посвященных существованию евклидово-инвариантных неотрицательных нормированных конечно-аддитивных мер в $R^n$. Нормированность означает, что мера единичного куба равна 1. Отрицательное решение этой проблемы для $n \geqslant 3$ связано, как показал фон Нейман, с чисто алгебраическими свойствами группы движений, а именно с тем, что группа $SO(n)$ при $n \geqslant 3$ содержит свободную подгруппу с двумя образующими. В этой же статье был введен класс групп, называемых сейчас аменабельными (в работе фон Неймана — измеримые группы), получивший в последние годы широкое применение в алгебре и функциональном анализе. Группа называется аменабельной, или группой с инвариантным средним, если для всякого ее непрерывного действия на компакте найдется инвариантная борелевская мера Интуиция фон Неймана проявилась в том, что этот класс групп, выделенный им впервые по весьма специальному поводу, в действительности оказался принципиально важным. Он допускает ряд других описаний в терминах действия, представлений и др., полученных в последние годы. Главное их свойство можно выразить приблизительно так: аменабельные группы — это группы, допускающие естественные аппроксимации конечными группами в очень широком смысле. На аменабельные группы перенесены основные факты общей теории представлений, эргодической теории, теории факторов и т. д.

Несколько нарушая хронологию, перейдем к работам фон Неймана по теории меры и эргодической теории (начало 30-х годов). Идеи его основных работ этого цикла были подытожены в Принстонских лекциях 1934 г., изданных лишь в 1950 г. Фон Нейман одним из первых понял важность меры Хаара на локально-компактных группах. Ему принадлежит простое доказательство существования и единственности меры Хаара для локально-компактных групп. В это же время он получил первое серьезное продвижение в пятой проблеме Гильберта. Его статья «Die Einfuhrung analytischen Parameter in topologischen Gruppen» публикуется в этой книге. В работах по теории интегрирования фон Нейман глубоко проанализировал структуру пространств с мерой и выделил наиболее важный класс таких пространств — стандартных пространств, или, как их теперь называют после работ Рохлина, пространств Лебега. Аксиоматика фон Неймана подверглась изменениям, но его подход послужил фундаментом для всего последующего применения теории меры к эргодической теории (см. наст. изд., т. 2, коммент. V).

Упомянем еще об одной важной идее фон Неймана в теории меры: ему принадлежит определение того, что сейчас называют «лифтингом», т. е. отображением, являющимся правым обратным к отображению, появляющемуся при факторизации пространств функций, операторов и т. п. по модулю совпадения почти всюду по мере. Наличие лифтинга с теми или иными свойствами (мультипликативность, положительность и др.) оказалось полезным во многих задачах, и сейчас это понятие широко используется и в приложениях.

Вклад фон Неймана в эргодическую теорию особенно значителен. Истоками этой теории считаются статистическая механика и классическая динамика. В трудах фон Неймана, а также Биркгофа, Купмана и Хинчина были сформулированы первые фундаментальные факты. После появления работы Купмана 1931 г. об унитарных операторах, сопряженных с сохраняющими меру преобразованиями, фон Нейман опубликовал свою знаменитую работу, содержащую «эргодическую теорему фон Неймана» для унитарных операторов. Эта теорема утверждает, что для любого унитарного оператора $U$ и любого вектора $h$ гильбертова пространства существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k h = \bar{h}, \qquad U\bar{h} = \bar{h}, \qquad \|\bar{h}\| \leqslant \|h\|.$$

По свидетельству Халмоша, ученика и сотрудника фон Неймана в области эргодической теории, фон Неймана привлекала здесь прежде всего связь теории меры и спектра. К основным результатам фон Неймана в эргодической теории следует отнести уже упоминавшуюся эргодическую теорему фон Неймана, классификацию эргодических динамических систем с дискретным спектром, основы теории аппроксимации динамических систем, построение теории разложения динамических систем на эргодические компоненты, примеры сохраняющих меру преобразований с непрерывным спектром, конструкции факторов с помощью динамических систем. По свидетельству Какутани, фон Нейман рассматривал вопрос о применении понятий теории информации к эргодической теории. Как известно, решающий шаг в этом направлении был сделан Колмогоровым.

Почти одновременно с работами по эргодической теории и теории меры появляются работы по теории операторов, а затем и по алгебрам операторов. Эта тема

проходит через все творчество фон Неймана. По существу вся относящаяся к этому направлению огромная ветвь функционального анализа сформировалась под влиянием работ фон Неймана. В начальный период основным стимулом были проблемы квантовой механики и теории дифференциальных уравнений, а первой публикацией — совместная работа Гильберта, фон Неймана и Нордхейма 1927 г. Эта работа была отправной точкой для дальнейших исследований по основаниям квантовой механики. Вскоре фон Нейман занялся общей проблемой построения спектральной теории неограниченных самосопряженных операторов. Спектральная теория ограниченных самосопряженных операторов, построенная Гильбертом, имела своим источником теорию интегральных уравнений. Фон Нейман понял важность аналогичной теории, относящейся к неограниченным операторам, для квантовой механики.

Дальнейшие исследования (Реллих, Фридрихс, Крейн и др.) спектральной теории дифференциальных операторов (индексы дефекта, теория расширений, обобщенные спектральные разложения и др.), равно как алгебраическая теория операторов, в качестве исходного пункта имели спектральную теорему Гильберта—Неймана.

В 1931 г. фон Нейман опубликовал до последнего времени сравнительно малоизвестную работу «Однозначность оператора Шредингера» (Die Eindeutigkeit der Schrodingerschen Operatoren), помещенную в этой книге. Он рассмотрел следующую задачу: описать все решения уравнения $PQ - QP = hI/2\pi i$, где $P$, $Q$ — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $H$. Это уравнение играет важную роль в квантовой механике. Оно допускает и другие формулировки; например, если $V(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha P/h)$, $U(\beta) = \exp(2\pi i\beta Q/h)$, то $V(\alpha)U(\beta) = \exp(2\pi i\alpha\beta/h)\,U(\beta)\,U(\alpha)$ (представление коммутационных соотношений в форме Вейля), или если $E(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$,— проекционное семейство для $P$, то $U(\beta)\,E(\lambda) = E(\lambda + \beta)$. Фон Нейман показал, что все решения упомянутого уравнения сводятся к операторам импульса и координаты в пространстве векторнозначных функций. В дальнейшем этот результат фон Неймана оказался очень важным в теории представлений коммутационных соотношений в квантовой теории поля, в эргодической теории, в частности в теории $K$-систем, в спектральной теории стационарных случайных процессов, в теории представлений, в теории рассеяния (см. книгу П. Лакса и Р. Филлипса «Теория рассеяния») и др. Заметим, кстати, что фон Нейман еще в 1938 г. обратил внимание на то обстоятельство, что в квантовой механике бесконечного числа частиц имеется много неэквивалентных представлений коммутационных соотношений, что позже оказалось весьма важным для квантовой теории поля.

К этому же периоду относятся первые работы фон Неймана по общей теории операторов. По свидетельству самого фон Неймана, его работы в этом направлении составляют один из трех его основных вкладов в математику. Интерес к проблематике теории операторов, колец операторов сохранялся у него в течение всей жизни. Последние работы фон Неймана в этом направлении были сделаны после 1950 г.

Фон Нейману вместе с Вейлем принадлежит заслуга построения первой математически безупречной формулировки квантовой механики на основе теории операторов в гильбертовом пространстве. Детальное и последовательное изложение содержится в уже упоминавшейся книге фон Неймана «Математические основы

квантовой механики» (1932 г.), выдержавшей ряд изданий. Этот подход и изложение квантовой механики, квантовой статистики, квантовой логики стал теперь общепринятым. Среди конкретных достижений фон Неймана отметим введение им матрицы плотности, которая с тех пор является основным понятием квантовой статистической механики. С помощью матрицы плотности фон Нейман вводит квантовомеханическую энтропию в виде $S = -k\,\mathrm{Tr}\,(\rho \ln \rho)$, где $\rho$ — матрица плотности, $k$ — постоянная Больцмана, а также определяет квантовое равновесное распределение Гиббса.

Другие работы фон Неймана посвящены проблеме измерения в квантовой механике — вопросу, который дискутируется до сих пор,— и проблеме «скрытых параметров». Суть ее состоит в том, возможно ли квантовомеханическую систему представить как результат определенного проектирования некоторой классической системы. Результат фон Неймана был отрицательным и показал невозможность чисто детерминистического определения квантовой механики.

Большие усилия фон Нейман предпринимал для выяснения алгебраической и логической структуры квантовой механики, надеясь с помощью надлежащего абстрактного анализа прийти к естественным обобщениям квантовой механики. Ему принадлежит ряд совместных работ с Вигнером, Йорданом и Биркгофом на эту тему. Историки математики часто приводят в качестве удивительного примера взаимодействия математики и физики такую ситуацию: теория операторов в гильбертовом пространстве появилась почти одновременно и независимо от квантовой механики, но именно она с начала 30-х годов стала единственным адекватным языком современной квантовой теории.

Наряду с упоминавшейся выше характерной для творчества фон Неймана идеей аксиоматизации следует отметить и другую идею — алгебраизацию анализа. Функциональный анализ тех лет базировался в основном на линейной алгебре. Фон Нейман одним из первых понял важность для анализа и его применений (физика и другие области) общей алгебры — теории колец, групп, их представлений и т. д. Пионер применения теории групп в физике Вигнер неоднократно подчеркивал решающую роль и инициативу фон Неймана в этом направлении. Известная работа Йордана, Вигнера и фон Неймана посвящена алгебраическим аспектам и обобщениям квантовой механики. Совместная работа с Сигалом — одна из первых работ по представлениям полупростых групп Ли. Современное изложение теории представлений симметрической группы основано на комбинаторной лемме фон Неймана (см.: *Ван-дер-Варден*. Алгебра. М. : Наука. 1972. 623 с.).

Известный цикл работ (совместно с Ф. Мюрреем) по кольцам операторов и примыкающие сюда статьи по бесконечным тензорным произведениям и прямому интегралу колец заслуживают особого упоминания. Цикл работ по кольцам операторов и статья о бесконечных тензорных произведениях включены в настоящее издание. Они представляют собой исключительное явление в математической литературе. В них постепенно развертывается совершенно новая область исследований с многочисленными связями с другими разделами математики. Эти работы на несколько десятилетий обогнали свое время, они были до конца поняты и стали интенсивно использоваться лишь с середины 50-х годов. В настоящее время основные понятия и многие результаты этого цикла вошли в учебники и монографии по функциональному анализу, алгебраическим методам в физике и др.

Основное открытие здесь — факторы, т. е. слабозамкнутые самосопряженные

алгебры операторов гильбертова пространства с тривиальным центром. Оказалось, что, кроме факторов, изоморфных алгебре всех операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$, $\dim H = n$ и $n = 1, 2, \ldots, \infty$, называемых факторами типа $I_n$, существуют совершенно новые классы факторов — факторы типа II и III. Для характеризации этих типов вводится новое понятие размерности ортогональных проекторов, принадлежащих фактору. В факторах типа II эта размерность принимает либо все значения из отрезка $[0, 1]$ (факторы типа $II_1$), либо все значения из $[0, \infty]$ (в факторах типа $II_\infty$). В факторах типа III размерность принимает лишь два значения: 0 и $\infty$. В настоящее время известно много примеров неизоморфных между собой факторов типа II и III (Сакаи, Макдуфф, Пауэрс и др.), имеется некоторая частичная классификация и инварианты (Араки, Конн).

Первые примеры факторов фон Нейман черпал из близких ему областей: теории представлений групп, теории динамических систем (скрещенные произведения и др.). Эти примеры подробно изучались в дальнейшем (Макки, Дай, Сигал, Араки). Сейчас несомненно что в теории представлений, квантовой теории поля, теории динамических систем с бесконечным числом степеней свободы, статистической механике факторы типа II и III будут играть заметную роль. Особенно важным оказался класс аппроксимативно-конечных факторов, выделенный фон Нейманом как класс, допускающий аппроксимацию матричными алгебрами. Мюррей и фон Нейман доказали, что существует ровно один с точностью до изоморфизма аппроксимативно-конечный фактор типа $II_1$. Сейчас доказана единственность аппроксимативно-конечного фактора типа $II_\infty$, а для факторов типа III получена классификация многих важных специальных случаев (Конн). Обо всем этом подробнее см. наст. изд., т. 2, коммент. I.

Квантовая логика и теория непрерывных факторов, с одной стороны, и геометрия и теория структур — с другой, привели фон Неймана к следующему замечательному открытию — непрерывной, точнее, непрерывномерной геометрии. Этот цикл работ (конец 30-х годов) создавался им в окружении видных специалистов — алгебраистов и геометров — Биркгофа, Веблена и др. Вейль в своей известной лекции «Полвека математики» (1950 г., т. е. за несколько лет до прорыва в современной топологии) говорил, что непрерывная геометрия, или «геометрия без точек»,— наиболее интересное достижение геометрии первой половины XX в. Первым примером непрерывной геометрии была структура проекторов факторов типа $II_1$. Более точно, подобно тому как в обычной проективной геометрии рассматривается дедекиндова структура с дополнением всех подпространств конечномерного пространства над некоторым полем, фон Нейман предложил рассматривать структуру ортопроекторов фактора типа $II_1$ Оказалось, что она действительно представляет собой дедекиндову структуру с дополнением и в ней выполнены все аксиомы проективной геометрии. Заметим, что проверка выполнения этих аксиом далеко не тривиальна. Особенно трудно доказывается аксиома о перспективности. Сверх того, в такой проективной геометрии нет минимальных элементов, а размерность может принимать любые значения из отрезка $[0, 1]$.

Фон Нейман аксиоматизировал эту ситуацию и ввел общие непрерывные геометрии. Оказалось, что они не исчерпываются описанными выше: имеются геометрии, отличные от факторных. Попутно в качестве так называемых координатизирующих колец им были введены регулярные кольца, играющие в настоящее время

важную роль в общей гомологической алгебре. Вообще, весь этот цикл работ оказал сильное воздействие на теорию структур булевых алгебр и колец. Исследования по непрерывной геометрии были продолжены Гальпериным, Маедой, Халмошем, Магарам, но, пожалуй, будет правильно сказать, что в отличие от теории операторов непрерывная геометрия еще ожидает своего нового прочтения.

Несколько особняком стоит малоизвестная работа фон Неймана «Аппроксимативные свойства матриц высокого порядка», включенная в эту книгу. Хотя она примыкает к циклу статей о факторах, ее особая роль в том, что в ней едва ли не впервые реализуется идея об асимптотическом изучении матричных алгебр — идея, подхваченная лишь значительно позже. Следует сказать, что функциональному анализу 30—40-х годов эта идея, как ни странно, была чужда: основные проблемы касались изучения «готовых» бесконечномерных пространств, фактически тех или иных пространств функций. Рассмотрение асимптотических или аппроксимационных свойств пространств, алгебр и т. п. стало популярным значительно позже и отчасти благодаря работам фон Неймана. Заметим также, что в упомянутой работе неявно присутствует $\varepsilon$ — энтропия некоторого компакта,— оценка которой играет основную роль (подробнее см. комментарии к этой статье).

Большое место в творчестве фон Неймана занимает цикл работ по теории игр, эконометрике и т. п. Первая публикация фон Неймана по теории игр относится к 1928 г., в которой появилась ставшая вскоре знаменитой его теорема о минимаксе, утверждающая существование оптимальной стратегии в так называемых играх двух партнеров с нулевой суммой. Понятие стратегии, чистой и рандомизированной, появилось раньше в работах Бореля. Однако Борель даже выражал сомнение в справедливости теоремы о минимаксе. В дальнейшем деятельность фон Неймана в теории игр и математической экономике продолжалась в сотрудничестве с австрийским экономистом Моргенштерном. Результатом их сотрудничества была большая монография «Теория игр и экономическое поведение», в которой была развернута общая теория игр $n$ лиц. Эта монография остается и сейчас основным источником для всей теории игр. Теория матричных игр является прекрасным примером модели, сочетающей математическое изящество и законченность, с одной стороны, и большую сферу приложений — с другой. Основная теорема о минимаксе, нетривиальна; ее первое доказательство фон Нейман основывал на теореме Брауэра о неподвижной точке, а затем связал ее с двойственностью в линейном программировании.

Впрочем, в теории игр фон Нейману принадлежат не только общие концепции и результаты. Ряд его работ посвящен анализу стратегий в конкретных играх, таких, как шахматы и карточные игры: бридж и покер.

Приведем любопытную историю, характерную для фон Неймана и иллюстрирующую, в частности, то, насколько стимулирующим было его воздействие на окружающих. Речь идет о его роли в теории, называемой сейчас линейным программированием. Один из создателей вычислительного алгоритма для решения задачи линейного программирования (симплекс-метода) Дж. Данциг пишет: «В октябре 1947 г. я впервые посетил фон Неймана в Принстоне. Я попытался описать один из примеров задачи линейного программирования». Вначале фон Нейман слушал невнимательно и попросил поскорее перейти к существу. Данциг решил сформулировать общую задачу: «В течение одной минуты я изложил геометрическую и алгебраическую постановку на доске. Фон Нейман встал и сказал: «Ах.

это». Затем он прочел мне полуторачасовую лекцию по математической теории линейных программ. (Позже я искал что-либо подобное в литературе и не нашел.) Увидев, что я сижу с открытым ртом и хлопаю глазами, фон Нейман сказал что-то вроде: «Я не хочу, чтобы Вы думали, что я сочинил это мгновенно здесь же. Я утверждаю просто, что две проблемы эквивалентны — та, что я здесь излагаю перед Вами, и одна из тех, что мы изучали с Моргенштерном в связи с теорией игр»». «Впервые,— пишет Данциг,— я услышал о двойственности, о лемме Фаркаша. Фон Нейман обещал написать по моей задаче несколько соображений». Позже Данциг всегда подчеркивал, что идея двойственности принадлежит фон Нейману, хотя среди работ фон Неймана, посвященных этому кругу вопросов, и в частности в написанной им после беседы с Данцигом работе «О проблеме максимизации», где предлагается итеративный метод решения задачи линейного программирования, о двойственности вовсе не упоминается. Заметим, что идея двойственности в этих задачах на самом деле была предложена несколько ранее Л. В. Канторовичем (1939 г.), что не было тогда известно в США. Далее Данциг пишет, что итогом встречи с фон Нейманом была его (Данцига) работа, где на основании теоремы двойственности обосновывался симплекс-метод. Можно не сомневаться, что подобных эпизодов в жизни фон Неймана было немало.

В 40-х годах, отчасти в связи с проблемами военного времени и работой в Комиссии по атомной энергии в США, фон Нейман большую часть времени стал уделять прикладным вопросам. К этому периоду относится появление первой быстродействующей вычислительной машины, в создании которой фон Нейман принял самое непосредственное активное участие. Одними из первых задач, исследовавшихся на этой машине, были задачи газовой динамики, и в частности одномерной газовой динамики. Работы фон Неймана в этой области долгое время существовали лишь в форме недоступных отчетов и только сравнительно недавно были опубликованы.

Особенность решений задач газовой динамики состоит в неизбежном появлении разрывов и других сингулярностей. По поводу всего этого круга задач фон Нейман писал: «Вопрос о том, встречается ли в действительности в природе решение, найденное математическими средствами, и можно ли заранее исключить существование нескольких решений с хорошими или плохими свойствами, чрезвычайно труден и неопределен. Эти проблемы рассматривались как в классической литературе, так и в более недавней литературе на разных уровнях строгости. В конечном счете в этой области трудно быть в чем-нибудь уверенным. Исследователь-математик находится здесь в постоянном состоянии неуверенности, поскольку обычные теоремы существования и единственности решения, которые хотелось бы иметь, еще никогда не были доказаны и, возможно, неверны в их обычной форме... Таким образом, в механике жидкости встречается широкий спектр математических возможностей для перемещающихся разрывов, согласованных с разумным термодинамическим поведением. Возможно, что существуют условия, которые выделяют одно и только одно решение во всякой разумно поставленной проблеме. Однако мы можем только догадываться о том, каковы эти условия, и должны целиком основываться на физической интуиции в поисках их. Поэтому здесь нельзя быть излишне определенным (specific) ни в одном пункте. И по поводу любого найденного решения трудно сказать с большой степенью уверенности, то ли это решение, которое должно существовать в природе».

Фон Нейману принадлежат глубокие и разнообразные исследования разрывных решений уравнений газовой динамики, вывод условий на скачках, анализ взаимодействия ударных волн. Классической является работа фон Неймана и Рихтмайера, в которой разработан численный метод решений уравнений газовой динамики, основанный на введении фиктивной вязкости, устраняющей разрывы, которую затем устремляют к нулю.

В двух совместных работах с С. Чандрасекаром фон Нейман рассматривал весьма интересный вопрос о существовании и свойствах сил в системе гравитирующих масс. Из-за дальнодействующего характера сил гравитации нетрудно указать такие конфигурации масс, когда силы, действующие в данной точке, не определены или бесконечны. Это не так для чисто случайных расположений масс. В предположении, что расположения масс статистически независимы осуществляется предельный переход, который теперь называется термодинамическим предельным переходом. Фон Нейман и Чандрасекар получили и исследовали совместное распределение вероятностей для силы и ее производной по времени.

Фон Нейман многие годы интересовался проблемами турбулентности и метеорологии, более точно, проблемами глобальных движений атмосферы. Он был тесно связан с исследовательской метеорологической группой и активно участвовал в разработке численных методов прогноза погоды. Помимо общего интереса, эта проблема привлекала фон Неймана теми перспективами, которые открылись бы в случае ее положительного решения.

Собственно проблемам турбулентности посвящена лишь одна статья фон Неймана «Недавние теории турбулентности», которая не предназначалась для публикации, а представляла собой лишь текст прочитанного доклада. Этот текст был включен в полное собрание сочинений фон Неймана. По мнению специалистов в теории турбулентности, статья Неймана представляет собой одно из самых ярких и стимулирующих обсуждений проблем турбулентности, в особенности того развития теории турбулентности, которое началось после работ Колмогорова.

Дж. фон Нейман внес огромный вклад в практику программирования и методов вычислений. К сожалению, мы можем судить об этом только со слов его коллег и друзей, поскольку огромное множество предложенных им идей, приемов, схем не было им опубликовано, но давно стало достоянием многих групп исследователей. Необходимость использования ЭВМ была ясна уже в начале деятельности по анализу ядерных реакций. По свидетельству одного из ближайших сотрудников фон Неймана в это время — Улама, интерес фон Неймана к использованию ЭВМ объяснялся, с одной стороны, его ранними работами по теории множеств и по теории доказательств, на которых сказывалось влияние Гильберта, выдвинувшего общую программу изучения математических доказательств как своего рода конечную игру, с другой — к вычислительным проблемам фон Неймана привели его исследования в эргодической теории, квантовой механике и вообще в математической физике. Фон Нейман предложил первые методы перевода математических действий на язык команд для вычислительных машин, что привело к появлению стандартных схем и цепей для построения машинных кодов. По существу это была не только теоретическая, но и инженерная деятельность, в которой фон Нейман принимал самое непосредственное участие. Несколько лет спустя фон Нейман был удостоен премии Э. Ферми. В решении жюри специально отмечался его вклад в развитие теории и практики вычислений на ЭВМ.

Одно из прямых изобретений фон Неймана — метод Монте-Карло для нахождения многомерных интегралов. В основе лежит идея построения с помощью ЭВМ случайной выборки точек и получения интеграла в виде среднего арифметического значений функций в этих точках. Фон Нейману принадлежит изобретение датчика случайных чисел, разнообразные методы численного нахождения собственных значений матриц большой размерности, процедура обращения матриц, метод поиска экстремума функций нескольких переменных.

Фон Нейман предложил новые способы решения ряда задач, основанные на сведении данной задачи к игровой или теоретико-вероятностной ситуации. Теоретико-вероятностная интерпретация, как правило, определялась ее физическим смыслом. Таким образом, фон Нейман предложил вероятностные модели для решения кинетического уравнения Больцмана и ряда проблем гидродинамики. В других задачах фон Нейман использует ту или иную игровую схему с участием ЭВМ.

Одним из последних циклов работ фон Неймана была серия лекций и незаконченных работ по теории автоматов. В 60-е годы, уже после смерти фон Неймана, его сотрудник и специалист по кибернетике Бёркс обработал имеющиеся материалы и издал их отдельной книгой (рус. пер.: Теория самовоспроизводящихся автоматов). Итог этого большого труда состоит в доказательстве возможности сконструировать автомат, способный к самовоспроизведению. Бёркс завершил детальное описание такого автомата, у которого 29 состояний, а взаимодействуют лишь ближайшие соседи, в некотором смысле он является универсальной машиной Тьюринга (в дальнейшем число состояний было уменьшено). Этот результат имеет глубокое научно-философское значение. Однако сейчас ясно, что еще более важным оказались сама постановка вопроса и подход к его решению. Теория клеточных автоматов, коллективов автоматов, эволюционные геометрические модели морфогенеза — все это выросло из идей фон Неймана.

Еще по крайней мере две идеи, связанные с теорией автоматов, должны быть упомянуты. Первая — постановка вопроса о создании надежных автоматов, составленных из ненадежных элементов, и вторая — идея вероятностных автоматов. Обе они получили дальнейшее теоретическое и прикладное развитие. Фактически работы по автоматам относятся в равной мере и к теоретической биологии, и к теории программирования, и к математической логике (сам он говорил о «логической теории автоматов»). В лекциях фон Нейман упоминал также нейрофизиологию, турбулентность, квантовую механику, химию ферментов и многое другое. В качестве математического аппарата он имел в виду привлечь нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, логику, теорию информации, теорию вычислительных и аналоговых машин и др. Видимо, далеко не все идеи фон Неймана по теории автоматов удалось расшифровать и тем более реализовать.

В разные периоды своей жизни фон Нейман занимался теоретической физикой, гидродинамикой, экономикой и теорией игр, был инженером и конструктором ЭВМ, вычислителем и создателем разнообразных приближенных и численных методов. Однако всегда и прежде всего он был математиком.

* * *

Полезно обратиться к высказываниям самого фон Неймана о математике. В полное собрание его сочинений включены две его статьи общего характера: речь перед выпускниками Принстонского университета «Роль математики в науке и обществе» и статья в сборнике «Единство знания» под названием «Метод в физических науках» (Method in physical sciences). Фон Нейман пишет: «Для начала мы подчеркнем утверждение, которое, как я уверен, вы слышали и раньше, но которое следует повторять снова и снова. Науки не пытаются объяснять, едва ли они пытаются интерпретировать, они в основном предлагают модели. Под моделью понимается математическая конструкция, которая при помощи языковых средств описывает наблюдаемое явление». Далее фон Нейман пишет: «Оправданность данной математической конструкции покоится только и единственно на том, что она будет работать, т. е. правильно описывать явления в достаточно широкой области. Кроме того, она должна удовлетворять некоторым эстетическим критериям, т. е. в зависимости того, сколь много она описывает, она должна быть относительно простой». Эта цитата показывает, как фон Нейман подходил к рассмотрению прикладных проблем.

В статье о роли математики фон Нейман выделяет в качестве первого момента выработку некоторых стандартов в наших знаниях (certain standards of objectivity, certain standards of truth), которые создаются независимо от разных других сторон развития науки. Далее, математика представляет собой прекрасную школу логического мышления, обдумывания (thinking). Здесь фон Нейман подчеркивает роль этого свойства математики в применении к областям, которые нельзя относить к точным наукам: «Мне кажется, что одно из главных достижений математики в области нашего мышления в том, что она показала огромную гибкость в создании концепций, такую степень гибкости, которую трудно было бы достичь без математики». И наконец, фон Нейман останавливается на вопросе о полезности математических теорий: «Большая часть математики, которая стала полезной, развивалась без всякого намерения быть полезной и в ситуации, где никто, возможно, и не знал, в какой области она станет полезной; и не было даже никаких указаний на то, что это когда-либо произойдет. В целом, несомненно, верно, что в математике существует промежуток времени между математическим открытием и моментом, когда оно становится полезным; этот промежуток может длиться от 30 до 100 лет, иногда даже больше, и вся система развивается без определенной цели, без всякой связи с полезностью (usefulness) и без всякого стремления к развитию того, что полезно». В конце фон Нейман пишет: «И мне кажется исключительно поучительным следить за ролью науки в повседневной жизни и отмечать, как в этой области принцип laissez faire (приблизительно, свободного творчества.— *Примеч. ред.*) приводит к неожиданным и поразительным результатам».

# БИБЛИОГРАФИЯ ТРУДОВ ДЖ. ФОН НЕЙМАНА *

## КНИГИ

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. B.: Springer, 1932; N. Y.: Dover Publications, 1943; Presses Universitaires de France, 1947; Madrid: Instituto de Mathematicas «Jorge Juan», 1949.
Theory of games and economic behavior. Princeton: Univ. press, 1944, 1947, 1953, 625 p. In collab. with O. Morgenstern.
Functional operators. Princeton: Univ. press, 1950. Vol. I. Measures and integrals. 261 p. (Ann. Math. Stud.; N 21); Vol. II. The geometry of orthogonal spaces. 107 p. (Ann. Math. Stud.; N 22).
The computer and the brain (Silliman lectures). Yale: Univ. press, 1958. 82 p.
Continuous geometry. Princeton: Univ. press, 1960. 229 p. With introd. by I. Halperin.

## СТАТЬИ

### 1922

1. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome.— Jahresb., 1922, Bd. 31, S. 125—138. In Gemeinschaft mit M. Fekete.

### 1923

2. Zur Einführung der transfiniten Zahlen.— Acta Szeged, 1923, k. 1, old. 199—208.

### 1925

3. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.— J. Math., 1925, Bd. 154, S. 219—240.
4. Egyenletesen sürü számsorozatok.— Mat. phys. lapok, 1925, k. 32, old. 32—40.

### 1926

5. Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen.— Acta Szeged, 1926, k. 2, old. 193—227.

### 1927

6. Über die Grundlagen der Quantenmechanik.— Math. Ann., 1927, Bd. 98, S. 1—30. In Gemeinschaft mit D. Hilbert, L. Nordheim.
7. Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Kl. Phys. Math., 1927, S. 76—90.
8. Mathematische Begründung der Quantenmechanik.— Götting. Nachr., 1927, S. 1—57.
9. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik.— Götting. Nachr., 1927, S. 245—272.
10. Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten.— Gött. Nachr., 1927, S. 273—291.
11. Zur Hilbertschen Beweistheorie.— Math. Ztschr., 1927, Bd. 26, S. 1—46.

### 1928

12. Die Zerlegung eines Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen.— Fund. math., 1928 t. 11, s. 230—238.
13. Ein System algebraische unabhängiger Zahlen.— Math. Ann., 1928, Bd. 99, S. 134—141.
14. Über die Definition durch transfinite Induktion, und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre.— Math. Ann., 1298, Bd. 99, S. 373—391.
15. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.— Math. Ann., 1928, Bd. 100, S. 295—320.
16. Die Axiomatisierung der Mengenlehre.— Math. Ztschr., 1928, Bd. 27, S. 669—752.
17. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. I.— Ztschr. Phys., 1928, Bd. 47, S. 203—220. In Gemeinschaft mit E. Wigner.

---

* В библиографию включены статьи, вошедшие в шеститомное собрание сочинений «Collected works» / Ed. A. H. Taub. Oxford etc.: Pergamon press, 1960—1962.

18. Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons.— Ztschr. Phys., 1928, Bd. 48, S. 868—881.
19. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. II.— Ztschr. Phys., 1928, Bd. 49, S. 73—94. In Gemeinschaft mit E. Wigner.
20. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. III.— Ztschr. Phys., 1928, Bd. 51, S. 844—858. In Gemeinschaft mit E. Wigner.

1929

21. Über eine Widerspruchfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre.— J. Math., 1929, Bd. 160, S. 227—241.
22. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen.— Math. Ztschr., 1929, Bd. 30, S. 3—42.
23. Über merkwürdige diskrete Eigenwerte.— Phys. Ztschr., 1929, Bd. 30, S. 465—467. In Gemeinschaft mit E. Wigner.
24. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen.— Phys. Ztschr., 1929, Bd. 30, S. 467—470. In Gemeinschaft mit E. Wigner.
25. Beweis des Ergodensatzes und des $H$-Theorems in der neuen Mechanik.— Ztschr. Phys., 1929, Bd. 57, S. 30—70.
26. Zur allgemeinen Theorie des Masses.— Fund. math., 1929, t. 13, s. 73—116.
27. Zusatz zur Arbeit «Zur allgemeinen...» — Fund. math., 1929, t. 13, s. 333.
28. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 49—131.
29. Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 370—427.
30. Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen.— J. Math., 1929, Bd. 161, S. 208—236.

1930

31. Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung.— Hamburg. Abh., 1930, Bd. 8, S. 28—31.

1931

32. Über Funktionen von Funktionaloperatoren.— Ann. Math., 1931, vol. 32, p. 191—226.
33. Algebraische Repräsentanten der Funktionen «bis auf eine Menge vom Masse Null».— J. Math,. 1931, Bd. 165, S. 109—115.
34. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren.— Math. Ann., 1931, Bd. 104, S. 570—578.
35. Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Lesniewski über meine Arbeit «Zur Hilbertschen Beweistheorie».— Fund. math., 1931, t. 17, s. 331—334.
36. Die formalistische Grundlegung der Mathematik: Report to the Congress, Königsberg, September, 1931.— Erkenntniss, 1931, Bd. 2, S. 116—121.

1932

37. Zum Beweise des Minkowskischen Satzes über Linearformen.— Math. Ztschr., 1932, Bd. 30, S. 1—2.
38. Über adjungierte Funktionaloperatoren.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 294—310.
39. Proof of the quasi-ergodic hypothesis.— Proc,. Nat. Acad. Sci. US, 1932, vol. 18, p. 70—82.
40. Physical applications of the ergodic hypothesis.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1932, vol. 18, p. 263—266.
41. Dynamical systems of continuous spectra.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1932, vol. 18, p. 255—263 In collab. with B. O. Koopman.
42. Über einen Satz von Herrn M. H. Stone.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 567—573.
43. Einige Sätze über messbare Abbildungen.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 574—586.
44. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 587—642.
45. Zusätze zur Arbeit «Zur Operatorenmethode...».— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 789—791.

1933

46. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen.— Ann. Math., 1933, vol. 34, p. 170—190.
47. A koordináta-mérés pontosságanák határai az elektron Dirac-féle elméletében (Über die Grenzen

der Koordinatenmessungs-Genauigkeit in der Diracschen Theorie des Elektrons).— Mat. és Természettud... Értesitó, 1933, k. 50, old. 366—385.

1934

48. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism.— Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 29—64. In collab. with P. Jordan, E. Wigner.
49. Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen.— Compos. math., 1934, bd. 1, blz. 106—114.
50. Almost periodic functions in a group. I.— Trans. Amer. Math. Soc., 1934, vol. 36, p. 445—492.
51. The Dirac equation in projective relativity.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1934, vol. 20, p. 383—388. In collab. with A. H. Taub, O. Veblen.

1935

52. On complete topological spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 37, p. 1—20.
53. Almost periodic functions in groups. II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 37, p. 21—50. In collab. with S. Bochner.
54. On compact solutions of operational-differential equations. I.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 255—291. In collab. with. S. Bochner.
55. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators.— Actual. Sci. et Ind. Ser., N 229. Exposés Math., publiés à la mémoirie de J. Herbrand, N 13. P., 1935. 20 p.
56. On normal operators.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1935, vol. 21, p. 366—369.
57. On inner products in linear, metric spaces.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 719—723. In collab. with P. Jordan.
58. The determination of representative elements in the residual classes of a Boolean algebra. — Fund. math., 1935, t. 25, s. 353—378. In collab. with M. H. Stone.

1936

59. On a certain topology for rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 111—115.
60. On rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 116—229. In collab. with F. J. Murray.
61. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formation. I.— Mat. sb., 1936, vol. 1, p. 415—484.
62. The uniqueness of Haar's measure.— Mat. sb., 1936, vol. 1, p. 721—734.
63. The logic of quantum mechanics.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 823 — 843. In collab. with G. Birkhoff.
64. Continuous geometry.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1936, vol. 22, p. 92—100.
65. Examples of continuous geometries.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1936, vol. 22, p. 101—108.
66. On regular rings.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1936, vol. 22, p. 707—713.

1937

67. On some analytic sets defined by transfinite induction.— Ann. Math., 1937, vol. 38, p. 521—525. In collab. with K. Kuratowski.
68. On rings of operators. II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 208—248. In collab. with F. J. Murray.
69. Some matrix-inequalities and metrization of matrix-space.— Tomsk. Univ. Rev., 1937, vol. 1, p. 286—300.
70. Algebraic theory of continuous geometries.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1937, vol. 23, p. 16—22.
71. Continuous rings and their arithmetics.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1937, vol. 23, p. 341—349.

1938

72. On infinite direct products.— Compos. math., 1938, bd. 6, blz. 1—77.

1940

73. On the transitivity of perspective mappings.— Ann. Math., 1940, vol. 41, p. 87—93. In collab. with I. Halperin.
74. On rings of operators. III.— Ann. Math., 1940, vol. 41, p. 94—161.
75. Minimally almost periodic groups.— Ann. Math., 1940, vol. 41, p. 746—750. In collab. with E. Wigner.

1941

76. The mean square successive difference.— Ann. Math. Statist., 1941, vol. 12, p. 153—162. In collab. with R. H. Kent, H. R. Bellinson, B. I. Hart.
77. Fourier integrals and metric geometry.— Trans. Amer. Math. Soc., 1941, vol. 50, p. 226—251. In collab. with I. J. Schoenberg.
78. Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance.— Ann. Math. Statist., 1941, vol. 12, p. 367—395.

1942

79. A further remark concerning the distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance.— Ann. Math. Statist., 1942, vol. 13, p. 86—88.
80. Operator methods in classical mechanics. II.— Ann. Math., 1942, vol. 43, p. 332—350. In collab. with P. R. Halmos.
81. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. I.— Astrophys. J., 1942, vol. 95, p. 489—531. In collab. with. S. Chandrasekhar.
82. Note to: tabulation of the probabilities for the ratio of the mean square successive difference to the variance, by B. I. Hart.— Ann. Math. Statist., 1942, vol. 13, p. 207—214.
83. Approximative properties of matrices of high finite order.— Port. math., 1942, vol. 3, p. 1—62.

1943

84. On rings of operators. IV.— Ann. Math., 1943, vol. 44, p. 716—808. In collab. with F. J. Murray.
85. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. II. The speed of fluctuations; dynamical friction; spatial correlations.— Astrophys. J., 1943, vol. 97, p. 1—27. In collab. with S. Chandrasekhar.
86. On some algebraical properties of operator rings.— Ann. Math., 1943, vol. 44, p. 709—715.

1945

87. A model of general economic equilibrium.— Rev. econ. stud., 1945, vol. 13, p. 1—9 .

1946

88. The cross-space of linear transformations. II.— Ann. Math., 1946, vol. 47, p. 608—630. In collab. with R. Schatten.

1947

89. The mathematician.—In: The works of the mind / Ed. R. B. Heywood. Chicago: Univ. press, 1947, p. 180—196.
90. Numerical inverting of matrices of high order.— Bull. Amer. Math. Soc., 1947, vol. 53, p. 1021—1099. In collab. with H. H. Goldstine.

1948

91. The cross-space of linear transformations. III.— Ann. Math., 1948, vol. 49, p. 557—582. In collab. with R. Schatten.

1949

92. On rings of operators: Reduction theory.— Ann. Math., 1949, vol. 50, p. 401—485.

1950

93. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks.— J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, p. 232—237. In collab. with R. D. Richtmyer.
94. Solutions of games by differential equations.— Ann. Math. Stud., 1950, N 24, p. 73—79. In collab. with G. W. Brown.
95. Statistical treatment of values of first 2000 decimal digits of *e* and of *Pi* calculated on the ENIAC.— Math. Tab. and Aids Comput., 1950, vol. 4, p. 109—111. In collab. with N. C. Metropolis, G. Reitwiesner.
96. Numerical integration of the barotropic vorticity equation.— Tellus, 1950, vol. 2, p. 237—254. In collab. with J. G. Charney, R. Fjortoft.

97. A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups.— Ann. Math., 1950, vol. 52, p. 509—517. In collab. with I. E. Segal.

**1951**

98. Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes.— Math. Nachr., 1951, Bd. 4, S. 258—281.
99. Discussion on the existence and uniqueness or multiplicity of solutions of the aerodynamical equations.—In: Problems of cosmical aerodynamics. Proc. Symp. on the motion of gaseous masses of cosmical dimensions, 16—19 Aug., Paris, 1953. P., 1951, p. 75—84.
100. Numerical inverting of matrices of high order. II.— Amer. Math. Soc. Proc., 1951, vol. 2, p. 188—202. In collab. with H. H. Goldstine.
101. Various techniques used in connection with random digits.— J. Res. Nat. Bur. Stand. A, 1951, vol. 12, p. 36—38.
102. The general and logical theory of automata. — In: Cerebral mechanisms in behavior / Ed. L. A. Jeffress. N. Y.: J. Wiley, 1951, p. 1—31.

**1953**

103. A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem.— Ann. Math. Stud., 1953, N 28, p. 5—12.
104. Two variants of poker.—Ann. Math. Stud., 1953, N 28, p. 13—50. In collab. with D. B. Gillies, J. P. Mayberry.
105. Communication on the Borel notes.— Econom., 1953, vol. 21, p. 124—125.

**1954**

106. Significance of Loewner's theorem in the quantum theory of collisions.— Ann. Math., 1954, vol. 59, p. 418—433. In collab. with E. P. Wigner.
107. A numerical method to determine optimum strategy.— Log. Quart., 1954, vol. 1, p. 109—115.

**1955**

108. On the permutability of self-adjoint operators.— Ann. Math., 1955, vol. 62, p. 199—203. In collab. with A. Devinatz, A. E. Nussbaum.
109. Continued fraction expansion of $2^{1/3}$.— Math. Tab. and Aids Comput., 1955, vol. 9, p. 23—24. In collab. with B. Tuckerman.
110. Blast wave calculation.— Communs Pure and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 327—353. In collab. with H. H. Goldstine.
111. Method in the physical sciences.— In: The unity of knowledge /Ed. L. Leary. N. Y.: Doubleday, 1955, p. 157—164.

**1958**

112. Non-isomorphism of certain continuous rings.— Ann. Math., 1958, vol. 67, p. 485—496. With introd. by I. Kaplansky.

**1959**

113. The Jacobi method for real symmetric matrices.— J. Assoc. Comput. Mach., 1959, vol. 6, p. 59—96. In collab. with H. H. Goldstine, F. J. Murray.
114. A study of a numerical solution to a two-dimensional hydrodynamical problem.— Math. Tab. and Aids Comput., 1959, vol. 13, p. 145—184. In collab. with A. Blair, N. Metropolis, A. H. Taub, M. Tsingou.

# КОММЕНТАРИИ К СТАТЬЯМ*

## Об операторных методах в классической механике

[1] (с. 7, 8, 24, 27, 29, 38, 39). Имеется в виду работа «Einige Sätze über messbare Abbildungen» (Некоторые теоремы об измеримых отображениях), опубликованная в Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 574—586.

[2] (с. 8). Говорят, что в $m$-пространстве $\Omega$ определена $l$-мера, если любому подмножеству $N \subset \Omega$ сопоставляется число $\mu^*(N)$, так что выполняются следующие условия:

I. $\mu^*(N)$ либо равно нулю, либо конечно и положительно, либо равно $\infty$. Для любого шара $K$ число $\mu^*(K)$ конечно.

II. Если $M \subset N$, то $\mu^*(M) \leqslant \mu^*(N)$.

III. Если $N_1, N_2, \ldots$ — конечный или счетный набор множеств, а $M$ — их объединение, то $\mu^*(M) \leqslant \mu^*(N_1) + \mu^*(N_2) + \ldots$

IV. Если расстояние между множествами $M$ и $N$ строго положительно, то $\mu^*(M+N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$.

V. Число $\mu^*(M)$ равно нижней грани всех чисел $\mu^*(O)$, где $O$ пробегает всю совокупность открытых множеств, содержащих $M$.

[3] (с. 8) Имеется рус. пер.: *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 304 с.

[4] (с. 9). Под «механическим потоком» автор подразумевает поток, задаваемый уравнениями Гамильтона.

[5] (с. 9, 52). Доказательство того, что измеримый поток непрерывен, имеется в статье: *Хопф Э.* Эргодическая теория.— Успехи мат. наук, 1949, т. 4, № 1, с. 113—182. (Пер. с нем.: *Hopf E.* Ergodentheorie.—Math. Ann., 1937. 83 S.). А. М. Вершик в работе «Измеримая реализация непрерывных групп автоморфизмов унитарного кольца» (Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 1, с. 127—136) доказал, что всякий непрерывный поток, действующий на пространстве Лебега, метрически изоморфен некоторому измеримому потоку. Несколько позже этот результат независимо получил Г. Маруяма (см. *Maruyama G.* Transformations of flows.— J. Math. Soc. Jap., 1966, vol. 18, N 3, p. 303—330).

[6] (с. 12, 49, 50). Это утверждение неверно, как показал П. Халмош для эргодических автоморфизмов со смешанным спектром (см.: *Халмош П.* Лекции по эргодической теории. М. : Изд-во иностр. лит., 1959; обобщенные собственные функции; квазидискретный спектр). С. В. Фомин в дополнении к книге Халмоша поставил вопрос о том, будут ли метрически изоморфными автоморфизмы с одинаковым простым спектром. Отрицательный ответ на этот вопрос дал С. А. Малкин (Изв. вузов. Математика, 1968, № 6, с. 69—74). Затем аналогичный пример с простым непрерывным спектром построил В. И. Оселедец (Функцион. анализ и его прил., 1974, т. 8, № 3, с. 81—82). В работе А. Н. Колмогорова «Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега» (Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 5, с. 861—865) был введен новый метрический инвариант для преобразований с инвариантной мерой и измеримых потоков — энтропия. Оказалось, что динамические системы с одинаковым спектром могут иметь

---

* В комментариях, помимо отдельных пояснений и освещения современного состояния конкретных вопросов, прослеживается развитие некоторых фундаментальных понятий и идей, принадлежащих фон Нейману.

при этом разные энтропии. Простейший пример — схема Бернулли. Известно, что любая схема Бернулли имеет счетнократный лебеговый спектр. Тем самым мы получаем континуум неизоморфных динамических систем, имеющих одинаковый спектр. Действительно, энтропия схемы Бернулли может принимать любое положительное значение.

[7] (с. 13). Имеется в виду работа «Доказательство квазиэргодической гипотезы» (Proof of quasi-ergodic hypothesis.—Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1932, vol. 18, p. 70—82).

[8] (с. 15). Имеется рус. пер.: *Валле Пуссен.* Курс анализа бесконечно малых. М. : Гостехиздат, 1933.

[9] (с. 16, 39). Эта функция согласно современной терминологии называется характеристической функцией (или индикатором) множества $\Lambda$.

[10] (с. 27). Краткое содержание этого замечания таково: условие II есть следствие условия V (см. примеч. 2), однако мы не будем менять введенное Каратеодори определение. Впрочем, мы можем в V вместо открытых множеств, содержащих $M$, рассмотреть все борелевские множества, содержащие $M$. Так как любое открытое множество является борелевским, то достаточно показать, что если $P$ — борелевское множество, то существует открытое множество $O \supset P$, такое, что $\mu^*(O) < \mu^*(P) + \varepsilon$. Далее следует доказательство этого факта, которое можно найти практически в любой современной книге по теории меры (см., например: *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 291 с. или *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1972. 496 с.).

[11] (с. 29). В цитируемой теореме доказывается, что если $\Omega$- и $\Omega'$ — $m$-пространства с $l$-мерами соответственно $\mu^*$ и $\mu'^*$, а $x' = \varphi(x)$ — взаимно однозначное отображение $\Omega$ на $\Omega'$, то любое из двух условий: а) для любого измеримого подмножества $M \subset \Omega$ его образ $\varphi(M) \subset \Omega'$ измерим и имеет ту же меру, как и $M$; б) для любого измеримого $M' \subset \Omega'$ его прообраз $\varphi^{-1}(M') \subset \Omega$ измерим и имеет такую же меру, как и $M'$, является необходимым и достаточным для того, чтобы отображение $\varphi$ сохраняло меру.

[12] (с. 38). Два сохраняющих меру отображения $\varphi_1$, $\varphi_2$ множеств (из $\Omega$ на $\Omega'$) называются эквивалентными, если для любого измеримого подмножества $M \subset \Omega$ оба его образа $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$ являются эквивалентными подмножествами $\Omega'$.

Теорема 1. *Пусть $\Omega$ и $\Omega'$ — $m$-пространства соответственно с $l$-мерами $\mu^*$ и $\mu'^*$. Любое сохраняющее меру точечное отображение из $\Omega$ на $\Omega'$ или из $\Omega_1$ на $\Omega_1'$, где $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_1' \subset \Omega'$ (множества $\Omega - \Omega_1$ и $\Omega' - \Omega_1'$ имеют меру 0), индуцирует сохраняющее меру отображение множеств из $\Omega$ на $\Omega'$. Обратно, любое сохраняющее меру отображение множеств из $\Omega$ на $\Omega'$ эквивалентно такому отображению, которое индуцировано некоторым сохраняющим меру точечным отображением* $\Omega_1$ на $\Omega_1'$. *При этом если пространства $\Omega$ и $\Omega'$ несчетны, то можно положить* $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_1' = \Omega$.

[13] (с. 41, 61). Это статья «Об одной теореме М. Х. Стоуна» (Über einen Satz von Herrn M. H. Stone.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 567—573), в которой доказывается теорема о существовании спектрального разложения $U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE(\lambda)$ для однопараметрической группы унитарных операторов.

[14] (с. 41). Семейство операторов $U_t$ называется аппроксимативно сильно непрерывным, если оно сильно непрерывно по $t$ всюду вне $t$-множества как угодно малой меры.

[15] (с. 49). Эта гипотеза неверна. Например, сдвиги Бернулли имеют счетнократный непрерывный (лебеговый) спектр. Возможна и конечная кратность спектра. В. И. Оселедец (Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 5, с. 1009—1011) построил пример эргодического перекладывания 24 отрезков, в котором кратность спектра не меньше 2 и не больше 23.

[16] (с. 57). Уравнения такого типа называются гомологическими.

[17] (с. 60). Приведем указанные определения (определение $l$-меры уже дано в коммент. 2).

Определение 3. *Подмножество* $M \subset \Omega$ *называется измеримым, если для любого подмножества* $N \subset \Omega$ *выполняется равенство* $\mu^*(N) = \mu^*(MN) + \mu^*(N - MN)$.

Определение 4. *Пусть* $\Omega$ *и* $\Omega'$ *— два m-пространства соответственно с l-мерами* $\mu^*$ *и* $\mu'^*$. *Отображение* $\varphi$ *пространства* $\Omega$ *на* $\Omega'$ *называется точечным сохраняющим меру отображением, если оно переводит любое измеримое подмножество* $M \subset \Omega$ *в измеримое подмножество* $M' \subset \Omega'$, *такое, что* $\mu^*(M) = \mu'^*(M')$, *и, обратно, каждому измеримому подмножеству* $M' \subset \Omega'$ *при этом отвечает измеримое подмножество* $M \subset \Omega$, *такое, что* $M' = \varphi(M)$.

Определение 5. *Пусть* $\Omega, \Omega', \mu^*, \mu'^*$ *— такие же, как в определении 4. Отображение* $\psi$ *пространства* $\Omega$ *на* $\Omega'$ *называется сохраняющим меру отображением множеств, если оно сопоставляет каждому измеримому подмножеству* $M \subset \Omega$ *измеримое подмножество* $M' \subset \Omega'$, *имеющее такую же меру, и при этом выполняются следующие условия*:

1. *Для любого измеримого подмножества* $M' \subset \Omega'$ *найдется измеримое подмножество* $M \subset \Omega$, *образ которого* $\psi(M)$ *является подмножеством* $\Omega'$, *эквивалентным* $M'$.

2. *Если* $\psi(M_i) = M_i'$, $M_i \subset \Omega$, $M_i' \subset \Omega'$, $i = 1, 2, \ldots$, *то образом множества* $M_1 + M_2 + \ldots$ *является множество* $M_1' + M_2' + \ldots$ *Далее, если* $\psi(M) = M'$, $\psi(N) = N'$, $M, N \subset \Omega$, $M', N' \subset \Omega'$, *то* $M' - N' = \psi(M - N)$.

## Операторные методы в классической механике. II

[1] (с. 68). Функция $f(x)$ называется однолистной, если для любой точки $x$ множество $f^{-1}(x)$, представляющее собой ее полный прообраз, состоит из не более чем одной точки.

[2] (с. 71). См. коммент. 2 к статье «Об операторных методах в классической механике».

[3] (с. 73). Имеется рус. пер.: *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 494 с.

[4] (с. 79). См. также последующие издания этой книги.

[5] (с. 81). Эта гипотеза неверна. Х. Анзаи (*Anzai H.* — Osaka J. Math., 1951, vol. 3, p. 83—99) с помощью введенного им понятия косого произведения автоморфизмов построил пример автоморфизма, не изоморфного своему обратному. Тем самым опровергаются обе гипотезы (о справедливости следствий 3 и 4 для произвольных автоморфизмов), так как видно, что из следствия 3 всегда вытекает утверждение следствия 4. Поэтому опровержение справедливости следствия 4 автоматически влечет и то, что утверждения следствия 3 также не выполняются.

[6] (с. 81). Имеется рус. пер.: *Хопф Э.* Эргодическая теория.— Успехи мат. наук, 1949, т. 4, № 1, с. 113—182.

## Введение аналитических параметров в топологические группы

[1] (с. 84). Результат фон Неймана был вскоре перекрыт Л. С. Понтрягиным, давшим полное описание строения произвольных бикомпактных групп, удовлетворяющих II аксиоме счетности (*Pontrjagin L.* Sur les groupes topologiques compactes et le cinquime probleme de D. Hilbert.— C. r. Acad. sci., 1934, vol. 198, p. 233—238). Доказательство Л. С. Понтрягина, как и у Дж. фон Неймана, основано на теоремах Петера и Вейля о существовании полной системы линейных представлений.

Для коммутативных (некомпактных) групп полное решение проблемы содержится в работе Л. С. Понтрягина «The theory of topological commutative groups» (Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 361—388). Затем К. Шевалле дал решение пятой проблемы Гильберта для разрешимых групп

(*Chevalley C.* Two theorems on solvable topological groups.— In : Lectures in topology. Ann. Arbor: Univ. Mich. press, 1941).

Этот результат перекрыл А. И. Мальцев (Топологические разрешимые группы.— Мат. сб., 1946, т. 19, № 2, с. 165—174), описав локальную структуру разрешимых связных локально-бикомпактных групп. В 1952 г. А. Глисон (*Gleason A.* Groups without small subgroups.— Ann. Math., 1952, vol. 56, N 2, p. 189—212) и Д. Монтгомери и Л. Зиппин (*Montgomery D.*, *Zippin L.* Small subgroups in finite dimensional groups.— Ann. Math., 1952, vol. 56, N 2, p. 213—241) дали решение пятой проблемы Гильберта в общем случае.

Итог исследований по пятой проблеме Гильберта был подведен работой В. М. Глушкова (Строение локально-бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта.—Успехи мат. наук, 1957, т. 12, вып. 2(74), с. 3—41), доказавшего следующее утверждение.

Теорема. *Для любой локально-бикомпактной группы G и для любой окрестности U ее единицы найдется такая открытая окрестность единицы V этой группы, которая содержится в U и распадается в прямое произведение связной локальной группы Ли L и бикомпактной группы. При этом если группа G не является вполне несвязной, то окрестность V может быть выбрана так, что при любом разложении указанного вида локальная группа Ли L имеет положительную размерность.*

Все результаты по пятой проблеме Гильберта и по многим смежным вопросам являются более или менее очевидными следствиями этой теоремы, полученной после решения проблемы.

[2] (с. 85). Приведем формулировку этой теоремы из работы «Об аналитических свойствах групп линейных преобразований и их представлениях» (Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen.— Math. Ztschr., 1929, Bd. 30, S. 3—42).

Пусть $\overline{\mathfrak{G}}$ — замкнутая топологическая (матричная) группа; $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ — связная компонента группы $\overline{\mathfrak{G}}$, содержащая $A \subset \overline{\mathfrak{G}}$; $E$ — единица группы $\overline{\mathfrak{G}}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{J}$ — линейное многообразие, т. е. существует $k$ линейно независимых матриц $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots, \overline{U}_k$ ($k = 0, 1, \dots, 2m^2$), таких, что $\mathfrak{J}$ состоит из всех линейных комбинаций $\alpha_1\overline{U}_1 + \alpha_2\overline{U}_2 + \dots + \alpha_k\overline{U}_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — действительные числа. Если матрицы $U$, $V$ принадлежат $\mathfrak{J}$, то их коммутатор $UV - VU$ тоже принадлежит $\mathfrak{J}$. $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ есть нормальный делитель $\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ есть присоединенная к $A$ подгруппа $\overline{\mathfrak{G}}(E)$. Связные компоненты $\overline{\mathfrak{G}}$ соответствуют отображениям фактор-группы $\overline{\mathfrak{G}}$ по $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ в $\overline{\mathfrak{G}}$.*

Подгруппа $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ относительно открыта в $\overline{\mathfrak{G}}$, и, следовательно, фактор-группа $\overline{\mathfrak{G}}$ по $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ дискретна.

Две точки (матрицы) из $\overline{\mathfrak{G}}$ тогда и только тогда принадлежат одной и той же связной компоненте $\overline{\mathfrak{G}}$, когда они могут быть соединены принадлежащей $\overline{\mathfrak{G}}$ аналитической кривой. Множество $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ состоит из всех элементов вида $A \exp(U_1) \exp(U_2) \dots \exp(U_j)$, где $U_1, U_2, \dots, U_j \in \mathfrak{J}$. У каждого $A$ есть такая окрестность $\mathfrak{U}$, что образ отображения $A \exp U$, где $U$ пробегает все $\mathfrak{J}$, содержит $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ и отображение $Y = \ln(A^{-1}X)$ $(X = A\exp(Y))$ отображает $\mathfrak{U}$ взаимно однозначно на некоторую окрестность нуля в $\mathfrak{J}$. Таким образом, $\overline{\mathfrak{G}}$ может быть всюду локально и аналитически отображена в $k$-мерное действительное евклидово пространство. Тем самым $\mathfrak{U}$ состоит из элементов вида $A \exp(\alpha_1\overline{U}_1 + \dots + \alpha_k\overline{U}_k)$ где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — действительные числа, такие, что точка $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ принадлежит некоторой окрестности нуля, $k$-мерного евклидова пространства.

Согласно современной терминологии $\mathfrak{J}$ является алгеброй Ли группы $\overline{\mathfrak{G}}$.

[3] (с. 86). Через $\mathrm{Ma\beta}_x [f(x) \leqslant \lambda]$ (от немецкого слова «Maβ», означающего «мера») обозначается мера множества тех точек $x$, в которых значение функции $f(x)$ не превосходит $\lambda$.

[4] (с. 90). Entf $(\cdot\,,\,\cdot)$ — от немецкого слова «Entfernung» (расстояние).

## Почти периодические функции на группе. I

[1] (с. 106). Сокращение l. u. b. означает «точная верхняя грань» (least upper boundary).

[2] (с. 110). Числа $\alpha_i$ и $\beta_j$ неотрицательны и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$.

[3] (с. 136). Здесь имеется в виду следующая аксиома топологического пространства (см.: *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 304 с.).

Аксиома 8. *Всякое открытое множество $G$ метрического пространства $R$ может быть записано как $\{f > 0\}$, где $f$ — действительная непрерывная функция. Если $f(x)$ непрерывна, то множество $\{f > 0\}$ открыто.*

[4] (с. 138). См. также: *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М. : Мир, 1965. 570 с.

[5] (с. 141). По поводу постулатов Каратеодори см. примеч. 2 и 11 к работе Дж. фон Неймана «Об операторных методах в классической механике».

## Почти периодические функции на группах. II

[1] (с. 148). Обозначения $V$, $U$, $\mathfrak{U}$ взяты из статьи Неймана [1]. Там через $\mathfrak{U}$ обозначен базис окрестностей нуля, задающий топологию в $L$; $V$ и $U$ — окрестности нуля из $\mathfrak{U}$. Всюду в дальнейшем будем приводить необходимые сведения из работы [1], не обговаривая этого всякий раз.

[2] (с. 148). Приведем это определение: *множество $S$ называется вполне ограниченным, если для любой $U \in \mathfrak{U}$ существует конечное число элементов $f_1, \ldots, f_n$ топологического линейного пространства $L$, такое, что $S \subset \mathfrak{S}(f_1 + U, \ldots, f_n + U)$, где $\mathfrak{S}(A_1, A_2, \ldots)$ — сумма множеств $A_i$, $i \geqslant 1$.*

[3] (с. 148). Пусть $D$ — произвольное множество, $L^D$ — совокупность всех определенных на $D$ функций $F(a)$, таких, что $F(a) \in L$. Функция $F(a)$ называется ограниченной, если множество $\{F(a), a \in D\}$ ограничено в $L$. Множество всех ограниченных $F \in L^D$ обозначается через $L_b^D$. Пусть $U \in \mathfrak{U}$. Обозначим через $U' \subset L_b^D$ множество всех функций $F \in L_b^D$, для которых $\{F(a), a \in D\} \subset U$. Множество всех таких множеств $U'$ обозначается через $\mathfrak{U}'$.

[4] (с. 149, 166). Теорема 9 работы [1] гласит: *любое конечное множество вполне ограничено. Множество всех элементов вида $\alpha f$, где $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а $f$ фиксирован, вполне ограничено. Если множества $S$ и $T$ вполне ограничены, то и множества $\alpha S$, $f + S$, $S + T$, $\mathfrak{S}(S, T)$-вполне ограничены.*

[5] (с. 150). Теорема 7. *$\alpha f$ и $f + g$ являются непрерывными функциями соответственно от $\alpha$ и $f$ и от $f$ и $g$.*

Теорема 11. *Для ограниченности (полной ограниченности) множества $S_{cl}$ ($S_{cl}$ — замыкание множества $S$) необходимо и достаточно, чтобы само $S$ было ограниченным (вполне ограниченным).*

Определение 7. *$S_{\mathrm{conv}}$ есть множество всех сумм вида $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$, где $n = 1, 2, \ldots$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$; $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$; $f_1, \ldots, f_n \in S$.*

Теорема 16. *Пусть $L$ — топологически полное, а $S$ — вполне ограничено. Тогда если рассмотреть $S$ как топологическое пространство с топологией, индуцированной $L$, то эта топология является нормальной и сепарабельной и удовлетворяет аксиомам Хаусдорфа.*

[6] (с. 150, 156). По поводу обозначения $V'$ см. примеч. 3.

Теорема 5. *Для любого множества $S$ его замыкание $S_{cl}$ совпадает с пересечением всех множеств вида $S + U$, где $U$ пробегает совокупность всех элементов $\mathfrak{U}$*

[7] (с. 150). Теорема 14 *Ограниченность (полная ограниченность) $S$ является необходимым условием ограниченности $S_{\mathrm{conv}}$; если пространство $L$ выпукло, то это условие является также и достаточным*

[8] (с. 150, 152). Для $f \in L$ и $U \in \mathfrak{U}$ рассматривается совокупность всех положительных чисел $\alpha$, при которых $f \in \alpha U$. Нижний предел множества всех таких $\alpha$ обозначается через $\|f\|_U^+$.

[9] (с. 152). Теорема 12. *Если L выпукло, то для всех $U \in \mathfrak{U}$ и чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ выполняется равенство $\alpha_1 U_{cl} + \ldots + \alpha_n U_{cl} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) U_{cl}$.*

[10] (с. 165). Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и пространство $\mathfrak{B}$, точками которого являются ограниченные линейные операторы на $\mathfrak{H}$. Топологию на $\mathfrak{H}$ и на $\mathfrak{B}$ можно вводить разными способами. Ниже определяются фундаментальные системы окрестностей, задающие рассматриваемые в данной работе топологии.

1. Для любого числа $\delta > 0$ определим окрестность $U_1(\delta)$ как множество всех тех функций $f \in \mathfrak{H}$, для которых $\| f \| < \delta$; $\mathfrak{U}_1$ представляет собой совокупность всех таких $U_1(\delta)$.

2. Для любого $n = 1, 2, \ldots$, $\delta > 0$ и для любого набора функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{H}$ определим окрестность $U_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta)$ как множество всех таких функций $f \in \mathfrak{H}$, для которых $|(f, \varphi_\nu)| < \delta$ при всех $\nu = 1, \ldots, n$; $\mathfrak{U}_2$ есть совокупность всех таких окрестностей $U_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta)$.

3. Для любого $\delta > 0$ определим $U_3(\delta)$ как множество всех таких $A \in \mathfrak{B}$, для которых $||| A ||| < \delta$, где

$$||| A ||| = \underset{f \in \mathfrak{H},\ f \neq 0}{\text{l. u. b.}} \frac{\| Af \|}{\| f \|},$$

т. е. как множество всех $A \in \mathfrak{B}$, для которых $\| Af \| < \delta \| f \|$; $\mathfrak{U}_3$ — множество всех $U_3(\delta)$.

4. Для любого $n = 1, 2, \ldots$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{H}$, $\delta > 0$ определим $U_4(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta)$ как множество всех $A \in \mathfrak{B}$, для которых $\| A\varphi_\nu \| \leqslant \delta$ при $\nu = 1, \ldots, n$; $\mathfrak{U}_4$ есть совокупность всех $U_4(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta)$.

Для любого $n = 1, 2, \ldots$; $\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_n \in \mathfrak{H}$, $\delta > 0$ определим $U_5(\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_n; \delta)$ как множество всех $A \in \mathfrak{B}$, для которых $|(A\varphi_\nu, \psi_\nu)| < \delta$ при $\nu = 1, \ldots, n$; $\mathfrak{U}_5$ есть множество всех таких $U_5(\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_n; \delta)$. $\mathfrak{U}_1$ задает сильную, $\mathfrak{U}_2$ — слабую топологию в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{U}_3$ — равномерную, $\mathfrak{U}_4$ — сильную и $\mathfrak{U}_5$ — слабую топологию в $\mathfrak{B}$.

## К общей теории меры

Работа «К общей теории меры» совсем еще молодого фон Неймана оказала серьезнейшее влияние на целый ряд разделов функционального анализа, теории групп и теории динамических систем. На первый взгляд основная ее тема — развитие и углубление работ Хаусдорфа, Банаха, Тарского, посвященных тонким вопросам теории меры Лебега. А именно, вопросу о том, возможно ли продолжение меры Лебега на совокупность всех подмножеств прямой (плоскости, пространства) с сохранением неотрицательности, конечной аддитивности и евклидовой инвариантности. В те годы подобные задачи живо интересовали ведущих математиков, а вопрос о том, как относиться к результатам, полученным (здесь или в сходных задачах) с помощью бесконтрольного использования аксиомы выбора, стал, как мы знаем, источником серьезных разногласий во взглядах на основания математики. В соответствии со вкусами тех лет фон Нейман строит с помощью аксиомы выбора (т. е. неэффективно) различные объекты типа инвариантных средних, парадоксальных неизмеримых множеств и т. д., обращая, впрочем, внимание на степень и характер использования этой аксиомы (см. п. 8 статьи).

Собственно, задача о продолжении меры Лебега, природа которой была существенно прояснена в этой работе фон Неймана, изучалась и далее, при этом были получены интересные дополнения (см. коммент.[7]), однако вряд ли можно спорить с тем, что эта проблематика имеет теперь в основном

исторический интерес. Последнее объясняется отсутствием приложений и связей с анализом, а также существенной неконструктивностью и неединственностью рассматриваемых объектов. При этом, впрочем, не следует забывать, что изучение этих вопросов дало толчок к развитию некоторых вопросов функционального анализа (теорема Хана—Банаха).

Ценность работы фон Неймана определяется тем, что в ней впервые проводится чрезвычайно плодотворная идея действия абстрактной группы преобразования; алгебраические свойства группы связываются с характером действия. Эта точка зрения привела автора к понятию аменабельности, играющей сейчас центральную роль в общей теории динамических систем, теории представлений и др. В этом отношении предшествующие работы вместе с их основной темой (продолжение меры и парадоксы) отступили на задний план, да и в самой работе фон Неймана нас скорее интересуют не главные теоремы, а новые идеи и соображения, лежащие в их основе.

Фон Нейман проводит новое по сравнению с предшественниками различение группы как таковой (например, ортогональной группы) и ее действия преобразованиями на некотором пространстве. При этом, например, чисто алгебраическое свойство— иметь свободную подгруппу с двумя образующими (при некоторых дополнительных условиях, если действие не свободно; см. ниже) — и влечет парадоксы типа парадокса Хаусдорфа. Поскольку уже группа $SL(2, \mathbb{R})$ имеет такую подгруппу, то парадоксы возникают не только в $\mathbb{R}^3$ (как у Хаусдорфа), но и в $\mathbb{R}^2$, где $SL(2, \mathbb{R})$ действует естественным образом, и в $\mathbb{R}^1$, где $PSL(2, \mathbb{R})$ действует дробно-линейными отображениями. Наоборот, сама группа может быть такой, что при любом ее действии подобные парадоксы невозможны. Таким образом, дело не в структуре $\mathbb{R}^n$ (при разных $n$), а в выборе группы, действующей в $\mathbb{R}^n$.

Ограничиваясь для простоты случаем свободного действия * группы на пространстве с нормированной инвариантной мерой, можно высказать основную мысль фон Неймана следующим образом: для продолжения меры на совокупность всех подмножеств с сохранением конечной аддитивности, неотрицательности и инвариантности необходимо и достаточно, чтобы группа была аменабельна («измерима» по терминологии автора; см. коммент.[2] к этой статье). Поэтому проблема сводится к тому, чтобы указать, какие группы аменабельны и какие операции выдерживает класс аменабельных групп.

Дальнейшая судьба понятия аменабельности кажется удивительной, если иметь в виду, что его возникновение связано с весьма специфической теоретико-множественной задачей о продолжении, далекой от алгебраических вопросов.

Начиная с 50-х годов стало ясно, что аменабельные группы замечательны во многих отношениях, среди которых свойство, связанное с продолжением инвариантных мер, в частности свойство иметь инвариантное среднее,— не самое главное. Приведем несколько примеров, характеризующих этот класс.

1. Аменабельность равносильна существованию неподвижной точки для любого аффинного действия группы на выпуклом компакте [2].

2. Аменабельность локально-компактной группы равносильна тому, что единичное представление группы содержится слабо в ее регулярном представлении [2, 3].

3. Аменабельность дискретной группы равносильна гиперконечности алгебры Неймана, порожденной регулярным представлением группы [4].

4. Аменабельность локально-компактной группы равносильна тому, что всякие ее действия с инвариантной мерой на пространстве Лебега траекторно эквивалентно действию $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}^1$ [5].

---

* Действие свободно, если любой элемент группы, отличный от единицы, не имеет неподвижных точек. Заметим, что чисто алгебраический подход возможен и для несвободного действия, но фон Нейман в этом случае привлекает иные соображения (см. коммент.[13]).

5. Для действия (см. п. 4) аменабельных групп имеет место эргодическая теорема и основные факты теории $\mathbb{Z}$ — динамических систем.

Этот список можно увеличить. Имеется много связей с вероятностными (случайные блуждания на группах [6]) комбинаторными и другими задачами (см. коммент. [11])*.

Имеется обширная литература по аменабельным группам, полугруппам, алгебрам (см. [2, 11]), их представлениям и действиям. Не будет преувеличением сказать, что аменабельные группы образуют наиболее широкий класс групп, на которые возможно перенесение основных фактов, относящихся к теории представлений и действий, к гармоническому анализу конечных и абелевых групп (см. коммент.[11]). За пределами этого класса ситуация совершенно иная, что и проявляется в парадоксах.

Любопытно, что следы идей этой работы фон Неймана можно увидеть в цикле «Кольца операторов», однако без явного упоминания основного понятия (аменабельности); полностью эти связи выявлены лишь в последние годы (см. наст. изд., т. 2, комментарии).

По многим конкретным вопросам фон Нейман высказал соображения, сохраняющие интерес и сейчас (см. комментарии далее); при этом надо помнить, что работа написана до окончательного оформления таких понятий, как мера Хаара, теорема Хана—Банаха, теория полупростых групп и алгебр Ли и др.

В настоящем тексте исправлены некоторые опечатки и несообразности без дополнительных примечаний. Переводчик благодарит К. Хасслер и А. Кагана за помощь при переводе.

[1] (с. 171). Термин «линейная мера» употребляется как синоним понятия «мера на вещественной прямой»; аналогично «плоская мера» — мера в $R^2$ и т. д. Тот же смысл имеют слова «линейное множество» и т. д

[2] (с. 174). Именно здесь фон Нейман определил то, что сейчас называется аменабельной группой или группой с инвариантным средним. Эти термины заменили термин «измеримая группа», поскольку слова «измеримая группа» сейчас имеют совсем другой смысл, а в этом контексте неудачны по ряду причин. Собственно $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-мера — это по существу то, что называется сейчас левоинвариантным средним на группе $\mathfrak{G}$ (см. часть I, п. 1). Аналогично, если заменить сдвиг $\tau \to \sigma\tau$ на $\tau \to \tau\sigma^{-1}$, то соответствующая $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-мера (точнее, интеграл по этой мере; см. далее) будет правоинвариантным средним. Однако существование одного из них влечет существование другого и даже двусторонне инвариантного среднего (см., например, [2]). Имеющиеся в статье результаты (принципы A—D) можно кратко сформулировать так: класс аменабельных групп содержит абелевы и конечные группы и замкнут относительно операций расширения и перехода к общему индуктивному пределу. Об аменабельных группах см. в комментариях далее.

[3] (с. 175). Современные обозначения таковы: группа евклидовых движений (у автора $O_n$) обозначается $M_n$, группа $O'_n$ — $SO(n)$ — специальная ортогональная группа, группа $A_n$ — специ-

---

* В последние годы выкристаллизовалось еще одно свойство групп, столь же грубое, как аменабельность, и напоминающее аменабельность по характеру приложений. Мы имеем в виду свойство T [7]: группа обладает им, если единичное представление есть изолированная точка в пространстве всех неприводимых унитарных представлений. Из него вытекает неаменабельность группы, но не наоборот; например, группа $SL(2, \mathbb{R})$ не обладает им, хотя и не является аменабельной. Это свойство имеет много приложений. Любопытно, что оно помогло при решении еще одной задачи Банаха, поставленной в 20-х годах и относящейся к той проблематике, что и данная работа: верно ли, что мера Лебега на сфере $S^n$ — единственная среди конечно-аддитивных, определенных на измеримых по Лебегу множествах и ортогонально-инвариантных мер? С помощью современных средств (включая тот факт, что $SL(n, \mathbb{Z})$ при $n \geqslant 3$ обладает свойством T) Д. Сулливану [8] и независимо Г. Маргулису [9] удалось дать положительный ответ для $S^n$ при $n > 3$. Свойство T оказалось важным для построения теории представлений функциональных групп Ли [10].

альная аффинная группа, т. е. полупрямое произведение группы трансляций $R_n$ на $SL(n, R)$. Мы сохраняем обозначения автора.

[4] (с. 176). Теоретико-множественные обозначения в те годы лишь начинали употребляться: например, в работе нигде не используется знак $\in$, хотя введен знак $\subset$; знак $+$ применяется для обозначения объединения множеств, а 0 означает в этом контексте пустое множество; мы не модернизировали текст с помощью последующих символических и терминологических новшеств, исключение составляет лишь замена знака $\times$ в оригинале на $\cap$, поскольку современному читателю очень трудно воспринимать $A \times B$ как $A \cap B$, а не как прямое произведение множеств.

[5] (с. 176). Речь идет о теореме Кантора—Бернштейна сравнения мощностей.

[6] (с.177). Соотношения между аменабельностью («измеримостью») группы и существованием «общей меры» выглядят так: если $\mathfrak{A}$ — инвариантное относительно $\mathfrak{G}$ множество (в частности, если $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$), а группа $\mathfrak{G}$ действует свободно (т. е. отличные от единицы элементы не имеют неподвижных точек), то аменабельность равносильна существованию $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$ - меры. Если $\mathfrak{A}$ не инвариантно, то свободы действия уже недостаточно; например, если $\mathfrak{G}$ — дискретная группа, а $\mathfrak{A} = \{e\}$, то $[\mathfrak{G}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-мера есть просто мера Хаара, существующая для любой дискретной группы. Условие, приводимое в тексте, соединяет одновременно неаменабельность с дополнительным условием на $\mathfrak{A}$. Если же, кроме того (даже в случае инвариантности $\mathfrak{A}$), $\mathfrak{G}$ действует несвободно, то нужны дополнительные условия, так как при очень сильном вырождении действия неаменабельная группа может действовать как аменабельная.

Дополнительные условия, которые формулирует фон Нейман, подобраны с точки зрения основных примеров, в части II показано как они работают. Однако их недостаток не в громоздкости, а скорее в том, что автор несколько отступает от своего принципа рассматривать чисто алгебраическую сторону дела и его условия связаны с характеристиками топологического характера действия группы (близость к единице и др.). Между тем можно было бы продолжить общую линию, рассматривая тройки $[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$, где $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathscr{H}$ — однородное пространство группы. Действительно, как видно из дальнейшего, в рассматриваемых вопросах изучение действия группы $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{M}$ сводится к изучению каждой траектории в отдельности, а траектория является однородным пространством. В настоящее время критерии несуществования $[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-меры, где $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathscr{H}$, нетрудно получить из общих теорем. Например, если $\mathfrak{G}$ — свободная группа с двумя образующими, а $\mathscr{H}$ — ее циклическая подгруппа, то $[\mathfrak{G}/\mathscr{H}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-меры не существует; именно этот случай нужен для примера Хаусдорфа $(S^{n-1}, S^{n-1}, SO(n))$ при $n \geqslant 3$; см. далее о критериях аменабельности, а также [12].

[7] (с. 179). В связи с тем что мощность измеримых классов отличается от мощности всех классов, возник вопрос о существовании такого продолжения меры Лебега (с сохранением тех же свойств), которое было бы определено на $\sigma$-алгебре подмножеств, имеющей мощность $2^{\aleph}$ Такое продолжение было в конце концов построено Какутани в 1950 г. и изучено его последователями. Этот цикл представлен также довоенными работами польской школы и рядом послевоенных работ.

[8] (с. 180). «Общее среднее значение» на группе, введенное здесь, и есть левоинвариантное среднее в современном понимании (см. примеч. выше). «Групповые числа» — это вещественные функции на группе; «ограниченные групповые числа» — ограниченные функции на группе — образуют с sup-нормой банахово пространство $l^\infty(\mathfrak{G})$; $\mu$ есть нормированный неотрицательный линейный левоинвариантный функционал Он задается конечно-аддитивной левоинвариантной мерой на $\mathfrak{G}$ ($[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-мера) или в силу дальнейших конструкций Чеха — Риса — Маркова — счетно-аддитивной левоинвариантной нормированной неотрицательной мерой на чеховской компактификации $\beta\mathfrak{G}$

[9] (с. 184). Работа написана до появления общей формулировки теоремы Хана—Банаха. Фак-

тически при доказательстве леммы 2 фон Нейман (как и Банах ранее) проводит все доказательство теоремы Хана—Банаха в конкретной ситуации. Лемма Неймана в слегка измененной форме утверждает, что если $\mathfrak{G}$ аменабельна, то $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}]$-мера существует тогда и только тогда, когда при любом $k$ вещественных $a_1, \ldots, a_k$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathfrak{G}$ $\sup_{x \in \mathfrak{M}} \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\mathfrak{A}}(\sigma_i x) \geqslant \sum_{i=1}^{k} a_i$.

Достаточность (а лишь она нетривиальна) доказывается следующим образом. Рассмотрим подпространство $L$ функций вида

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\sigma_i \mathfrak{A}}(\cdot)$$

и определим на них линейный функционал $M_0$:

$$M_0 f = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Продолжим его по теореме Хана—Банаха на все $l^\infty(\mathfrak{M})$ с сохранением неравенства

$$M(f) \leqslant \sup_x f(x)$$

(оно по предположению выполнено на $L$). Полученное продолжение (одно из них) $M$ с помощью леммы 1 исправляется до $\mathfrak{G}$-инвариантного среднего на $\mathfrak{M}$ с нормировкой на $\mathfrak{A}$.

Идея этой леммы позволяет охватить и само условие аменабельности. Например [13, т. 1, § 17], для того чтобы $\mathfrak{G}$ была аменабельной, необходимо и достаточно, чтобы для любых $k$, вещественных $a_1, \ldots, a_k$ и $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$-подмножеств $\mathfrak{G}$

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{G}} \sum_{i=1}^{k} a_i (\chi_{\mathfrak{N}_i}(\tau) - \chi_{\sigma \mathfrak{N}_i}(\tau)) \geqslant 0.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Формулировка последнего утверждения имеет явный «когомологический» оттенок, и действительно, в последующих работах аменабельность групповых алгебр была описана в когомологических терминах [14, 15].

10 (с. 186). В этом замечании содержится по существу перенос определения инвариантного среднего на полугруппы. Эта тема получила значительное развитие в литературе, однако теория аменабельных полугрупп имеет пока меньшую роль, чем теория аменабельных групп (см. [11]).

11 (с. 187). Современное изложение этих вопросов несколько отличается от приведенного; в частности, при доказательстве принципа С можно сослаться на понятие банахова предела по направлению, иначе говоря, если $\mathfrak{G} = \lim\limits_{\alpha} \operatorname{ind} \mathfrak{G}_\alpha$ — индуктивный предел групп с мономорфными вложениями, а $M_\alpha$ — инвариантное среднее на $\mathfrak{G}_\alpha$ (как функционал на $l^\infty(\mathfrak{G}_\alpha)$), то банахов предел $\operatorname{Lim}\limits_{\alpha} M_\alpha$ будет инвариантным средним на $\mathfrak{G}$. Вводя полугрупповую структуру на ординалах, фон Нейман фактически выбирает это среднее более специальным образом.

Одно из следствий принципа С состоит в том, что аменабельность $\mathfrak{G}$ вытекает из аменабельности любой конечно-порожденной подгруппы группы $\mathfrak{G}$. Это удобно применить к доказательству принципа А. Действительно, поскольку аменабельность фактор-группы вытекает из аменабельности группы, то для доказательства аменабельности абелевой группы достаточно установить, учиты-

вая предыдущее, лишь аменабельность $\mathbb{Z}^n$, но аменабельность прямого произведения вытекает из аменабельности всех сомножителей. Существование инвариантного среднего для $\mathbb{Z}$ выводится опять-таки с помощью банахова предела, а именно, рассмотрим, например $\operatorname{Lim} f_n$, где $f_n$ есть функционал на $l^\infty(\mathbb{Z})$:

$$f_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} x_i.$$

Мы видим, что существование инвариантного среднего во всех теоремах и примерах этой части доказывалось на основе банахова предела или просто на основе теоремы Хана—Банаха.

Само по себе инвариантное среднее, как вскоре стало ясно, не имеет особого интереса, тем более что все доказательства его существования неэффективны по своей сути. Однако это уже упоминалось, следует отличать проблематику, связанную с инвариантным средним, от куда более важной проблемы аменабельности. В частности, современные критерии аменабельности вполне эффективны и не требуют постоянного обращения к теореме Хана—Банаха. Среди многочисленных критериев аменабельности (которые позволяют, в частности, доказать принципы части II) упомянем лишь три важнейших, имеющих комбинаторный и вероятностный характер.

Для краткости рассмотрим лишь дискретные и конечно-порожденные группы (см. выше). Выделим образующие группы $\mathfrak{G}$.

1. Критерий Фельнера [7, 16]: для аменабельности группы необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon$, $1 > \varepsilon > 0$, существовало такое конечное подмножество $K \subset \mathfrak{G}$, что $|g_i K \cap K| > (1-\varepsilon)|K|$, $i = 1, \ldots, s$.

2а. Критерий Рейтера (см. [2]): аменабельность $\mathfrak{G}$ равносильна существованию последовательности вероятностных мер $\{\mu_n\}$ на $\mathfrak{G}$, имеющих свойство

$$\lim_n \mu_n \{h : |\mu_n(g_i h)/\mu_n(h) - 1| > \varepsilon\} = 0, \quad i = 1, \ldots, s.$$

2б. Усиленный критерий Рейтера (см. [17, 18]): аменабельность равносильна существованию вероятностной меры $\mu$ на $\mathfrak{G}$, для которой последовательность сверток $\mu_n = \mu * \ldots * \mu$ удовлетворяет предыдущему соотношению.

3. Критерий Кестена [16, см также 17]: для всякой симметричной вероятностной меры $\mu$ на $G$ $\lim_n \sqrt[n]{\mu_n(e)} = 1$, где $\mu_n$ — $n$-я свертка $\mu$ с собой ($\mu_n(e)$ — вероятность возвращения в $e$ за $n$ шагов).

Эти критерии позволяют устанавливать аменабельность (и неаменабельность) групп в широком классе случаев; принципы A—D легко следуют из них.

Запас аменабельных групп все еще изучен недостаточно, хотя этому вопросу посвящено немало работ. Разумеется, разрешимыми и локально-конечными группами их запас не исчерпывается. Например, расширение группы финитных подстановок множества всех целых чисел с помощью сдвига дает пример аменабельной группы с двумя образующими, не являющейся ни локально-конечной, ни разрешимой.

Интересен вопрос об аналитических характеристиках аменабельности (ср. с критерием Кестена). Легко показать, что группы с субэкспоненциальным, в частности полиномиальным, ростом числа слов аменабельны [19]; впрочем, недавно М. Л. Громов [20] показал, что группы с полиномиальным ростом числа слов — это в точности конечные расширения нильпотентных групп; существование же групп промежуточного роста (между полиномиальным и экспоненциальным) обнаружено Р. И. Григорчуком [21]. С другой стороны, среди экспоненциальных групп имеются многочисленные разрешимые группы и поэтому рост числа слов — совершенно неадекватная характеристика

аменабельности. Возможно, здесь полезна более тонкая числовая характеристика — рост коэффициентов ряда Голода—Шафаревича, привлеченная А. М. Вершиком [22, 4, 23]. Его гипотеза состоит в том, что аменабельность следует из субэкспоненциальности роста этих коэффициентов; все разрешимые группы уже попадают в этот класс (А. Березный), так как рост является субэкспоненциальным (но не полиномиальным). Заметим еще, что аменабельные группы не составляют многообразия (так как содержат все конечные группы). Скорее всего, класс аменабельных групп должен описываться в терминах аппроксимаций группового закона (см. [22, 4, 23]). Многочисленные результаты показывают, что аменабельные группы — это те, которые в определенном смысле хорошо аппроксимируются конечными группами

[12] (с. 188). Отношение эквивалентности, введенное выше, есть траекторная эквивалентность, точнее, класс эквивалентности есть траектория (орбита) точки под действием группы. Соответствующее разбиение на классы, вообще говоря, не является измеримым, например, в том смысле, что его нельзя задавать как разбиение на линии уровня измеримой функции. В частности, это так, если группа действует эргодически (такой случай реализуется во всех разбираемых примерах). Отсюда следует, что в этом случае нельзя выбрать «однослойное» измеримое множество (множество, пересекающееся с каждой траекторией по одной точке). Но с помощью принципа выбора это можно сделать в классе всех множеств, что и служит стандартным способом получения примеров неизмеримых множеств Поскольку в статье рассматриваются любые множества, то теория сводится к изучению отдельных траекторий. После этого парадоксы Хаусдорфа—Банаха—Тарского и приведенные в части III парадоксы фон Неймана становятся естественными следствиями простых свойств свободной группы с двумя образующими (или другой неаменабельной группы).

В эргодической теории изучение разбиения на траектории составляет предмет так называемой траекторной теории Само разбиение на траектории (хотя оно неизмеримо) есть полезный и допустимый объект, однако в случае эргодичности однослойных измеримых множеств относительно разбиения нет; это делает траекторную теорию весьма содержательной и несводимой к изучению каждой траектории в отдельности (см. [24—26])

[13] (с. 189). И в случае несвободного действия (наличия неподвижных точек у нетождественных преобразований) можно было бы продолжать изучение в том же духе, переходя к однородным пространствам группы.

[14] (с. 189). Сама по себе эта формулировка есть ослабленная форма леммы Халмоша—Рохлина, доказанной уже в 40-х годах. Содержание примеч. 53 можно изложить кратко как построение действия $\mathfrak{G} \times \mathfrak{S}^\infty$ ($\mathfrak{S}^\infty$ — группа всех подстановок натурального ряда) в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{A}$ с последующим ограничением действия на $\mathfrak{M}$.

[15] (с. 191). Эта часть работы особенно интересна и не утратила своей свежести и сейчас. Вопросу о свободных подгруппах групп Ли, впервые широко поставленному в этой статье, посвящено много работ (см. далее). Здесь уместно остановиться на следующем вопросе. Возможно, из-за особого внимания, которое уделил фон Нейман задаче о свободных подгруппах, ему приписывают такую гипотезу: всякая неаменабельная дискретная группа содержит свободную подгруппу с двумя образующими [2]. Действительно, хотя в тексте статьи нет такой гипотезы, тем не менее это предположение было бы естественным, если основываться на имевшихся примерах [2, 11]. Эта гипотеза верна, например, если ограничиться дискретными подгруппами групп Ли. Однако уже в самые последние годы анализ конструктивных методов Новикова—Адяна [27] построения групп, относящихся к проблеме Бернсайда, привел ряд авторов к противоположной гипотезе: о существовании периодической неаменабельной группы. В окончательной форме такую группу удалось построить А. Ю. Ольшанскому в связи с другими задачами [28]. Его периодическая группа обладает многими парадоксальными свойствами; в частности, все собственные ее подгруппы цикличны и конеч-

ны; неаменабельность ее устанавливается с помощью критерия Кестена (см. выше). Возможно, что комбинаторные свойства таких групп, и в частности равносоставленность подмножеств, выглядят иначе, чем для свободных групп.

[16] (с. 192). Это место написано несколько конспективно, следует заметить дополнительно, что группа, порожденная $\sigma$ и $\tau$, всюду плотна

Фактически, интересные соображения, использованные здесь фон Нейманом, имеют общий характер и не связаны лишь с $O_n$ и др. Их можно отнести к тому, что сейчас называется теорией алгебраических групп. Точное оформление этих соображений в достаточно общей форме потребовало бы еще и не существовавшей тогда общей теории полупростых групп и алгебр Ли. Наоборот, непосредственно для нужных групп — $O_n$ и др.— все эти рассуждения легко проводятся в так называемых натуральных координатах

[17] (с. 193). Таким образом, и случай Хаусдорфа включается в рассмотрения фон Неймана. Заметим, что для целей этого пункта достаточно было бы построить свободную подгруппу, как в части III. Но ниже фон Нейман решает попутно другую задачу, а именно доказывает отсутствие соотношений уже в $L$ (в современных обозначениях) $PSL$ (2, $\mathbb{Z}$)) (а не только в $PSL$ (2, $\mathbb{R}$), строя в ней свободную подгруппу с двумя образующими. Это построение, вошедшее в учебники (см., например, [29, с. 211]), означает, что группа, порожденная $\mathbb{Z}_2^{\omega}$ и $\chi$, есть свободное произведение $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}$ и, следовательно, содержит свободную подгруппу с двумя образующими.

Как отмечалось выше эти вопросы подверглись дальнейшему тщательному анализу. Окончательная теорема принадлежит Титсу [30]: всякая полупростая группа Ли над полем char = 0 содержит свободную подгруппу с двумя образующими. Отыскание конкретных свободных подгрупп есть сложная алгебро-аналитическая задача; например, вопрос, при каких $z$ матрицы $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{Vmatrix}$ образуют такую группу, до конца не решен и сейчас. Однако имеется огромное число примеров, один из первых принадлежит Н. И. Санову [31]: $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$ образуют свободную подгруппу в $SL$ (2, $\mathbb{Z}$).

[18] (с. 193). Здесь можно сослаться на теорему Нильсена—Шрайера о свободности подгрупп свободной группы [29], что сразу дает отсутствие любых соотношений, тождественных на группе

[19] (с. 194). Следует напомнить, что $L = PSL$ (2, $\mathbb{R}$) действует теперь на $\mathbb{R}^1$ (точнее, на проективной прямой); чисто алгебраические соображения у фон Неймана здесь перемежаются с рассмотрением этого действия.

[20] (с. 196). Но не утверждается непустота каждого из двух множеств $\mathscr{F}'$ и $\mathscr{F}''$.

[21] (с. 197). $\mathscr{C}'$ и $\mathscr{C}''$ произвольно разбивают $\mathscr{F}' \cap \mathscr{F}''$, если оно не пусто.

[22] (с. 199). Пример этой части особенно интересен еще и потому, что действие $L = PSL$ (2, $\mathbb{Z}$) на $P_1\mathbb{R}$ совершенно непохоже по своим эргодическим свойствам на действие $SL$ (2, $\mathbb{Z}$) в $\mathbb{R}^2$ или на действия дискретных подгрупп на сфере $S^2$, $S^3$, рассмотренных в статье. Дело в том, что это действие траекторно изоморфно некоторому действию группы $\mathbb{Z}$ [32, 33], в то время как остальные действия, упомянутые выше, не являются таковыми. (Траекторный изоморфизм групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ означает изоморфизм в смысле теории меры пространств, где действуют группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$, сохраняющий разбиения на тректории.) Это обстоятельство еще раз подчеркивает чисто алгебраический характер парадоксов (наличие в $L$ свободной подгруппы), поскольку по эргодическим свойствам действие $L$ на $R_1\mathbb{R}$ более сходно с действием коммутативной группы.

## О бесконечных тензорных произведениях

В последние 15 лет увеличился интерес к пространствам функций, зависящих от бесконечного числа переменных. Такие пространства появляются в моделях квантовой теории поля, статистической физике и теории случайных процессов.

Все подходы к изучению таких пространств и операторов в них можно грубо разделить на две группы. В первой такие пространства рассматриваются как пространства отображений (или их классов) некоего бесконечномерного пространства в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$. Во второй группе, которая по духу лежит ближе к статье фон Неймана, такие пространства получаются как пределы пространств функций конечного числа $N$ переменных при $N \to \infty$. Следует отметить, что между этими подходами существуют глубокие связи. Так, изоморфизм Сигала устанавливает соответствие между пространством Фока (пример подхода второго типа) и пространством квадратично интегрируемых по гауссовской мере функций на гильбертовом пространстве (подход первого типа).

Наиболее непосредственным продолжением статьи фон Неймана являются работы Ю. М. Березанского и его школы (см. [34] и библиографию там). Эти работы посвящены исследованию бесконечных семейств коммутирующих между собой нормальных операторов. В приложениях (например, в конструктивной теории поля) зачастую бывает неясно, в каком пространстве следует представлять такие семейства. Естественную область определения для них часто можно построить как бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств.

Анализ семейств коммутирующих операторов требует построения их совместного разложения по (обобщенным) собственным функциям. Удобным методом для этого является дифференцирование их совместного разложения единицы по следовой мере. Для построения такой меры в случае непрерывного спектра нужно уметь строить (квази-)ядерное оснащение бесконечного тензорного произведения гильбертовых пространств. С этой целью разработаны соответствующие обобщения конструкции фон Неймана, позволяющие по оснащениям сомножителей строить удобные оснащения их бесконечного прямого произведения.

С помощью этой техники удается решить ряд проблем, например провести спектральный анализ оператора Лапласа—Леви, исследовать бесконечномерную проблему моментов и др.

[1] (с. 219). Покажем, что $\overline{\Pi}' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ есть линейное пространство, натянутое на векторы $\Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ с соотношениями

$$(f_{\alpha_0} + g_{\alpha_0}) \otimes \Pi \otimes_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0} f_\alpha = f_{\alpha_0} \otimes \Pi \otimes_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0} f_\alpha + g_{\alpha_0} \otimes \Pi \otimes_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0} f_\alpha, \tag{i}$$

$$\Pi \otimes_{\alpha \in I} z_\alpha f_\alpha = \Pi_{\alpha \in I} z_\alpha \cdot \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha \tag{ii}$$

для произвольного сходящегося $\Pi_{\alpha \in I} z_\alpha$.

Такое определение $\Pi' \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$ является более привычным при введении тензорного произведения гильбертовых пространств, и оно более удобно для обобщений и приложений.

Пусть $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_{\alpha,i}$. Мы должны доказать, что $(\Phi, \Psi) = 0$ для любого $\Psi = \Pi \otimes_{\alpha \in I} h_\alpha$ тогда и только тогда, когда $\Phi = 0$, т. е. за конечное число элементарных операций (i), (ii) $\Phi$ приводится к нулю. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $(\Phi, \Psi) = 0 \forall \Psi$. Заметим сразу, что мы можем считать все пространства $\mathfrak{H}_\alpha$ конечномерными, заменив $\mathfrak{H}_\alpha$ на подпространства $\mathfrak{H}'_\alpha \subset \mathfrak{H}_\alpha$, натянутые на векторы $f_{\alpha,i}$, $i = 1, \dots, n$, и рассматривая $h_\alpha$ лишь из $\mathfrak{H}_\alpha$. После этого для конечного множества $I$ необходимое нам утверждение становится почти очевидным. А именно, разложим каждый вектор $f_{\alpha,i}$ по ортонормированному базису $\{e_\alpha^{(j)}\}$ в пространстве $\mathfrak{H}_\alpha$, $f_{\alpha,i} = \sum a_{\alpha,ij} e_\alpha^{(j)}$, раскроем скобки, пользуясь (i), (ii), и

приведем подобные члены. В результате мы получим разложение $\Phi = \sum_J a_J e_J$, где суммирование $\sum_J$ конечно и ведется по наборам $J = \{j_\alpha, \alpha \in I\}$, $1 \leqslant j_\alpha \leqslant \dim \mathfrak{H}_\alpha$, $e_J = \Pi \otimes_{\alpha \in I} e_\alpha^{(j_\alpha)}$. Векторы $e_J$ ортонормированы, поэтому $0 = (\Phi, e_J) = a_J$, т. е. $\Phi = 0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда множество $I$ бесконечно. Мы можем предполагать, что $\Pi_{\alpha \in I} \| f_{\alpha,i} \| \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, и в частности $f_{\alpha,i} \neq 0$, поскольку в противном случае $\Phi_i = \Pi \otimes_{\alpha \in I} f_{\alpha,i} = 0$ и это слагаемое может быть исключено из $\Phi$. Скажем, что $\Phi_i$ эквивалентно $\Phi_j$, если выполнены следующие два свойства:

(a) векторы $f_{\alpha,i}$, $f_{\alpha,j}$ коллинеарны, $f_{\alpha,i} = a_{\alpha,ij} f_{\alpha,j}$, $a_{\alpha,ij} \in \mathbb{C}$, для всех $\alpha \in I$, за исключением, быть может, какого-то конечного множества $I_{ij}$ индексов $\alpha$;

(b) $\Pi_{\alpha \in I \setminus I_{ij}} a_{\alpha,ij}$ сходится.

Все элементы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ распадаются на классы эквивалентности $C_1, \ldots, C_m$, $m \leqslant n$. Пусть $J$ есть (конечное) множество тех $\alpha \in I$, для которых существуют два эквивалентных вектора $\Phi_i$, $\Phi_j$, такие, что векторы $f_{\alpha,i}$, $f_{\alpha,j}$ неколлинеарны. В силу конечномерности пространства $\mathfrak{H}_\alpha$

$$\Pi \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha = (\Pi \otimes_{\alpha \in J} \mathfrak{H}_\alpha)' \otimes \Pi' \otimes_{\alpha \in I \setminus J} \mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_J' \otimes \Pi' \otimes_{\alpha \in I \setminus J} \mathfrak{H}_\alpha,$$

где пространство $\mathfrak{H}_J$ конечномерно. Соотношения (i), (ii) позволяют объединить сумму векторов каждого класса эквивалентности $C_r$ в один вектор, принадлежащий пространству $\mathfrak{H}_J' \otimes \Pi' \otimes_{\alpha \in I \setminus J} \mathfrak{H}_\alpha$ и имеющий вид $f_J \otimes \Pi \otimes_{\alpha \in I \setminus J} f_\alpha$. Поэтому мы с самого начала можем предполагать, что каждый класс эквивалентности состоит ровно из одного элемента.

Назовем два элемента $\Phi_i$, $\Phi_j$ слабо эквивалентными, если для них выполнено свойство (a), но, вообще говоря, не выполнено (b). Пусть $\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_m}$ — все элементы, которые слабо неэквивалентны $\Phi_1$. Выберем произвольный индекс $\alpha_1 \in I$, такой, что векторы $f_{\alpha_1,1}$, $f_{\alpha_1,i_1}$ неколлинеарны, и положим $h_{\alpha_1} = g$, где $g \in \mathfrak{H}_{\alpha_1}$ есть произвольный вектор, такой, что $(f_{\alpha_1,1}, g) \neq 0$, $(f_{\alpha_1,i_1}, g) = 0$. Поскольку векторы $f_{\alpha_1,1}$ и $f_{\alpha_1,i_1}$ неколлинеарны, такой вектор, очевидно, найдется. Выберем теперь произвольный индекс $\alpha_2 \neq \alpha_1$, такой, что векторы $f_{\alpha_2,1}$ и $f_{\alpha_2,i_2}$ неколлинеарны, и положим $h_{\alpha_2} = g$, где $g \in \mathfrak{H}_{\alpha_2}$ есть произвольный вектор и такой, что $(f_{\alpha_2,1}, g) \neq 0$, $(f_{\alpha_2,i_2}, g) = 0$ и т. д., выберем произвольный индекс $\alpha_m \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, такой, что векторы $f_{\alpha_m,1}$ и $f_{\alpha_m,i_m}$ неколлинеарны, и положим $h_{\alpha_m} = g$, где $(f_{\alpha_m,1}, g) \neq 0$, $(f_{\alpha_m,i_m}, g) = 0$. Отметим, что существование индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ следует из бесконечности множества индексов $\alpha$, для которых $f_{\alpha,1}$ неколлинеарно $f_{\alpha,i_k}$, $k = 1, \ldots, m$.

Положим теперь $h_\alpha = f_{\alpha,1}$ для $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\Psi = \Pi \otimes_{\alpha \in I} h_\alpha$. Тогда из построения $\Psi$ следует, что $(\Phi_1, \Psi) = \Pi_{i=1}^n (f_{\alpha_i,1}, h_{\alpha_i}) \neq 0$ и $(\Phi_{i_k}, \Psi) = \Pi_{\alpha \in I} (f_{\alpha,i_k}, h_{\alpha_i}) = 0$, поскольку $(f_{\alpha_k,i_k} h_{\alpha_k}) = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Пусть теперь $n \geqslant l \geqslant 2$ и $l \neq i_1, \ldots i_m$. Тогда элемент $\Phi_l$ слабо эквивалентен $\Phi_1$, т. е. $f_{\alpha,l} = a_{\alpha,l1} f_{\alpha,1}$ для всех $\alpha$, за исключением конечного множества $I_{l1}$. С другой стороны, мы предположили, что класс эквивалентности элемента $\Phi_1$ состоит только из него самого, следовательно, элемент $\Phi_l$ неэквивалентен $\Phi_1$, поэтому $\Pi_{\alpha \in I \setminus I_{l1}} a_{\alpha,l1}$ расходится, откуда следует, что $\Pi_{\alpha \in I} (f_{\alpha,l}, f_{\alpha,1}) = 0$, т. е. $(\Psi, \Phi_l) = 0$. Тем самым мы установили, что $(\Phi_1, \Psi) \neq 0$ и $(\Phi_l, \Psi) = 0$ для всех $l \geqslant 2$. Поэтому $(\Phi, \Psi) = (\Phi_1, \Psi) \neq 0$, что противоречит нашему предположению. Требуемое утверждение доказано.

## Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного порядка

Работа принадлежит к числу замечательных достижений фон Неймана. Простота, ясность и новизна общей постановки вопросов, естественность данных решений и важность поставленных и нерешенных проблем делают ее классической. К сожалению, по ряду причин эта работа до последнего времени была малоизвестна и ссылки на нее единичны. Одной из принципиальных последующих работ, базирующихся если не на результате, то на идеях этой статьи, была работа Глимма [35] по классификации UHF-алгебр, являющихся бесконечными тензорными произведениями, которая, в свою очередь, дала толчок развитию многих разделов теории $C^*$-алгебр. Возможно, малая доступность журнала и год опубликования сыграли свою роль в том, что эта работа недостаточно известна, но, видимо, есть и более серьезные причины. Статья написана в тот момент, когда уже были открыты факторы типа $II_1$, но еще не было примеров различных (неизоморфных) факторов. Уже при печати (см. п. 10) сделано примечание о том, что неизоморфные факторы типа $II_1$ построены (речь идет о статье «Кольца IV»)*.

Настоящая работа также была задумана (см. п. 4) как шаг к осуществлению такого построения. Оказалось, однако, что на этом пути и нельзя получить новые примеры! В той же работе «Кольца IV» доказана единственность гиперконечного фактора типа $II_1$, а весь арсенал средств, развитый в настоящей работе, пригоден для изучения лишь гиперконечных факторов. Искомые же примеры факторов были найдены на другом материале (регулярные представления дискретных групп — см. «Кольца IV» и комментарий), не имеющем отношения к построениям этой работы; может быть, из-за этого интерес к работе снизился.

Однако повод к постановке вопросов часто бывает куда менее важен, чем сам вопрос. Именно так оказалось здесь: эта работа фон Неймана была одной из первых, где с большой остротой поставлен вопрос об асимптотическом изучении конечномерных алгебр и пространств, вопрос совсем новый по тем временам и ставший чрезвычайно актуальным в последние годы. Нейман предвосхитил здесь проблематику, близкую к современным аппроксимационным построениям, пронизывающим огромную часть современного анализа и его приложений, в первую очередь физики.

Как отмечается во введении (см. п. 4), асимптотическим подходом пренебрегают в пользу актуально бесконечномерных рассмотрений. Действительно, в те годы (расцвета классического функционального анализа) оперировали «готовыми» пространствами, как правило связанными с теорией функций, и основные успехи функционального анализа сконцентрированы около теории операторов в этих пространствах и геометрии этих пространств. Идея рассмотрения других пределов конечномерных пространств, которые, возможно, не дают предельного бесконечномерного пространства, однако, таких, что существует предел их матричных алгебр, была совершенно новой. Как пишет Нейман, «другие предельные случаи существуют и во многих отношениях являются более естественными». Этот подход составляет основу теории гиперконечных факторов Мюррея—Неймана и непрерывной геометрии Неймана, однако сейчес ясно, что возможности его гораздо шире. Но и более общая идея аппроксимационного построения бесконечномерных пространств, операторов, алгебр не была популярна в 30-е годы, хотя она и была одной из исходных идей для функционального анализа (например, теория Фредгольма). Лишь в 60-х годах наступило понимание важности асимптотического и аппроксимационного подходов. Этому способствовали новые задачи, связанные с приложениями (в особенности классическая и квантовая статистическая физика), теория $C^*$-алгебр ($AF$-алгебр и их представлений) и гиперконечных факторов, а также успехи аппроксимационной техники в классическом функциональном анализе (теорема Дворецкого о сечениях сферы, пример

* Для краткости статья «О кольцах операторов IV», помещенная в т. 2 настоящего издания, цитируется как «Кольца IV».— *Примеч. ред.*

Энфло — построение слабонепрерывного следа в алгебре всех операторов некоторого банахова пространства), в теории динамических систем, теории представлений, теория асимптотических спектров матриц и др.

Проследим за несколькими важнейшими пунктами работы.

1. Основной результат работы может показаться несколько неожиданным (см. (9.3)): существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех натуральных $m$ и $p \geqslant 2$ множество матриц $A$, спектральной нормы не больше единицы в $M_{mp}\mathbb{C}$, представимых в виде $A = a \otimes 1$ при каком-либо разложении $M_{mp}\mathbb{C} = M_p\mathbb{C} \otimes M_p\mathbb{C}$ (все такие разложения получаются из одного внутренними автоморфизмами, см. приложение 1), не образует $\varepsilon$-сети в $M_{mp}\mathbb{C}$ в норме $\|A\| = \frac{1}{mp}\,\mathrm{Sp}\,(AA^*)^{1/2}$. Фон Нейман доказывает по существу гораздо более сильный факт (см. (9.6)): для всякого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех натуральных $n$ в алгебре $M_n\mathbb{C}$ можно так выбрать матрицу $A$, спектральной нормы не больше единицы, что для всех ортогональных проекторов $E$, размерность которых подчинена неравенству $n\delta \leqslant \dim E \leqslant n(1-\delta)$, выполнено $\|AE - EA\| > \varepsilon$. В то же время для эрмитовых унитарных нормальных матриц это не так, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $m$, такое, что для всех $p \geqslant 1$ множество эрмитовых (унитарных, нормальных) матриц в $M_{mp}\mathbb{C}$ эрмитово (и т. д.); матрицы, представимые в виде $a \otimes 1$ при некотором разложении $M_{mp}\mathbb{C} = M_m\mathbb{C} \otimes M_p\mathbb{C}$, образуют $\varepsilon$-сеть в норме $\|\cdot\|$. В работе нет слов «$\varepsilon$-сеть» и тем более «$\varepsilon$-энтропия», которые появились в 50-х годах (фон Нейман называет свой метод «объемометрическим»), однако в современных терминах основная теорема состоит именно в том, что оценка $\varepsilon$-энтропии (равная логарифму числа точек $\varepsilon$-сети) оказывается существенно разной для $M_{mp}\mathbb{C}$ и для множества матриц, почти коммутирующих с каким-либо проектором размерности, указанной выше. Возможно, это одна из первых работ, использующая идеи $\varepsilon$-энтропии для доказательства теорем существования. Это обстоятельство также прошло, видимо, незамеченным, и расцвет этого метода наступил позже — в 50—60-годах (А. Н. Колмогоров и др.).

2. Результат, цитированный выше, относится к взаиморасположению алгебр $M_m\mathbb{C}$ и $M_{mp}C, p \geqslant 2$, и различным вложениям первой во вторую. При этом очень существенны нормы, которыми эти алгебры снабжаются. Первоначально (см. п. 14—17) нужные оценки проводятся в гильбертово-шмидтовских нормах ($\|\cdot\|$). Для перехода к более трудным спектральным нормам ($|\|\cdot\||$) используется развитый автором метод, названный «вырезанием тонкой части спектра». Он состоит в ограничении найденного оператора на специально подобранное подпространство, в котором это ограничение имеет спектральную норму, меньшую единицы, а оценка на размерности сохраняется. Этот метод — наиболее тонкая часть работы — использован в трех местах, хотя последнее его применение (в приложении 2) не столь обязательно. Возможности этого метода недостаточно оценены. Отметим еще задачу в примеч. 22, видимо нерешенную до сих пор, ее решение позволило бы сразу работать в спектральных нормах.

3. Как отмечает сам автор, метод работы в основном пункте не конструктивен, вопрос о предъявлении матрицы с нужным свойством открыт. Этот вопрос, возможно, наиболее интересен из оставшихся здесь нерешенными, и именно с ним связана проблема 7.2; автор высказывает догадку об ее отрицательном решении и пишет, что «не в состоянии полностью ответить на вопрос». Проблема 7.2 была, видимо, основной для целей автора, но, как уже упоминалось выше, ее отрицательное решение, очень интересное само по себе, не позволило бы построить новый фактор типа $\mathrm{II}_1$. Остановимся на 7.2 чуть подробнее. При этом мы будем использовать принятую в теории факторов терминологию. Отрицание утверждения $\mathfrak{B}_m^n(\varepsilon)$ (см. вопрос 7.2) в терминах матриц читатель может легко сформулировать; при этом ясно, что в отличие от отрицания $\mathfrak{U}_m^n(\varepsilon)$ здесь полезно использовать индуктивный предел матричных алгебр с тензорными вложениями и его пополнение по норме $\|\cdot\|$,

которая сейчас называется следовой и обозначается иногда [[ · ]]. Тогда отрицательный ответ на вопрос 7.2 выглядит так: существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $m$ объединение всех подфакторов типа $\mathrm{I}_m$ в гиперконечном факторе типа $\mathrm{II}_1$ не образует $\varepsilon$-сети в следовой норме. Поскольку все гиперконечные факторы типа $\mathrm{II}_1$ изоморфны (см. выше и «Кольца IV»), то нам не нужно уточнять, по какой подпоследовательности показателей $\{n_i\}$, $n_i | n_{i+1}$, берется предел последовательности $M_{n_1}\mathbb{C} \subset M_{n_2}\mathbb{C} \subset \ldots$ Это было бы существенным для постановки соответствующей проблемы в категории $C^*$-алгебр, где, по Глимму (см. выше), классификация индуктивных пределов уже зависит от показателей.

Насколько известно комментатору, проблема эта не решена даже в более слабой постановке: верно ли, что при данном $m$ (например, $m = 2$) объединение всех подфакторов типа $\mathrm{I}_m$ в гиперконечном факторе типа $\mathrm{II}_1$ не является всюду плотным по следовой норме? Так как все подфакторы типа $\mathrm{I}_m$ (при фиксированном $m$) внутренне изоморфны в гиперконечном факторе, то этот вопрос можно сформулировать так: будет ли плотной (в следовой норме) в гиперконечном факторе типа $\mathrm{II}_1$ орбита алгебры $\mathrm{I}_m$ под действием группы внутренних автоморфизмов фактора? Путь, намеченный в статье, состоящей в последовательном усилении утверждений (9.4)—(9.7), для этой задачи уже не эффективен из-за того, что размерности здесь не ограничены и энтропийные соображения применить нельзя, так как нужное множество некомпактно, в то время как в задаче 7.1 мы не выходим из $M_n\mathbb{C}$. Решение сформулированных задач прояснило бы и структуру факторов типа $\mathrm{II}_1$, и асимптотические свойства матриц высокой размерности. Какова же связь этой проблемы с конструктивным решением основной задачи? Дело в том, что решение фон Неймана не содержит информации о зависимости поведений матриц $A \in M_n\mathbb{C}$, нужных для доказательства (9.3) или (9.7), от $n$; если бы, например, $A$ могло быть выбрано одним и тем же для всех $n = mk$, $k = 1, 2 \ldots$, то это и было бы отрицательным решением проблемы 7.2. Однако может случиться, что при каждом $k$ нужных матриц $A$ нет в меньшей подалгебре. Как обстоит дело в действительности, прояснится, если мы будем знать больше, чем только то, что нужные матрицы в проблеме 7.1 или (9.7) существуют, т. е. если будет дано более конструктивное решение задачи, изложенной в этой работе.

4. Последнее замечание относится к приложению 3. В нем фон Нейман ставит вопрос (см. (30.3)), верно ли, что если $A$ и $B$ — два ограниченных и коммутирующих оператора в гильбертовом пространстве и $A$ нормален, то $A^*$ и $B$ также коммутируют? Приведенный фон Нейманом пример показывает, что если отказаться от ограниченности $B$, то это, вообще говоря, уже не так (см. ниже). Положительный ответ на этот вопрос был получен в 1950 г. учеником фон Неймана Фуглидом (Proc. Amer. Math. Soc., vol. 36); полезное обобщение привел К. Путнам; вот их теорема: если $A_1$ и $A_2$ — нормальные ограниченные операторы, $B$ ограничен и $A_1B = BA_2$, то $A_1^*B = BA_2^*$. При $A_1 = A_2$ получается (30.3). Приведем функциональную формулировку теоремы Фуглида и примера фон Неймана. Спектральная теорема позволяет свести вопрос к рассмотрению компакта $D$ в $\mathbb{C}$, конечной меры $\mu$ на $D$ и оператора $A$ умножения на $z$ в пространстве $L^2_\mu(D)$. Теорема Фуглида утверждает, что всякий оператор, коммутирующий с $A$ и ограниченный, есть оператор умножения. Этот трудный факт следует из цикличности $A$, т. е. из того, что для некоторой функции $f_0 \in L^2_\mu$ множество $\{z^n f_0(z), n \geqslant 0\}$ тотально в $L^2_\mu(D)$. Пусть $D$ — единичный круг и $\mu$ — мера Лебега, тогда (неограниченный) оператор $B = \partial/\partial\bar{z}$ коммутирует с $A$, но не с $A^*$ — это есть спектральная переформулировка примера фон Неймана с квантовомеханическими операторами. Уже в этом случае функция $f_0$ из теоремы Фуглида выглядит весьма громоздко. Дальнейшие обобщения этой теоремы приведены, например, в книге П. Халмоша «Гильбертово пространство в задачах» (М., 1970).

# ЛИТЕРАТУРА К КОММЕНТАРИЯМ


1. *Neumann J. von.* On complete topological spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 37.
2. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах. М. : Мир, 1973. 136 с.
3. *Hulanicki A.* Groups, whose regular representation weakly contains all unitary representations.— Stud. math., 1964, vol. 24, p. 37—59.
4. *Vershik A.* Amenability and approximation of infinite groups.— Sel. Math. Sov., 1982, vol. 2, N 4, p. 311—330.
5. *Ornstein D., Weiss B.* Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma.— Bull. Amer. Math. Soc., 1980, vol. 2, N 1, p 161—164.
6. *Kesten H.* Symmetric random walks on groups.—Trans. Amer. Math., Soc., 1959, vol. 92, p. 336.
7. *Каждан Д.* О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп.— Функцион. анализ и его приложения, 1967, т. 1, № 1, с. 71—74.
8. *Sullivan D.* For $n>3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the $n$-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets. — Bull. Amer. Math. Soc., 1981, vol. 4, N 1, p. 121—123.
9. *Margulis G.* Some remarks on invariant means.— Monatsh. Math., 1980, Bd, 90, N 3, S. 233—362.
10. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления группы SL (2, $R$), где $R$ — кольцо функций.— Успехи мат. наук, 1973, т. 28, № 5, с. 83—128.
11. *Day M.* Amenable semigroups.— Ill. J. Math., 1957, vol. 1, N 4, p. 509—544.
12. *Григорчук Р. И.* Симметрические случайные блуждания на дискретных группах.— Успехи мат. наук, 1977, т. 32, № 6, с. 217—218.
13. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М. : Наука, 1975, Т. 1. 654 с.
14. *Johnson B.* Cohomology in Banach algebras.—Mem. Amer. Math. Soc., 1972, N 127, p. 1—96.
15. *Хелемский А. Я., Шейнберг М. В.* Об аменабельных банаховых алгебрах.— Функцион. анализ и его приложения, 1979, т. 13, № 1, с. 42—48.
16. *Folner E.* On groups with full Banach mean value.—Math. scand., 1955, Bd 3, S. 243—254.
17. *Вершик А. М., Кайманович В. А.* Случайные блуждания на группах: граница, энтропия и равномерное распределение.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 1, с. 15—18.
18. *Kaimanovich V. A., Vershik A. M.* Random walks on discrete groups: boundary, entropy.— Ann. Probab., 1983, vol. 11, N 3, p. 457—490.
19. *Адельсон-Вельский Г. М., Шрейдер Ю. А.* Банахово среднее на группах.— Успехи мат. наук, 1957, т. 12, № 6, с. 131—136.
20. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps.— Publ. IHES, 1981, vol 53.
21. *Григорчук Р. И.* К проблеме Милнора о групповом росте.— Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 1, с. 30—33.
22. *Вершик А. М.* Счетные группы, близкие к конечным.— В кн.: Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М. : Мир, 1973, с. 112—135.
23. *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, т. 48, № 5
24. *Feldman J., Moore C.* Ergodic equivalence relations cohomology and von Neumann algebras. II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, vol. 234, p. 289—361.
25. *Вершик А. М.* Неизмеримые разбиения, траекторная теория, алгебры операторов.— Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 5, с. 1004—1007.
26. *Dye H. A.* On group of measure preserving transformations. I, II.— Amer. J. Math, 1959, vol. 81, p. 119—159; 1963, vol. 85, p. 551—576.
27. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука, 1978 335с.
28. *Ольшанский А. Ю.* К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе.— Успехи мат. наук, 1980, т. 35, № 4, с. 199—200.
29. *Курош А. Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967. 648 с.
30. *Tits J.* Free subgroups on linear groups.— J. Algebra, 1972, N 20, p. 250—270.
31. *Санов Н. И.* Свойство одного представления свободной группы.— Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7, с. 657—659.
32. *Вершик А. М.* Действие PSL (2,$R$) на $P_1R$ аппроксимируемо.— Успехи мат. наук, 1978, т. 33, № 1, с. 209—210.
33. *Bowen R.* Anosov foliations are hyperfinite.— Ann. Math., 1977, vol. 106, p. 549—565.
34. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. Киев: Наук. думка, 1978. 360 с.
35. *Glimm J.* On a certain class of operator algebras.— Trans. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 72.

# СОДЕРЖАНИЕ

Об операторных методах в классической механике (пер. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 7
Дополнения к работе «Об операторных методах ...» (пер. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 60
Операторные методы в классической механике II. *Совместно с П. Р. Халмошем* (пер. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 63
Введение аналитических параметров в топологические группы (пер. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 84
Почти периодические функции на группе. I (пер. *Л. А. Бунимович*) 104
Почти периодические функции на группах. II *Совместно с С. Бохнером* (пер. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 146
К общей теории меры (пер. *А. М. Вершик*) . . . . . 171
Добавление к работе «К общей теории меры» (пер. *А. М. Вершик*) 201
О бесконечных тензорных произведениях (пер. *П. М. Блехер*) . 202
Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного порядка (пер. *А. М. Вершик*) . . . . . 277
Однозначность оператора Шредингера (пер. *П. М. Блехер*) . . 328

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Джон фон Нейман (*А. М. Вершик, А. Н. Колмогоров, Я. Г. Синай*) 337
Библиография трудов Дж. фон Неймана . . . . . 352
Книги . . . . . 352
Статьи . . . . . 352
Комментарии к статьям . . . . . 357
Об операторных методах в классической механике (сост. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 357
Операторные методы в классической механике. II (сост. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 359
Введение аналитических параметров в топологические группы (сост. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 359
Почти периодические функции на группе. I (сост. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 361
Почти периодические функции на группах. II (сост. *Л. А. Бунимович*) . . . . . 361
К общей теории меры (сост. *А. М. Вершик*) . . . . . 362
О бесконечных тензорных произведениях (сост. *П. М. Блехер* и *А. В. Марченко*) . . . . . 370
Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного порядка (сост. *А. М. Вершик*) . . . . . 372